DES

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDROSTATIQUE [1],

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

I. — *Introduction.*

1. Les principes fondamentaux de l'Hydrostatique sont trop connus pour qu'il puisse être question, dans un écrit relatif à ces principes, de découvrir de nouvelles propriétés des fluides en équilibre. Le seul but que l'on puisse se proposer est de relier ces propriétés d'une manière précise et rigoureuse au principe qui domine la Statique tout entière, c'est-à-dire au *principe des mouvements virtuels*.

Je n'ai pas besoin de rappeler comment Lagrange, dans la *Mécanique analytique,* a montré le premier que le principe des mouvements virtuels renfermait toute l'Hydrostatique, précisant ainsi ce que Pascal avait déjà indiqué dans le *Traité de l'Équilibre des liqueurs*. De nos jours, M. J. Moutier ([2]) a ajouté à l'analyse de Lagrange un perfectionnement important; il a montré qu'en vertu du principe des mouvements virtuels, la pression devait être normale à l'élément sur lequel elle agit, proposition qu'avant lui on admettait comme une hypothèse indépendante du principe des vitesses virtuelles. C'est de la méthode de M. Moutier que nous nous sommes inspirés dans ce travail.

Avant de chercher à déduire du principe des mouvements virtuels l'ensemble des lois de l'Hydrostatique, nous allons rappeler brièvement l'énoncé de ce principe.

2. On sait que l'on donne le nom de *déformation virtuelle* d'un système matériel à toute déformation infiniment petite compatible avec les liaisons

([1]) Leçons professées à la Faculté des Sciences de Lille en 1888.
([2]) J. Moutier, *Cours de Physique,* t. I.

de ce système. Lorsqu'un système subit une déformation virtuelle, chacun de ses points subit un déplacement qui porte le nom de *mouvement virtuel* de ce point.

Considérons un premier mouvement par lequel un point matériel passe d'une position initiale (x, y, z) à une position finale infiniment voisine $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$; puis un second mouvement par lequel le même point matériel passe de la même position initiale à la position finale $(x - \delta x, y - \delta y, z - \delta z)$; ces deux mouvements sont dits *inverses* l'un de l'autre; deux déformations infiniment petites sont inverses l'une de l'autre lorsque les mouvements qui composent l'une sont respectivement inverses des mouvements qui composent l'autre.

Lorsque la déformation inverse d'une déformation virtuelle est elle-même une déformation virtuelle, chacune d'elles est dite *réversible*. Il existe des systèmes dont toute déformation virtuelle est réversible : tel est, par exemple, le système formé par deux points matériels assujettis à demeurer à une distance invariable l'un de l'autre. On dit alors que ces systèmes ne renferment que des liaisons *à résistance bilatérale*. D'autres systèmes (1) admettent des déformations virtuelles non réversibles. Par exemple, dans un système formé par deux points matériels que réunit un fil flexible et inextensible, on peut faire que la distance mutuelle qui sépare ces deux points lorsque le fil est tendu diminue d'une quantité infiniment petite; on impose alors au système une déformation non réversible. Lorsqu'un système admet des déformations virtuelles non réversibles, on dit qu'il renferme des liaisons *à résistance unilatérale*.

Le principe des mouvements virtuels s'énonce de la manière suivante : *Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que, dans toute déformation virtuelle de ce système, la somme des travaux effectués par les forces données* (2) *soit nulle ou négative*. Il est évident que cette somme ne peut être que nulle lorsque la déformation considérée est réversible (3).

---

(1) Cette distinction est due à Gauss (*Gauss Werke*, t. V, p. 27. *Voir* aussi C. Neumann, *Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen*, Leipzig, *Berichte Math. Phys.*, t. XXI, p. 257; 1880). Les dénominations employées sont dues à M. Clausius (*La fonction potentielle et le potentiel*, trad. Folie, p. 106) qui a exposé d'une manière très précise les idées de Gauss sur le principe des mouvements virtuels.

(2) Le mot *force donnée* s'oppose ici à *force de liaison*.

(3) Sur cet énoncé du principe des mouvements virtuels, *voir* Gauss, *Werke*, t. V, p. 27 et 35; Sturm, *Mécanique;* Clausius, *La fonction potentielle et le potentiel*, trad. Folie, p. 108; C. Neumann, *Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrucküngen*.

Ce principe ainsi énoncé ne conduit à des conséquences exactes que si les liaisons imposées au système n'entraînent aucun *frottement*. Dans le cas où l'on admet l'existence du frottement, on doit regarder les conditions d'équilibre fournies par le principe des mouvements virtuels comme demeurant toujours suffisantes, mais comme n'étant plus nécessaires.

3. Dans un grand nombre de cas, la force donnée qui agit sur un point matériel quelconque (x, y, z) du système est déterminée en grandeur et en direction par les égalités

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y},$$
$$Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

X, Y, Z étant les composantes suivant les axes coordonnés de la force en question, et U une fonction uniforme de x, y, z. La fonction U prend alors le nom de *fonction des forces*.

Il arrive aussi, dans un grand nombre de cas, que l'on peut écrire, pour toute modification virtuelle du système, l'égalité suivante

$$\sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = -\,\delta\Omega,$$

$\delta\Omega$ désignant la variation que subit, par l'effet de la déformation virtuelle considérée, une certaine fonction Ω déterminée d'une manière uniforme lorsqu'on connaît les coordonnées de tous les points du système. On dit alors que le système admet un *potentiel,* et que Ω est ce potentiel.

Lagrange a énoncé sur les systèmes qui admettent un potentiel une importante proposition, qui a été ensuite rattachée d'une manière rigoureuse aux principes de la Dynamique par Lejeune-Dirichlet ([1]). Cette proposition est la suivante :

Si un système admet un potentiel et si, pour un certain état du système, ce potentiel présente un minimum, cet état est un état d'équilibre stable.

Telles sont les propositions de Mécanique dont il nous était nécessaire de

([1]) LEJEUNE-DIRICHLET, *Journal de Crelle*, t. XXXII, p. 85; 1846.

rappeler l'énoncé avant d'aborder l'exposé des principes de l'Hydrostatique.

II. — *Définitions.*

4. Considérons un corps remplissant un certain volume. En un point M, de coordonnées x, y, z, ce corps a une certaine densité ρ, en sorte que la masse d'un élément de volume dv renfermant le point M à son intérieur a pour valeur $\rho\, dv$. Cette densité ρ peut être la même quel que soit le point M; le corps est alors *homogène*. Elle peut aussi varier d'un point à un autre; le corps est alors *hétérogène*. Dans ce dernier cas, nous supposerons ou bien que la densité ρ est une fonction continue de x, y, z, ou bien qu'elle est discontinue en tous les points de certaines surfaces.

