REMARQUE

SUR UN

POINT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. G. KŒNIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.

Soit $\mathcal{F}(z \mid z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$ un polynôme en $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ de degré m dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de z. Si nous faisons, dans $\mathcal{F}$, $z_1 = \zeta(z - a_1)$, $z_2 = \zeta(z - a_2)$, …, $z_\nu = \zeta(z - a_\nu)$, où $\zeta(z)$ désigne la fonction elliptique de seconde espèce, et $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ des constantes, on obtient une fonction uniforme de z

$$\mathrm{F}(z) = \mathcal{F}[z \mid \zeta(z - a_1), \zeta(z - a_2), \ldots, \zeta(z - a_\nu)].$$

Je dis que, si $\mathrm{F}(z)$ *n'a pas de pôle à distance finie, elle se réduit à une constante.*

Soit, en effet, 2Ω une période quelconque, en sorte que

$$\zeta(z + 2\Omega) = \zeta(z) + \mathrm{H},$$

où H est une constante; formons $\mathrm{F}(z + 2\Omega)$; il suffira, dans $\mathcal{F}(z \mid z_1, \ldots, z_\nu)$, de remplacer z_i par $z_i + \mathrm{H}$, ce qui nous donnera

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(z + 2\Omega) &= \mathcal{F}(z \mid z_1 + \mathrm{H}, z_2 + \mathrm{H}, \ldots, z_\nu + \mathrm{H}) \\ &= \mathcal{F}(z \mid z_1, z_2, \ldots, z_\nu) + \mathrm{H}\,\mathcal{F}_1(z \mid z_1, \ldots, z_\nu) + \ldots + \mathrm{H}^m \mathcal{F}_m(z \mid z_1, \ldots, z_\nu).\end{aligned}$$

Le polynôme $\mathcal{F}_i$ est analogue au polynôme $\mathcal{F}$ seulement, il n'est que du degré $(m - i)$ en $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$; posons

$$\mathrm{F}_i(z) = \mathcal{F}_i[z \mid \zeta(z - a_1), \zeta(z - a_2), \ldots, \zeta(z - a_\nu)],$$

et nous aurons

$$\mathrm{F}(z + 2\Omega) = \mathrm{F}(z) + \mathrm{H}\,\mathrm{F}_1(z) + \mathrm{H}^2 \mathrm{F}_2(z) + \ldots + \mathrm{H}^m \mathrm{F}_m(z).$$

Chacune de nos fonctions $\mathrm{F}_i(z)$ dérive du polynôme $\mathcal{F}_i$, de même que F dérive du polynôme $\mathcal{F}$.

Le théorème est vrai pour le cas de $m = 0$, car alors $F(z)$ se réduit à une fonction doublement périodique, qui, d'après un théorème de Liouville, admet nécessairement des pôles dans chaque parallélogramme de périodes, à moins de se réduire à une constante. Supposons alors le théorème vrai pour les degrés 0, 1, 2, 3, ..., $(m-1)$ du polynôme $\mathfrak{F}$, et montrons qu'il est vrai pour le cas du degré m.

D'après notre hypothèse, puisque les fonctions $F_i(z)$ dérivent de polynômes de degré inférieur à m, il suffira de prouver que $F_i(z)$ est holomorphe dans tout le plan, pour qu'il demeure acquis que $F_i(z)$ est une constante.

Or, en effet, soient $2\tilde{\omega}$ une période quelconque, $\tilde{\eta}$ la quantité constante, telle que

$$\zeta(z+2\tilde{\omega}) = \zeta(z) + \tilde{\eta}.$$

En faisant $\Omega = \rho\tilde{\omega}$, où ρ est un nombre entier, H devient égal à $\rho\tilde{\eta}$, et l'on a

$$F(z+2\rho\tilde{\omega}) = F(z) + \rho\tilde{\eta}\,F_1(z) + \rho^2\tilde{\eta}^2\,F_2(z) + \ldots + \rho^m\tilde{\eta}^m\,F_m(z).$$

Attribuons à l'entier ρ les valeurs 1, 2, 3, ..., m, nous aurons les m équations

$$\begin{aligned}
F(z+2\tilde{\omega}) - F(z) &= \tilde{\eta}\,F_1(z) + \tilde{\eta}^2\,F_2(z) + \ldots + \tilde{\eta}^m\,F_m(z),\\
F(z+4\tilde{\omega}) - F(z) &= 2\tilde{\eta}\,F_1(z) + 2^2\tilde{\eta}^2\,F_2(z) + \ldots + 2^m\tilde{\eta}^m\,F_m(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F(z+2m\tilde{\omega}) - F(z) &= m\tilde{\eta}\,F_1(z) + m^2\tilde{\eta}^2\,F_2(z) + \ldots + m^m\tilde{\eta}^m\,F_m(z).
\end{aligned}$$

Ces m équations linéaires en $\tilde{\eta}\,F_1(z)$, $\tilde{\eta}^2\,F_2(z)$, ..., $\tilde{\eta}^m\,F_m(z)$ permettent toujours de tirer les valeurs de ces m quantités, car le déterminant de ces équations est le déterminant de Vandermonde, formé avec les m premiers nombres entiers. Nous aurons donc, pour $F_i(z)$, une expression, telle que

$$\begin{aligned}
F_i(z) = {} & A_{i,1}[F(z+2\tilde{\omega}) - F(z)]\\
& + A_{i,2}[F(z+4\tilde{\omega}) - F(z)] + \ldots + A_{i,m}[F(z+2m\tilde{\omega}) - F(z)],
\end{aligned}$$

où les $A_{i,\alpha}$ sont des constantes. Les fonctions $F(z)$, $F(z+2\tilde{\omega})$, ..., $F(z+2m\tilde{\omega})$ sont, par hypothèse, holomorphes dans tout le plan, donc $F_i(z)$ est holomorphe dans tout le plan. Il est ainsi acquis que $F_i(z)$ est une constante.

