SUR LA

THÉORIE DES SPHÈRES OSCULATRICES A UNE COURBE,

PAR M. V. JAMET,

Professeur de Mathématiques au Lycée de Marseille.

1. Le problème que nous allons traiter a déjà été rencontré par M. Darboux, au cours de ses travaux sur les équations aux dérivées partielles. Nous pensons cependant qu'il y a quelque intérêt à étudier la question en elle-même et nous nous proposons de résoudre le problème suivant : *Le centre d'une sphère se déplaçant sur une courbe donnée* S, *comment doit varier son rayon pour qu'elle soit sans cesse osculatrice à une autre courbe* C?

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point situé sur la courbe S, R le rayon de la sphère qui a son centre en ce point et qui est osculatrice, au point x, y, z, à la courbe C. On connaît les relations

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\mathrm{R}^2,\\
&(x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\zeta)\,dz=0,\\
&(x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+(z-\zeta)\,d^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0,\\
&(x-\xi)\,d^3x+(y-\eta)\,d^3y+(z-\zeta)\,d^3z+3(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)=0,
\end{aligned}
$$

qui déterminent ξ, η, ζ, R quand on regarde x, y, z comme des fonctions données d'un même paramètre. Si l'on différentie trois fois de suite la première en tenant compte des suivantes, on trouve

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&(x-\xi)\,d\xi+(y-\eta)\,d\eta+(z-\zeta)\,d\zeta=-\mathrm{R}\,d\mathrm{R},\\
&(x-\xi)\,d^2\xi+(y-\eta)\,d^2\eta+(z-\zeta)\,d^2\zeta=ds^2-\mathrm{R}\,d^2\mathrm{R}-d\mathrm{R}^2,\\
&(x-\xi)\,d^3\xi+(y-\eta)\,d^3\eta+(z-\zeta)\,d^3\zeta=3\,ds\,d^2s-\mathrm{R}\,d^3\mathrm{R}-3\,d\mathrm{R}\,d^2\mathrm{R},
\end{aligned}
$$

où l'on a fait

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=ds^2.$$

Puis, si l'on différentie une fois chacune des deux premières équations du groupe (2), en tenant compte de la suivante, et si l'on élimine dx, dy, dz entre les deux équations obtenues et la deuxième équation du groupe (1), on trouve l'équation du plan osculateur à la courbe S. D'ailleurs, les deux premières équations du groupe (2) montrent que le point x, y, z est le point de contact de la caractéristique de la sphère considérée avec son enveloppe; donc : *Pour que la sphère mobile soit osculatrice à la courbe* C', *il est nécessaire que le point de contact de sa caractéristique avec son enveloppe soit dans le plan osculateur à la courbe* S, *lieu des centres.*

Cette condition est suffisante, car la caractéristique d'une telle sphère est dans un plan perpendiculaire à la tangente, au point ξ, η, ζ, à la courbe S. Une seconde sphère, infiniment voisine de la première, la coupe suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres. Il s'ensuit que la caractéristique de la sphère touche, en général, son enveloppe en deux points, symétriques par rapport au plan osculateur à la courbe S, au point ξ, η, ζ. Si l'un de ces deux points de contact est situé dans ce plan, l'autre y est également situé. Ces deux points sont alors confondus en un seul, et en ce point unique sont confondus quatre points appartenant à la sphère et à l'enveloppe de ses caractéristiques.

2. Il résulte aussi, de la démonstration précédente, que la ligne d'intersection des plans, définis par les deux premières équations du groupe (2), doit être tangente à la sphère; car, sur cette droite, se trouvent les deux points de contact de la sphère avec l'enveloppe de ses caractéristiques. Nous allons exprimer analytiquement cette condition.