Envisageons un élément du corps : tout déplacement, toute déformation du corps doit laisser sa masse constante; mais son volume et partant sa densité peuvent dépendre des circonstances dans lesquelles il se trouve placé. Le corps est dit alors *compressible*. Il est *incompressible* si chacun de ses éléments de masse garde un volume invariable.

Un corps auquel on peut imposer tous les déplacements virtuels, toutes les déformations virtuelles qui laissent invariable le volume de chacun de ses éléments de masse est dit *fluide;* le fluide est incompressible si ces déformations virtuelles sont les seules qu'on puisse lui imposer; il est, au contraire, compressible si l'on peut lui imposer certaines déformations virtuelles qui fassent varier le volume de ses éléments de masse.

Un fluide peut être en contact par une partie de sa surface avec un solide invariable. Dans ce cas, on ne pourra lui imposer que des modifications virtuelles laissant invariable la forme de sa surface de contact avec le solide.

Nous ne traiterons pas dans cet écrit de l'équilibre d'un système formé par un fluide et un solide variable de position en contact avec ce fluide. L'étude de cet équilibre constitue le problème des *corps flottants*.

Nous admettrons qu'un fluide peut être soumis à deux sortes de forces :

1° Des forces appliquées à ses divers éléments de masse; si dv est le volume d'un semblable élément, et ρ la densité en un point de cet élément, nous désignerons les composantes de la force qui agit sur cet élément par $\rho X\, dv$, $\rho Y\, dv$, $\rho Z\, dv$. X, Y, Z pourront être des fonctions continues des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément dv, ou bien, comme la densité ρ, présenter des surfaces de discontinuité;

2° Des forces appliquées aux divers éléments de la partie déformable de la surface qui limite le fluide, ou plutôt aux divers éléments d'une membrane infiniment mince et parfaitement flexible, de densité arbitraire, qui serait appliquée sur cette surface. Si $d\omega$ désigne l'aire de l'un des éléments dont il s'agit, et $P\,d\omega$ la force qui s'exerce sur cet élément, nous dirons que P est la *grandeur de la pression* en un point de l'élément $d\omega$. La direction de la force $P\,d\omega$ sera la *direction* de cette pression.

Nous allons chercher à quelles conditions un fluide soumis à ces deux classes de forces peut être en équilibre.

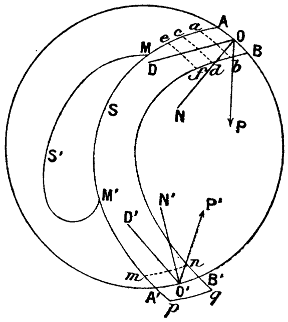
III. — *Conditions d'équilibre.*

5. Si nous imaginons un fluide en équilibre, sa densité en chaque point a une valeur déterminée. Nous pouvons supposer que l'on impose à ce fluide une déformation virtuelle dans laquelle chacun des éléments de masse, tout en étant déplacé et déformé, gardera sa densité et partant son volume. Si le fluide est incompressible, les déformations virtuelles de ce genre seront seules possibles, et nous obtiendrons toutes les conditions d'équilibre en appliquant le principe des mouvements virtuels à tous les déplacements de cette sorte que l'on peut imaginer. Si le fluide est compressible, la classe de déformations virtuelles que nous venons de définir ne comprend plus tous les déplacements virtuels possibles, car on pourra en imaginer d'autres dans lesquels le volume des éléments de masse déplacés subit des variations; en appliquant donc le principe des mouvements virtuels à toutes les déformations de la première classe, nous obtiendrons encore, dans le cas des fluides compressibles, des conditions d'équilibre, mais nous pouvons fort bien ne pas les obtenir toutes. Nous n'envisagerons pour le moment que le cas des fluides incompressibles; nous reviendrons plus loin sur le cas des fluides compressibles.

6. Sur la surface déformable d'un fluide, prenons deux éléments : l'un, AB (*fig.* 1) de surface ω; l'autre, A'B' de surface ω'. De l'élément AB à l'élément A'B' traçons un canal infiniment délié, de forme quelconque, compris en entier à l'intérieur du fluide. Ce canal est tracé de la manière suivante. On joint un point du contour de AB à un point du contour de A'B' par une ligne continue présentant une tangente en chaque point, sauf peut-être en un nombre limité de points séparés les uns des autres par des lon-

gueurs finies. On prend une surface qui soit la projection de AB sur un plan normal à la courbe au point où elle rencontre AB. On imagine que cette surface se déplace, de manière qu'un des points θ de son contour décrive la

Fig. 1.



courbe et qu'elle reste normale à la courbe, et, en même temps, qu'elle se déforme d'une manière continue en restant infiniment petite. Lorsque le point θ arrive en un point où l'orientation de la tangente à la courbe subit une discontinuité, on suppose que la surface tourne autour du point θ jusqu'à être devenue normale au nouvel arc de courbe. Enfin la déformation de la surface est telle qu'elle devienne à la fin la projection de A′B′ sur un plan normal à la courbe.

Dans cet écrit, le mot *génératrice du canal* s'applique à la courbe en question. Prolongeons les génératrices du canal que nous venons de tracer d'une longueur infiniment petite au delà de l'élément A′B′. Par des sections infiniment voisines les unes des autres, ab, cd, ef, ..., mn, partageons ce canal en tranches d'égal volume; au delà de A′B′ menons une dernière section pq, telle que le volume compris entre A′B′ et pq soit égal au volume de chacune des tranches précédentes.

Cela étant, imposons au fluide une déformation définie de la manière suivante : le fluide qui occupait la tranche ABab vient occuper la tranche $abcd$; le fluide qui occupait cette dernière tranche vient occuper la tranche $cdef$, et ainsi de suite jusqu'à ce que le fluide de la tranche mnA′B′ soit refoulé dans la tranche A′B′pq.

Dans cette déformation, la masse fluide qui occupe chaque tranche change de forme et de position sans changer de volume, en sorte que la restriction que nous sommes convenus d'imposer aux modifications virtuelles est respectée; en outre, la modification virtuelle que nous venons de considérer est une modification réversible; car, en reprenant le système dans son état initial, on pourrait, au lieu d'imposer à chacune de ses parties le déplacement qu'elle a subi dans la modification précédente, lui imposer un déplacement inverse. Par conséquent, la somme des travaux effectués durant cette déformation par toutes les forces données appliquées au fluide doit, pour l'équilibre, être égale à O.