Mais, puisque F_1, F_2, ..., F_m se réduisent à des constantes C_1, C_2, ...,

C_m, on aura, pour toute période 2Ω,

$$F(z+2\Omega)-F(z)=C_1H+C_2H^2+\ldots+C_mH^m=f(H).$$

Faisons $\Omega=\rho\varpi$ où 2ϖ est une période; H devient $\rho\bar{\eta}$, comme on a déjà vu, et, par conséquent,

$$F(z+2\rho\varpi)-F(z)=f(\rho\bar{\eta}).$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned}
F(z+2\varpi)\ &-F(z) &&=f(\bar{\eta}),\\
F(z+4\varpi)\ &-F(z+2\varpi) &&=f(\bar{\eta}),\\
F(z+6\varpi)\ &-F(z+4\varpi) &&=f(\bar{\eta}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F(z+2\rho\varpi)&-F[z+2(\rho-1)\varpi]&&=f(\bar{\eta});
\end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$F(z+2\rho\varpi)-F(z)=\rho f(\bar{\eta}).$$

On a donc, pour tout entier ρ,

$$f(\rho\bar{\eta})=\rho f(\bar{\eta}).$$

Comme $f(\lambda)$ est un polynôme du degré m en λ, cela exige que ce polynôme se réduise à son terme du premier degré.

On a donc

$$f(\lambda)=C_1\lambda,$$

c'est-à-dire que l'on a, pour toute période,

$$F(z+2\Omega)-F(z)=C_1H.$$

Considérons la fonction

$$G(z)=F(z)-C_1\zeta(z).$$

On a

$$\begin{aligned}
G(z+2\Omega)&=F(z+2\Omega)-C_1\zeta(z+2\Omega)\\
&=F(z)+C_1H-C_1[\zeta(z)+H]=F(z)-C_1\zeta(z)=G(z).
\end{aligned}$$

La fonction $G(z)$ est donc doublement périodique. Elle n'admet, du reste, qu'un pôle unique simple dans chaque parallélogramme, à savoir le pôle de $\zeta(z)$, pourvu toutefois que C_1 ne soit pas nul. On voit ainsi que C_1 doit être nul, car il ne peut exister de fonction uniforme doublement périodique n'admettant qu'un pôle simple unique dans chaque parallélogramme. Mais, si C_1 est nul, $F(z)$ est elle-même doublement périodique, et, par suite, comme elle est holomorphe dans tout le plan, c'est une constante.

Il est ainsi prouvé que l'on peut passer du cas des degrés 0, 1, 2, ..., $(m-1)$ du polynôme $\mathfrak{F}$ au cas du degré m. Comme la proposition est vraie dans le cas du degré zéro, elle est donc vraie pour les degrés 1, 2, ... et finalement pour un degré quelconque.

Remarque. — On savait déjà que toute fonction entière de fonctions, telles que $p(z-a_1)$, $p(z-a_2)$, ..., et de leurs dérivées se réduit à une constante du moment qu'elle est holomorphe dans tout le plan. Le théorème précédent prouve que la même chose a lieu si la fonction est entière par rapport aux intégrales premières $-\zeta(z-a_1)$, $-\zeta(z-a_2)$, ... des fonctions $p(z-a_1)$, $p(z-a_2)$, ...

Ce théorème permet évidemment de simplifier l'établissement de plusieurs formules de la théorie des fonctions elliptiques : par exemple, la formule fondamentale bien connue

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}.$$

Il faut cependant observer qu'il ne suffit pas d'exprimer que la fonction $F(z)$ est dénuée de pôles dans un parallélogramme donné.

Prenons, par exemple, la fonction

$$F(z)=p(z)-[\zeta(z)]^2,$$

elle est dénuée de pôle dans tout parallélogramme de périodes qui comprend l'origine; car, pour $z=0$, elle reste finie bien que $p(z)$ et $\zeta(z)$ soient infinis. Mais changeons z en $z+2m\tilde{\omega}$, nous aurons

$$F(z+2m\tilde{\omega})=p(z)-[\zeta(z)+m\tilde{\eta}]^2=p(z)-[\zeta(z)]^2+m^2\tilde{\eta}^2-2m\tilde{\eta}\,\zeta(z),$$

ce qui prouve que $F(z)$ admet comme pôles simples tous les points homologues de l'origine bien qu'elle soit finie pour l'origine elle-même. Avec un peu d'attention, on reconnaît qu'une fonction, telle que $F(z)$, ne peut demeurer finie que dans un nombre limité de parallélogrammes correspondant à un *couple primitif* donné de périodes.