Tout plan passant par cette droite est représenté par une équation de la forme

$$\begin{aligned}(x-\xi)\,d^2\xi + (y-\eta)\,d^2\eta + (z-\zeta)\,d^2\zeta - ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2 \\ + du[(x-\xi)\,d\xi + (y-\eta)\,d\eta + (z-\zeta)\,d\zeta + \mathrm{R}\,d\mathrm{R}] = 0,\end{aligned}$$

du désignant un paramètre infiniment petit du premier ordre. Pour que ce plan soit tangent à la sphère, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned}&(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,du)^2 \\ &\quad = \mathrm{R}^2[(d^2\xi + du\,d\xi)^2 + (d^2\eta + du\,d\eta)^2 + d^2\zeta + du\,d\zeta)^2].\end{aligned}$$

Désignons par $d\sigma$ l'angle de contingence de la courbe S; l'équation précédente se transformera comme il suit :

$$\mathrm{R}^2(d\mathrm{R}^2 - ds^2)\,du^2 + 2\mathrm{R}[(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)\,d\mathrm{R} - \mathrm{R}\,ds\,d^2s]\,du$$
$$+ (-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)^2 - \mathrm{R}^2[ds^2\,d\sigma^2 + (d^2s)^2] = 0.$$

Pour que la droite considérée soit tangente à la sphère, il faut que les deux plans tangents, répondant aux deux racines de cette équation, soient confondus, c'est-à-dire que

$$[(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)\,d\mathrm{R} - \mathrm{R}\,ds\,d^2s]^2$$
$$- (d\mathrm{R}^2 - ds^2)\,[(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)^2 - \mathrm{R}^2\,ds^2\,d\sigma^2 - \mathrm{R}^2(d^2s)^2] = 0$$

ou

$$(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)^2\,ds^2$$
$$- 2\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,ds\,d^2s(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2) + \mathrm{R}^2(d\mathrm{R}^2 - ds^2)\,ds^2\,d\sigma^2 + \mathrm{R}^2\,d\mathrm{R}^2(d^2s)^2 = 0,$$

ou encore

$$(a) \qquad [(-ds^2 + \mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2)\,ds - \mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,d^2s]^2 = \mathrm{R}^2(ds^2 - d\mathrm{R}^2)\,ds^2\,d\sigma^2.$$

Or, entre les variables s et σ, il y a une relation connue, qu'on peut écrire comme il suit :

$$ds = \mathrm{F}(\sigma)\,d\sigma$$

$[\mathrm{F}(\sigma)$ est l'expression du rayon de courbure de la courbe S$]$. En vertu de cette relation, l'équation précédente peut être regardée comme une équation différentielle du second ordre entre R et s ou entre R et σ. Nous nous proposons d'intégrer cette équation.

3. A cet effet, posons

$$(3) \qquad \mathrm{R}\,d\mathrm{R} = \lambda\,ds.$$

Nous en déduisons

$$\mathrm{R}\,d^2\mathrm{R} + d\mathrm{R}^2 = \lambda\,d^2s + ds\,d\lambda,$$

et nous transformons l'équation proposée comme il suit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\sigma} - \frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \mathrm{R}^2 - \lambda^2.$$

Adoptons σ comme variable indépendante, et différentions l'équation ci-dessus; nous trouvons

$$\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}-\frac{ds}{d\sigma}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}-\frac{d^2 s}{d\sigma^2}\right)=\frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}-\lambda\,d\lambda}{d\sigma}=\lambda\left(\frac{ds}{d\sigma}-\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}+\lambda=\frac{d^2 s}{d\sigma^2}$$

ou

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}+\lambda=\mathrm{F}'(\sigma).$$

On est ramené, de la sorte, à intégrer une équation différentielle linéaire du second ordre. L'équation, sans second membre,