Calculons cette somme :

Soit dv le volume de l'une quelconque des tranches en lesquelles le filet a été partagé. Soit ρ la densité en un point d'une de ces tranches, de la tranche *cdef* par exemple. La force qui agit sur cette tranche élémentaire a pour composantes $\rho X\,dv$, $\rho Y\,dv$, $\rho Z\,dv$. Désignons par dx, dy, dz les projections sur les axes de coordonnées de la longueur infiniment petite comprise entre le point d'application de la force qui agit sur la tranche *cdef* et le point d'application de la force qui agit sur la tranche suivante. Le travail de la force que nous venons de considérer sera

$$\rho\,dv(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Pour obtenir le travail des forces appliquées aux divers éléments de volume du fluide, nous aurons à faire la somme d'autant de termes analogues à celui-là qu'il y a de tranches entre AB et A'B'. Cette somme aura pour valeur

$$dv\int \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

l'intégrale étant une intégrale curviligne étendue à une ligne qui passe par tous les points d'application des forces qui sollicitent les éléments de volume du canal considéré. On peut, si l'on veut, supposer que cette intégrale s'étend à une génératrice ASA' du canal, génératrice qui diffère infiniment peu de la ligne précédente.

Prenons un point O sur l'élément AB; par ce point, menons une parallèle OP à la direction de la pression en un point de l'élément AB, une normale ON à l'élément AB, normale dirigée vers l'intérieur du fluide, enfin une parallèle OD à la tangente en A à la ligne AA', cette tangente étant menée également vers l'intérieur du fluide.

Prenons de même un point O' sur l'élément A'B'. Par ce point menons une parallèle O'P' à la direction de la pression en un point de l'élément A'B', une normale O'N' à la surface A'B', cette normale étant dirigée vers l'intérieur du fluide, enfin une parallèle O'D' à la tangente en A' à la ligne AA', cette tangente étant dirigée également vers l'intérieur du fluide.

La force qui agit sur l'élément $AB = \omega$ a pour valeur $P\omega$. Si nous désignons par ε la longueur dont se déplace le point O, parallèlement à OD, lorsque AB vient en ab, le travail effectué par cette force est

$$P\omega\varepsilon\cos(POD).$$

La force qui agit sur l'élément $A'B' = \omega'$ a pour valeur $P'\omega'$. Si nous désignons par ε' la longueur dont le point O′ se déplace parallèlement à D′O′, lorsque A′B′ vient en pq, le travail effectué par cette force est

$$-P'\omega'\varepsilon'\cos(P'O'D').$$

La somme des travaux de toutes les forces appliquées au liquide est maintenant aisée à former. En égalant cette somme à O, nous trouvons l'égalité

$$P\omega\varepsilon\cos(POD) - P'\omega'\varepsilon'\cos(P'O'D') + dv\int_A^{A'}\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.$$

Cette égalité peut se transformer de la manière suivante :

Si nous désignons par N le dièdre formé par les demi-plans PON, DON, et par N′ le dièdre formé par les demi-plans P′O′N′, D′O′N′, nous aurons

$$\begin{aligned}\cos(POD) &= \cos(PON)\cos(DON) + \sin(PON)\sin(DON)\cos N,\\ \cos(P'O'D') &= \cos(P'O'N')\cos(D'O'N') + \sin(P'O'N')\sin(D'O'N')\cos N'.\end{aligned}$$

D'autre part, nous aurons

$$dv = \omega\varepsilon\cos(DON) = \omega'\varepsilon'\cos(D'O'N').$$

L'égalité précédente deviendra donc, en supprimant le facteur dv,

$$\begin{aligned}(1)\qquad &P[\cos(PON) + \sin(PON)\tan g(DON)\cos N]\\ &-P'[\cos(P'O'N') + \sin(P'O'N')\tan g(D'O'N')\cos N']\\ &+\int_A^{A'}\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.\end{aligned}$$

Telle est l'équation fondamentale que nous allons discuter.

7. Sur la ligne AA′ prenons deux points M et M′. Soit S un point de cette ligne située entre M et M′. La ligne AA′ ayant été choisie à volonté à l'intérieur du fluide, on aurait évidemment pu substituer à l'arc MSM′ un autre

arc $MS'M'$, quel que soit d'ailleurs cet arc, pourvu seulement qu'il soit tout entier situé à l'intérieur du fluide. On aurait pu recommencer les calculs précédents en substituant un canal ayant pour génératrice la ligne $AMS'M'A'$ au canal ayant pour génératrice la ligne $AMSM'A'$. Au lieu de l'équation (1), on aurait obtenu une nouvelle équation dont les deux premiers termes eussent été identiques aux deux premiers termes de l'équation (1). Seulement le troisième terme, au lieu d'être l'intégrale curviligne

$$\int \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

prise le long de la ligne $AMSM'A'$, eût été la même intégrale curviligne prise le long de la ligne $AMS'M'A'$; ces deux intégrales doivent être identiques.

Si, pour abréger, nous désignons l'intégrale curviligne

$$\int \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

prise le long d'une certaine ligne par la seule désignation de cette ligne mise entre parenthèses, nous pourrons écrire, d'après ce qui précède,

$$(AMSM'A') = (AMS'M'A').$$

Mais on a

$$(AMSM'A') = (AM) + (MSM') + (M'A'),$$
$$(AMS'M'A') = (AM) + (MS'M') + (M'A').$$

On a donc

$$(MSM') = (MS'M'),$$

égalité qui peut s'énoncer ainsi :

L'intégrale curviligne

$$\int \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

prise le long d'une ligne quelconque située entièrement à l'intérieur du fluide a une valeur qui peut bien dépendre de la position des extrémités de cette ligne, mais non de sa forme.

Les propriétés connues des intégrales curvilignes permettent de transformer cet énoncé en cet autre :

Il existe une fonction W *de* x, y, z *uniforme, finie et continue en tous* *les points de l'espace occupé par le fluide, telle que l'on ait*

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X &= -\frac{\partial W}{\partial x},\\ \rho Y &= -\frac{\partial W}{\partial y},\\ \rho Z &= -\frac{\partial W}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

ce qui peut encore s'exprimer en disant que les *forces qui agissent sur les particules du fluide admettent une fonction des forces* $-$ W.

Cette première condition, sans laquelle l'équilibre du fluide est impossible, a été, on le sait, découverte par Clairaut [1].

8. Désignons par W la valeur de la fonction $W(x, y, z)$ au point A et par W′ la valeur de la même fonction au point A′. Nous aurons

$$\int_A^{A'} \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = W - W',$$

et l'égalité (1) deviendra

$$(3)\qquad \begin{aligned} &P\,[\cos(PON) + \sin(PON)\;\operatorname{tang}(DON)\;\cos N\,] + W\\ &- P'[\cos(P'O'N') + \sin(P'O'N')\operatorname{tang}(D'O'N')\cos N'] - W' = 0.\end{aligned}$$

La forme de la ligne AA′ est arbitraire; les directions OD, O′D′ sont donc arbitraires. L'égalité (3) doit rester vraie quelles que soient ces deux directions. Ces deux directions dépendent des quatre variables arbitraires (DON), N, (D′O′N′), N′. Les quantités P, P′, W, W′ sont indépendantes de ces variables. Par conséquent, on voit que, si P n'est pas nul, la quantité

$$\cos(PON) + \sin(PON)\operatorname{tang}(DON)\cos N$$

doit être indépendante des angles N et (DON), ce qui exige que l'on ait

$$\sin(PON) = 0,$$

et que, si P′ n'est pas nul, la quantité

$$\cos(P'O'N') + \sin(P'O'N')\operatorname{tang}(D'O'N')\cos N'$$

---

[1] Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre.*

doit être indépendante des angles N′ et (D′O′N′), ce qui exige que l'on ait

$$\sin(P'O'N') = 0.$$

On voit donc que *toute pression qui n'est pas égale à* O *doit être normale à l'élément auquel elle se rapporte.* C'est la proposition démontrée pour la première fois par M. J. Moutier.

Jusqu'ici P et P′ représentaient deux quantités non affectées de signe. Maintenant que nous savons qu'une pression est normale à l'élément auquel elle se rapporte, comptons comme positive une pression dirigée vers l'intérieur du fluide, comme négative une pression dirigée vers l'extérieur. Si nous observons que, dans le premier cas, cos(PON) a pour valeur 1 et que, dans le second cas, cos(PON) a pour valeur − 1, nous voyons sans peine que le produit de la valeur absolue de la pression par cos(PON) est toujours égal à la pression en grandeur et en signe. Moyennant cette remarque, jointe aux résultats précédents, l'égalité (3) peut s'écrire

$$P + W = P' + W', \tag{4}$$

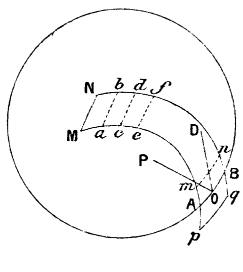
et s'énoncer ainsi :

La somme de la pression et de la fonction $W(x, y, z)$ *a la même valeur en tout point de la surface déformable qui limite le fluide.*

9. La modification virtuelle dont nous avons déduit les résultats précédents était une modification réversible. Nous allons achever de déterminer les conditions d'équilibre en considérant une modification non réversible. Voici comment nous définirons cette modification.

Nous prendrons un filet infiniment délié (*fig.* 2) partant du contour d'un

Fig. 2.



élément de surface MN pris en un point quelconque à l'intérieur du fluide et aboutissant à un élément AB de la surface déformable. Nous prolongerons même ce canal un peu au delà de l'élément AB.

Par des sections infiniment rapprochées les unes des autres, *ab*, *cd*, *ef*, ..., *mn*, nous partagerons ce filet en tranches infiniment petites de même volume. Nous mènerons même au delà de AB une dernière section *pq*, détachant une tranche AB*pq* de même volume que les précédentes. Puis nous amènerons le fluide de la tranche MN*ab* dans la tranche *abcd*, le fluide de cette dernière dans la tranche *cdef*, ... jusqu'au fluide de la tranche *mn*AB qui viendra occuper la tranche AB*pq*.

Dans cette modification, toutes les masses élémentaires qui ont été déplacées ont conservé leur volume, comme dans la modification précédemment étudiée; seulement la continuité du fluide a été détruite; la tranche MN*ab*, pleine avant la modification, est vide après. La nouvelle modification n'est pas réversible; si nous ramenons le système dans l'état où il était avant cette modification, il ne nous sera pas possible de donner ensuite aux diverses parties qui le composent un déplacement inverse de celui que nous leur avons donné dans cette modification, car le fluide de la tranche *ab*MN serait empêché de se mouvoir par le fluide qui environne le filet. Par conséquent, selon la remarque de Gauss, la somme des travaux effectués durant cette modification par les forces qui agissent sur le fluide n'est qu'exceptionnellement égale à O; en général, elle est négative.

Cette somme se compose :

1° Du travail des forces appliquées aux diverses tranches du filet. Si l'on désigne par dv le volume de l'une quelconque de ces tranches, ce travail a pour valeur

$$dv\int_{M}^{A}\rho(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

ou bien, en désignant par W la valeur de la fonction $W(x, y, z)$ en A et par W′ la valeur de la même fonction en M,

$$dv(W'-W).$$

2° Du travail de la force $P\omega$ appliquée à l'élément AB. Soit ε la longueur Ap. Par un point O de AB, menons une normale OP à AB et une parallèle OD à la tangente en A à la courbe MA, ces deux lignes étant dirigées vers l'intérieur du fluide. Le travail de la force $P\omega$ sera

$$-P\omega\varepsilon\cos(\text{POD}),$$

P étant affecté d'un signe conforme à la convention arrêtée précédemment.

Mais $\omega\varepsilon \cos(\mathrm{POD})$ représente le volume dv de la tranche ABpq. En écrivant donc que la somme des travaux virtuels effectués dans la modification considérée est nulle ou négative, on trouve

$$dv(\mathrm{W}' - \mathrm{W} - \mathrm{P}) \leqq 0.$$

Or dv est essentiellement positif. Cette condition peut donc être remplacée par la suivante

$$\mathrm{P} + \mathrm{W} - \mathrm{W}' \geqq 0. \tag{5}$$

Le point M, auquel se rapporte W′, est un point quelconque pris à l'intérieur du fluide; choisissons-le infiniment voisin du point A; $\mathrm{W} - \mathrm{W}'$ deviendra infiniment petit, puisque la fonction W est continue à l'intérieur du fluide, et la condition (5) deviendra

$$\mathrm{P} \geqq 0,$$

ce qui, en vertu de nos conventions sur le signe de la pression, signifie que, *si la pression en un point de la surface déformable d'un fluide en équilibre n'est pas nulle, elle est dirigée vers l'intérieur du fluide*.