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}+\lambda=0$$

étant à coefficients constants, on trouve immédiatement son intégrale générale

$$\lambda=\mathrm{U}\cos\sigma+\mathrm{V}\sin\sigma,$$

U, V désignant des constantes arbitraires. Pour appliquer à l'équation proposée la méthode de la *variation des constantes,* regardons, dans la formule ci-dessus, U, V comme des fonctions de σ, assujetties à remplir la condition

$$\cos\sigma\frac{d\mathrm{U}}{d\sigma}+\sin\sigma\frac{d\mathrm{V}}{d\sigma}=0,$$

ce qui revient à faire

$$\mathrm{U}=\int_{\sigma_1}^{\sigma}\omega\sin\sigma\,d\sigma,\qquad \mathrm{V}=-\int_{\sigma_2}^{\sigma}\omega\cos\sigma\,d\sigma$$

et

$$\lambda=\cos\sigma\int_{\sigma_2}^{\sigma}\omega\sin\sigma\,d\sigma-\sin\sigma\int_{\sigma_1}^{\sigma}\omega\cos\sigma\,d\sigma.$$

La substitution de cette valeur de λ, dans l'équation que nous voulons intégrer, donne

$$\omega=-\mathrm{F}'(\sigma)$$

et, par suite,

$$\lambda=\sin\sigma\int_{\sigma_1}^{\sigma}\mathrm{F}'(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma-\cos\sigma\int_{\sigma_2}^{\sigma}\mathrm{F}'(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma, \tag{4}$$

σ_1, σ_2 désignant deux constantes arbitraires.

4. Il reste à exprimer R en fonction de σ. Or l'équation (3) équivaut à

$$(5) \qquad R^2 - R_0^2 = 2\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda\, ds = 2\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda\, F(\sigma)\, d\sigma,$$

et nous avons à établir la loi suivant laquelle deux des quatre constantes R_0, σ_0, σ_1, σ_2 dépendent de deux constantes arbitraires seulement.

A cet effet, écrivons l'équation (4) comme il suit :

$$\begin{aligned}\lambda = {} & \sin\sigma \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - \cos\sigma \int_{\sigma_2}^{\sigma_0} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma \\ & + \sin\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - \cos\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma.\end{aligned}$$

Écrivons aussi les identités

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma = [\cos\sigma\, F(\sigma)]_{\sigma_0}^{\sigma} + \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma,$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma = [\sin\sigma\, F(\sigma)]_{\sigma_0}^{\sigma} - \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma;$$

nous trouverons

$$\begin{aligned}\lambda = {} & \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\cos\sigma_0\right]\sin\sigma \\ & - \left[\int_{\sigma_2}^{\sigma_0} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\sin\sigma_0\right]\cos\sigma \\ & + \sin\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma + \left[\cos\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma\right],\end{aligned}$$

puis,

$$(6) \qquad \lambda = A\sin\sigma + B\cos\sigma + \sin\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma + \cos\sigma \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma,$$

en faisant

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\cos\sigma_0 = \quad A,$$

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_0} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\sin\sigma_0 = -B.$$

Donc l'expression de R^2 est de la forme

$$R^2 = R_0^2 + 2A\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma + 2B\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma$$
$$+ 2\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma\right]d\sigma$$
$$+ 2\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma\right]d\sigma$$

ou bien

$$R^2 = R_0^2 + 2A\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma$$
$$+ 2B\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma\right]^2.$$

Mais l'expression cherchée doit vérifier l'équation

$$(d\lambda - ds)^2 = (R^2 - \lambda^2)\,d\sigma^2,$$

où l'on remplace λ par le second membre de l'équation (6). Donc on doit trouver, quel que soit σ,

$$\left[A\cos\sigma - B\sin\sigma + \cos\sigma\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma + \sin\sigma\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma\right]^2$$
$$= R_0^2 + 2A\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma + 2B\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma$$
$$+ \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma\right]^2$$
$$- \left[A\sin\sigma + B\cos\sigma + \sin\sigma\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma + \cos\sigma\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma\right]^2,$$

ou bien, après réductions,

$$R_0^2 = A^2 + B^2.$$

L'expression de R^2 que nous cherchons est donc

$$R^2 = \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\,d\sigma + A\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\,d\sigma + B\right]^2. \tag{8}$$

et l'on peut même, sans altérer sa généralité, supposer $\sigma_0 = 0$.