D'autre part, désignons par W_0 la plus grande valeur que prenne W à l'intérieur du fluide (en admettant qu'il en existe une), et supposons que le point M soit l'un des points où W atteint la valeur W_0. En vertu de la condition (5), nous devrons avoir

$$\mathrm{P} + \mathrm{W} \geqq \mathrm{W}_0. \tag{6}$$

La valeur constante que la somme de la pression et de la fonction W *prend sur la surface déformable du fluide est au moins égale à la valeur la plus grande que la fonction* W *prenne à l'intérieur du fluide.*

10. Les deux classes de modifications virtuelles que nous venons d'étudier nous ont fourni un certain nombre de conditions d'équilibre. Ces conditions sont nécessaires. Sont-elles suffisantes? Nous allons faire voir que, si l'on impose aux divers éléments de masse du fluide une déformation et un déplacement quelconques qui ne fassent pas varier le volume de ces éléments, le travail effectué durant la modification virtuelle ainsi produite par les di-

verses forces appliquées au fluide est nul ou négatif. Il résultera de là que, si le fluide est incompressible, les conditions que nous avons trouvées suffisent à en assurer l'équilibre.

Soit un point de coordonnées x, y, z pris à l'intérieur du fluide. Dans la modification virtuelle que nous considérons, la particule fluide qui se trouvait initialement au point de coordonnées x, y, z subit un déplacement dont les projections sur les trois axes sont δx, δy, δz. Nous poserons

$$\begin{aligned}\delta x &= u\,\delta t,\\ \delta y &= v\,\delta t,\\ \delta z &= w\,\delta t,\end{aligned}$$

δt étant une quantité infiniment petite qui a une même valeur positive pour tous les points du système. Nous nous restreindrons à l'étude des déformations dans lesquelles chacune des trois quantités u, v, w est une fonction de x, y, z uniforme, finie, continue, admettant des dérivées partielles du premier ordre en tous les points de l'espace occupé par le fluide.

Considérons un élément de masse du fluide. Avant une modification quelconque, il occupe un volume

$$d\varpi = dx\,dy\,dz.$$

Il est facile de voir qu'après la modification il occupe un volume

$$d\varpi + \delta\,d\varpi = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right] dx\,dy\,dz,$$

en sorte que l'on a

$$(7) \qquad \delta\,d\varpi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\,dx\,dy\,dz.$$

Démontrons cette proposition.

Soit σ une surface fermée qui se déforme et vient en σ'. Son volume θ augmente de

$$\delta\theta = \delta\int\int\int dx\,dy\,dz.$$

On peut l'évaluer autrement. L'élément $d\sigma$ vient en $d\sigma'$. Si ε est la distance normale des deux éléments comptée positivement lorsque $d\sigma'$ est à l'extérieur de la surface σ, il est facile de voir que

$$\delta\theta = \mathbf{S}\,\varepsilon\, d\sigma.$$

Mais on a, en désignant par n la normale intérieure à la surface,

$$\varepsilon = -\,\delta t[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)].$$

On a donc

$$\delta\theta = -\,\delta t\,\mathbf{S}[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\sigma.$$

Or

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\sigma\\ &\qquad = -\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

On a donc, en égalant les deux expressions de $\delta\theta$,

$$\delta\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz = \delta t\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Si l'intégration s'étend au volume $dx\,dy\,dz$ lui-même, on trouve

$$\delta\,dx\,dy\,dz = \delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

C. Q. F. D.

Si, comme nous le supposons, chaque élément de masse garde dans la modification un volume invariable, nous aurons, en vertu de l'équation (7),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Dans la déformation considérée, les forces appliquées au fluide qui remplit l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ effectuent un travail

$$(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Si l'on remplace X, Y, Z, au moyen des égalités (2), par leur expression en fonction de W, ce travail peut s'écrire

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial x}u+\frac{\partial W}{\partial y}v+\frac{\partial W}{\partial z}w\right)\delta t\,dx\,dy\,dz,$$

et la somme des travaux des forces appliquées aux éléments de masse du fluide a pour valeur

$$-\delta t\int\int\int\left(\frac{\partial W}{\partial x}u+\frac{\partial W}{\partial y}v+\frac{\partial W}{\partial z}w\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume entier du fluide.

Désignons par (n, x), (n, y), (n, z) les angles que fait avec les directions positives des axes coordonnés la normale à l'un des éléments $d\omega$ de la surface déformable, cette normale étant dirigée vers l'intérieur du fluide. Les composantes de la force qui agit sur l'élément $d\omega$ sont

$$P\cos(n,x)\,d\omega,\qquad P\cos(n,y)\,d\omega,\qquad P\cos(n,z)\,d\omega;$$

le travail de cette force est

$$P[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,\delta t\,d\omega,$$

et le travail de toutes les forces qui agissent sur la surface déformable du fluide est

$$\delta t\,\mathbf{S}\,P[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\omega,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments $d\omega$ de la surface déformable du fluide.

La somme des travaux virtuels effectués dans la déformation considérée par toutes les forces appliquées au fluide est

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{T}=\delta t\left\{\mathbf{S}\,P[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\omega \right. \\ \left. -\int\int\int\left(\frac{\partial W}{\partial x}u+\frac{\partial W}{\partial y}v+\frac{\partial W}{\partial z}w\right)dx\,dy\,dz\right\}.$$

Telle est la quantité qu'il faut démontrer être toujours nulle ou négative.

Pour faire cette démonstration, nous allons, conformément à une méthode fréquemment employée en Analyse, transformer l'intégrale triple en intégrale double. Mais auparavant une remarque est nécessaire. Dans le déplacement considéré, il peut arriver que le fluide reste continu; alors, après le déplacement, le fluide occupe un volume à connexion simple comme avant le déplacement. Au contraire, durant ce déplacement, il se peut que des cavités se creusent dans la masse fluide. Dans ce cas, avant le déplacement, le fluide occupait un espace à connexion simple, limité par une surface fermée σ; après le déplacement, il occupe un espace à connexions multiples, limité, d'une part, par la surface σ déformée et devenue σ' et, d'autre part, par les surfaces $\Sigma, \Sigma', \ldots$ des cavités creusées dans son intérieur.

Pour pouvoir embrasser à la fois tous les cas dans nos calculs, nous supposerons que l'intégrale triple s'étend à un espace à connexions multiples, limité par une surface extérieure σ et par des surfaces intérieures $\Sigma, \Sigma', \ldots$, toutes ces surfaces subissant dans le déplacement virtuel des déformations quelconques. Nous déduirons de cette hypothèse générale les hypothèses relatives aux cas particuliers qui nous intéressent, en supposant ou bien que les surfaces $\Sigma, \Sigma', \ldots$ renferment chacune un volume nul au commencement comme à la fin de la modification, ou bien que chacune de ces surfaces renferme un volume nul au commencement de la modification et un volume infiniment petit à la fin.

Donc, dans le calcul que nous allons faire, nous pourrons supposer que la modification virtuelle ne crée aucune cavité à l'intérieur du liquide. Nous pourrons, par un artifice entièrement analogue, supposer qu'il ne s'en crée pas non plus entre le liquide et le solide.

Cela étant, si nous portons toujours la normale à une surface vers l'intérieur du fluide en contact avec cette surface, il est facile de voir que nous avons

$$\begin{aligned}
\iiint\left(\frac{\partial W}{\partial x}u+\frac{\partial W}{\partial y}v+\frac{\partial W}{\partial z}w\right)dx\,dy\,dz
&= -\mathbf{S}\,W[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\sigma\\
&\quad -\mathbf{S}\,W[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\Sigma\\
&\quad -\mathbf{S}\,W[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\Sigma'\\
&\quad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad -\iiint W\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

L'égalité (9) deviendra donc

$$(10)\qquad \delta\mathfrak{T} = \delta t \Big\{ \mathbf{S}\, P\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\omega$$
$$+ \mathbf{S}\, W\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\sigma$$
$$+ \mathbf{S}\, W\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\Sigma$$
$$+ \mathbf{S}\, W\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\Sigma'$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int\!\!\int\!\!\int W\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \Big\}.$$

Mais cette égalité (10) va subir de notables simplifications.

En premier lieu, l'égalité (8)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

fait disparaître le dernier terme.

La surface σ, à laquelle s'étend la deuxième sommation, se compose de la surface déformable ω et de la surface de contact ω' du fluide avec les solides invariables qui peuvent l'environner.

Mais, le long de la surface ω', on a

$$u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0.$$

En effet, la quantité

$$\delta t[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]$$

représente la distance qui existe après le déplacement entre la nouvelle position de l'élément $d\omega'$ de la surface du liquide et la surface du solide, cette distance étant comptée positivement si $d\omega'$ est à l'extérieur du solide.

Or cette distance ne peut être négative, car le liquide ne peut pénétrer dans le solide; elle ne peut être positive, car, contrairement à l'hypothèse, il se serait formé une cavité entre le solide et le liquide. Elle est donc nulle, et l'on a, en tout point de ω',

$$u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0.$$

On peut donc supposer que la seconde sommation s'étend seulement à la surface ω et réunir les deux premières sommes en une seule

$$\mathbf{S}(\mathrm{P}+\mathrm{W})[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\omega.$$

Mais nous avons vu (n° 8) que $(\mathrm{P}+\mathrm{W})$ a la même valeur en tous les points de la surface ω. Si nous désignons cette valeur par a, la somme précédente pourra s'écrire

$$a\,\mathbf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\omega.$$

Désignons par $\delta\theta$ l'augmentation subie pendant la déformation par le volume qu'enferme la surface σ. Il est bien facile de voir que l'on a

$$\begin{aligned}\delta\theta &= -\,\delta t\,\mathbf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\sigma\\ &= -\,\delta t\,\mathbf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\omega.\end{aligned}$$

La somme des deux premiers termes de l'expression (10) de $\delta\varpi$ a donc pour valeur

$$-\,a\,\delta\theta.$$

L'intégrale

$$\mathbf{S}\,\mathrm{W}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\Sigma$$

s'étend à une surface Σ qui, dans toutes les hypothèses qui nous intéressent, renferme un volume nul ou infiniment petit. Si nous désignons par A la valeur de W en un point de ce volume, cette intégrale pourra s'écrire

$$\mathrm{A}\,\mathbf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\Sigma.$$

D'ailleurs, quelle que soit la surface Σ, si l'on désigne par $\delta\Theta$ l'accroissement subi pendant la modification par le volume qu'enferme cette surface, on aura

$$\delta\Theta = \delta t\,\mathbf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,d\Sigma.$$

Le troisième terme de l'expression (10) de $\delta\varpi$ a donc pour valeur

$$\mathrm{A}\,\delta\Theta.$$

De même, si l'on désigne par A' la valeur de W en un point du volume infiniment petit enfermé dans la surface Σ' et par $\delta\Theta'$ l'accroissement de ce volume, le quatrième terme a pour valeur

$$A'\,\delta\Theta',$$

et ainsi de suite.

Si l'on réunit tous ces résultats, l'égalité (10) devient

$$\delta\mathfrak{T} = A\,\delta\Theta + A'\,\delta\Theta' + \ldots - a\,\delta\vartheta. \tag{11}$$

Supposons en premier lieu que la modification virtuelle imposée au fluide soit une modification réversible; par l'effet de cette modification, aucune cavité ne se creuse à l'intérieur du fluide. Les volumes Θ, Θ', ... restent identiquement nuls. D'ailleurs, dans ce cas, $\delta\vartheta$ représente l'augmentation du volume occupé par le fluide, et cette augmentation est nulle, puisque chaque élément de masse garde dans le déplacement un volume constant. On a donc

$$\delta\mathfrak{T} = 0.$$

Supposons en second lieu que la modification virtuelle imposée au fluide soit une modification non réversible. Des cavités se creusent dans la masse fluide. $\delta\Theta$, $\delta\Theta'$, ... sont les volumes de ces cavités. L'accroissement du volume occupé par le fluide est

$$\delta\vartheta - (\delta\Theta + \delta\Theta' + \ldots).$$

Cet accroissement devant être nul, on a

$$\delta\vartheta = \delta\Theta + \delta\Theta' + \ldots,$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (11) de la manière suivante :

$$\delta\mathfrak{T} = (A - a)\,\delta\Theta + (A' - a)\,\delta\Theta' + \ldots.$$

Les quantités $\delta\Theta$, $\delta\Theta'$, ... sont essentiellement positives. D'autre part, d'après ce que nous avons vu au nº 9, la valeur constante a que prend $P + W$ sur la face déformable est au moins égale à la plus grande des valeurs que prend W à l'intérieur de l'espace occupé par le fluide. Les quantités $(A - a)$, $(A' - a)$, ... sont donc au plus égales à 0, et l'on a

$$\delta\mathfrak{T} \leqq 0.$$

Ainsi, *si l'on impose au fluide une modification virtuelle quelconque qui laisse invariable le volume de ses divers éléments de masse, le travail effectué par les forces qui agissent sur le fluide est nul si la modification est réversible, négatif ou exceptionnellement nul si la modification n'est pas réversible.*