5. La formule (8) que nous venons d'établir donne immédiatement la solution de deux questions importantes qui se rattachent à la théorie des courbes et des surfaces. Mais ces questions ont déjà été traitées par Serret, *Sur les trajectoires orthogonales d'un plan mobile* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLV, p. 1252 et suiv.); aussi nous donnerons quelques indications sommaires sur la manière dont nous nous proposons de les résoudre, et nous y ajouterons seulement quelques développements géométriques, se rattachant à l'interprétation de la formule (8).

Les problèmes, dont on doit la solution à Serret, sont les suivants :

I. *Trouver les trajectoires orthogonales des plans, osculateurs à une courbe donnée.*

II. *Trouver les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes, le plan qui contient chacune d'elles étant normal à la surface, en chaque point de la section.*

I. On sait que les courbes C sont les trajectoires orthogonales des plans osculateurs à la courbe S. Aussi, pour exprimer les coordonnées d'un point, mobile sur la courbe C, il suffira de remplacer R par l'expression tirée de la formule (8), soit dans les équations (2), soit dans le système formé de deux d'entre elles et de l'équation du plan osculateur à la courbe donnée.

II. Dans les équations d'une courbe C, ainsi définie, considérons les paramètres A, B, comme dépendant d'un paramètre arbitraire α, par les équations

$$A = f_1(\alpha), \qquad B = f_2(\alpha).$$

Remplaçons A, B par ces deux dernières expressions, puis concevons qu'on élimine σ, α entre les équations de la courbe. Nous obtiendrons une surface U remplissant les conditions du problème; car, tout le long de la section Σ faite sur cette surface par un plan osculateur à la courbe S, la normale à Σ sera également normale à C.

6. Voici maintenant l'interprétation géométrique de la formule (8). Imaginons un plan qui roule sur la surface développable dont l'arête de rebroussement est S. Pour un observateur entraîné dans le mouvement de ce plan, la surface paraîtra mobile, et les divers points de la courbe S viendront s'appliquer en des points du plan dont le lieu est une courbe définie

par rapport à des axes convenablement choisis, par les équations

$$x = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \cos\sigma \, d\sigma, \qquad y = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \sin\sigma \, d\sigma$$

(ceci résulte immédiatement de la théorie des surfaces applicables).

Pour ce même observateur, la sphère que nous avons étudiée occupera une série de positions, constituant un faisceau de sphères, dont l'équation est

$$\left[x - \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \cos\sigma \, d\sigma\right]^2 + \left[y - \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \sin\sigma \, d\sigma\right]^2 + z^2$$
$$= \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \cos\sigma \, d\sigma + B\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \sin\sigma \, d\sigma + A\right]^2.$$

Toutes les sphères du faisceau passeront par un point fixe ayant pour coordonnées $-B$, $-A$, o.

7. Au moment de terminer la rédaction des recherches analytiques qui précèdent, l'auteur recevait de M. Cesàro, professeur à l'Université de Palerme, une Lettre où l'éminent géomètre italien exposait une solution géométrique très simple du problème qui a été résolu dans les premiers paragraphes de ce travail. L'idée fondamentale de cette démonstration consistait à observer que, si l'on fait rouler un plan sur la développable dont je viens de parler, toute trajectoire orthogonale de ce plan se projettera sur celui-ci suivant un point, et, par conséquent, les sphères cherchées forment un faisceau passant par un point fixe, leurs centres se mouvant sur la courbe S *planifiée*. De cette idée découlent diverses conséquences intéressantes, dont l'une, au moins, est facile à vérifier par le calcul.

1° *Si un plan roule sur une surface développable, les points de ce plan qui décrivent ses trajectoires orthogonales forment sur celui-ci des figures invariables.*

2° *Les sections, faites sur les surfaces de Serret par ces divers plans, sont les positions qu'occupe une courbe, fixe dans le plan mobile.*