Cette proposition montre que *les conditions que nous avons trouvées aux nos 7 et 8, nécessaires pour l'équilibre d'un fluide quelconque dénué de frottement, sont en même temps suffisantes pour l'équilibre d'un fluide incompressible.*

IV. — *Pression à l'intérieur d'un fluide. Forces qui peuvent assurer l'équilibre d'un fluide.*

11. Un fluide étant en équilibre, partageons-le en deux parties par une certaine surface S passant par un point M choisi arbitrairement à son intérieur. Puis, *en supposant que chacune des particules fluides qui se trouvent d'un certain côté de la surface* S *continue à être soumise aux mêmes forces données que par le passé,* supprimons tout le fluide situé de l'autre côté de cette surface, de façon que cette dernière devienne librement déformable. Le fluide restant ne sera plus, en général, en équilibre. Mais, *si le fluide est incompressible,* on sera assuré de maintenir cet équilibre par des forces convenablement appliquées aux divers éléments de la surface S. Ces forces nous sont données par les théorèmes précédents. Si l'on entoure le point M par un élément $d\omega$ tracé sur la surface S, la force $P\,d\omega$ supportée par l'élément ω sera normale à la surface S et dirigée du côté de cette surface où se trouve le fluide qu'on a conservé. De plus, en désignant par $-W$ la valeur de la fonction des forces au point M et en conservant à la lettre a la signification qu'elle a au n° 10, nous aurons

$$P + W = a. \tag{12}$$

Les conditions d'équilibre seront réalisées.

En effet :

1° La pression sera normale;

2° Elle sera positive ou nulle, car a est au moins égal à la valeur de W au point considéré;

3° En tout point de la surface déformable, on aura $P + W = a$;

4° Les forces continueront à vérifier les relations

$$\rho X = -\frac{\partial W}{\partial x},$$
$$\rho Y = -\frac{\partial W}{\partial y},$$
$$\rho Z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

à l'intérieur du fluide, puisqu'elles n'auront pas changé ;

5° Enfin a sera au moins égal à la plus grande des valeurs de W dans la partie restante du fluide.

L'égalité (12) montre que la quantité P dépend uniquement en grandeur de la situation du point M et nullement de l'orientation de l'élément $d\omega$ ou de la forme de la surface S. De là le nom de *pression au point* M qui lui a été donné.

On voit que la condition $a \geqq W$ indique que *la pression est positive ou nulle en tout point intérieur au fluide.*

A l'intérieur d'un fluide compressible, nous nommerons *pression* la quantité P calculée par la même règle que pour les fluides incompressibles.

L'égalité (12), qui définit la pression au point M, entraîne les égalités suivantes

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

en vertu desquelles les égalités (2) deviennent

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} &= X, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} &= Y, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= Z. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières égalités sont très fréquemment employées. On leur donne le nom d'*équations fondamentales de l'Hydrostatique.*

12. La notion de pression en un point pris à l'intérieur d'un fluide présente une grande importance dans l'étude des fluides compressibles.

Un fluide est compressible si la densité de chacun de ses éléments de volume varie avec les déplacements et les déformations imposées à la masse fluide dont il fait partie. Cette densité est donc fonction : 1° d'un certain nombre de paramètres α, β, ... qui varient d'un élément de masse à un autre, mais qui, pour chaque élément de masse pris en particulier, gardent une valeur invariable; 2° d'un certain nombre de paramètres qui varient non seulement d'un élément de masse à un autre, mais aussi pour un même élément de masse avec les déplacements et déformations que l'on fait subir à la masse fluide. Dans l'étude de l'Hydrostatique, on se limite au cas où il n'existe qu'un seul paramètre de la seconde classe et où ce paramètre est la grandeur de la pression au point où se trouve l'élément considéré, en sorte que l'on a

$$\rho = \Phi(\alpha, \beta, \ldots, P). \tag{14}$$

Si les paramètres α, β, ... ont la même valeur pour tous les éléments de la masse fluide, la relation précédente devient simplement

$$\rho = \Phi(P). \tag{14 bis}$$

Ce cas particulier, qui a une grande importance, se nomme le *cas des fluides compressibles homogènes*.

13. Un fluide ne peut pas être en équilibre sous l'action de forces quelconques. Les forces qui agissent sur un fluide ne pourront l'amener à l'état d'équilibre s'il n'est pas possible de vérifier les équations

$$\left\{\begin{aligned} \rho X &= -\frac{\partial W}{\partial x}, \\ \rho Y &= -\frac{\partial W}{\partial y}, \\ \rho Z &= -\frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

par un choix convenable de fonctions de x, y, z pour ρ et W. De ces équations on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\rho Z) &= \frac{\partial}{\partial z}(\rho Y), \\ \frac{\partial}{\partial z}(\rho X) &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho Z), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho Y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\rho X) \end{aligned}$$

ou bien

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0. \tag{15}$$

Telle est l'égalité que vérifient nécessairement, dans l'état d'équilibre, les composantes X, Y, Z de la force rapportée à l'unité de masse. Pour étudier les conséquences de cette égalité, nous avons deux cas à distinguer.

1° Il peut arriver que X, Y, Z soient des fonctions de x, y, z indépendantes, dans leur forme, de la disposition qu'affecte la masse fluide. C'est ce qui arrive, lorsqu'on envisage un fluide soumis à l'action de la pesanteur, à l'attraction suivant une loi quelconque d'un ou de plusieurs corps fixes, ... Nous nommerons ce cas le *cas des forces extérieures*.

2° Il peut arriver, au contraire, que chacune des quantités X, Y, Z soit, pour un arrangement déterminé de la masse fluide, une fonction de x, y, z, mais que la forme de cette fonction varie avec l'arrangement attribué à la masse fluide. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque les diverses particules du fluide exercent les unes sur les autres des attractions, comme dans les deux problèmes de la figure des planètes, de la figure d'équilibre des fluides soumis à la capillarité et, plus généralement, toutes les fois que le fluide est soumis à l'action de *forces intérieures*.

Il est presque impossible de rien dire sur le second cas sans avoir précisé par quelque hypothèse la manière dont les fonctions de x, y, z qui représentent X, Y, Z dépendent de la configuration du fluide et de l'arrangement de ses parties. Au contraire, l'étude générale du premier cas peut être poussée assez avant. Pour le moment, nous nous bornerons à considérer ce premier cas.

Le fluide est donc soumis à des forces extérieures, telles que les quantités X, Y, Z soient des fonctions de x, y, z complètement indépendantes, dans leur forme, de l'arrangement des diverses parties du fluide. Si X, Y, Z ne vérifient pas identiquement l'égalité (15), il est inutile de pousser plus loin l'étude de ces forces. Elles ne peuvent maintenir aucun fluide en équilibre.

Si, au contraire, X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z qui vérifient identiquement l'égalité (15), on sait, par l'étude des équations différentielles, qu'il existe une infinité de fonctions de x, y, z qui, mises à la place de ρ, transforment l'expression

$$\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

en la différentielle totale d'une fonction $(-W)$ de x, y, z. Cette fonction pourrait n'être pas uniforme à l'intérieur du fluide. Les facteurs intégrants en question seraient à exclure, ou bien, par des coupures, il faudrait rendre la *fonction uniforme*. Chacune de ces solutions correspond alors à un état d'équilibre d'un fluide.

14. Parmi les forces qui vérifient l'égalité (15), citons celles pour lesquelles il existe une fonction $V(x, y, z)$ uniforme, finie et continue en tous les points du fluide, telle que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Nous donnerons à la fonction V le nom de *fonction potentielle* (¹), employé tout d'abord par Green dans un sens plus restreint.

Ces forces sont les seules qui puissent maintenir en équilibre un fluide homogène et incompressible, car ce sont les seules pour lesquelles l'expression

$$\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

devient une différentielle totale, ρ étant une constante.

D'une manière plus générale, *ces forces sont les seules qui puissent maintenir en équilibre un fluide homogène compressible ou non compressible.*

En effet, pour un fluide homogène et compressible, la densité est fonction seulement de la pression et en est une fonction continue, et, comme la pression ne diffère de W que par le signe et une constante, on devra avoir, dans l'état d'équilibre,

$$\rho = \Phi(W),$$

Φ désignant une fonction continue de W. On aura donc, dans l'état d'équilibre,

$$\Phi(W)(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -dW$$

(¹) Nous admettons ici entre la *fonction potentielle* et le *potentiel* la distinction établie par Clausius (*La fonction potentielle et le potentiel*, Paris, 1870).

ou bien

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,dV,$$

en désignant par W_0 une valeur arbitraire de W et en posant

$$V = \int_{W_0}^{W} \frac{1}{\Phi(W)}\,dW,$$

ce qui équivaut aux égalités (16) et démontre la proposition énoncée.

Mais on peut aller plus loin. En vertu des égalités (16), l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

admet pour facteur intégrant l'unité et est alors égale à $-\,dV$.

Il en résulte que la forme la plus générale de son facteur intégrant ρ est

$$(17) \qquad \rho = f(V),$$

f représentant une fonction continue, ou discontinue seulement pour des valeurs isolées de V. Si l'on accepte ce facteur intégrant et si l'on désigne par V_0 une valeur arbitraire de V, on a

$$(18) \qquad W = \int_{V_0}^{V} f(V)\,dV = F(V)$$

et, par conséquent,

$$(19) \qquad P = -\,F(V) + a.$$

Les surfaces définies par l'équation

$$V = \text{const.}$$

jouissent donc de la double propriété d'être des surfaces d'égale densité [égalité (17)] et des surfaces d'égale pression [égalité (18)]. On a donné à ces surfaces remarquables le nom de *surfaces de niveau,* dont l'origine est dans l'étude des fluides à surface libre.

15. On donne le nom de *fluide à surface libre* à un fluide limité par une surface déformable qui ne supporte aucune pression. L'égalité

$$P + W = a,$$

qui a lieu, en général, pour tous les points de la surface déformable qui limite un fluide, devient, dans ce cas,

$$W = a.$$

La surface libre d'un fluide jouit donc de cette propriété que la fonction W a la même valeur en tous les points de cette surface. Cette propriété en entraîne une autre; soient, en effet, dx, dy, dz les projections d'un élément linéaire tracé sur la surface $W = a$. Nous aurons

$$\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = 0$$

ou bien

$$\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.$$

Comme la densité n'est pas nulle, cette égalité démontre qu'*en tout point de la surface libre d'un fluide, et plus généralement en tout point d'une surface* W = const., *la force est nulle ou normale à la surface.*

Si les forces agissant sur le fluide admettent une fonction potentielle V, nous avons, en vertu de l'égalité (18),

$$W = \int_{V_0}^{V} f(V)\,dV = F(V).$$

La surface libre du fluide est donc une des surfaces V = const.

On donne le nom de *surface de niveau,* dans le langage de chaque jour, à la surface libre des liquides pesants. La pesanteur étant une force qui admet une fonction potentielle, cette surface de niveau est une surface pour laquelle la fonction potentielle de la pesanteur est constante. Il est naturel d'étendre ce nom de *surface de niveau* à toute surface définie par l'égalité

$$V = \text{const.}$$

Comme, en général, les surfaces W = const., les surfaces V = const. jouissent de la propriété d'être en chaque point normales à la direction de la force.

IV. — *Stabilité de l'équilibre d'un fluide à surface libre soumis à des forces extérieures qui admettent une fonction potentielle.*

16. Considérons un fluide soumis à des forces extérieures admettant une fonction potentielle V. On a

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Formons l'expression

$$\Omega = \int\int\int \rho V \, dx \, dy \, dz, \tag{20}$$

et cherchons la variation qu'elle subit lorsqu'on impose au fluide une modification qui laisse invariable le volume de chacune de ses masses élémentaires.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement d'un point de la particule de masse $\rho \, dx \, dy \, dz$. Avant le déplacement, cette particule fournissait à Ω un terme

$$\rho V \, dx \, dy \, dz.$$

Après le déplacement, elle fournit à la nouvelle valeur de Ω un terme

$$\rho\left(V + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dx \, dy \, dz,$$

si l'on suppose que le déplacement n'ait pas altéré sa densité.

La variation de Ω est donc la somme des expressions telles que

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dx \, dy \, dz$$

fournies par les diverses particules du liquide, ce qui peut s'écrire

$$\delta\Omega = \int\int\int \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dx \, dy \, dz$$

ou bien, en désignant par $\delta\mathfrak{T}$ le travail élémentaire accompli durant la modification considérée par les forces qui agissent sur les divers éléments de volume du fluide,

$$\delta\Omega = -\delta\varpi.$$

Par conséquent, la fonction Ω définie par l'égalité (20) représente le potentiel des actions qui s'exercent sur les divers éléments de masse du fluide, du moins pour les déplacements qui laissent invariable le volume de chacun de ces éléments.

Si la surface déformable qui limite le fluide est une surface libre, il n'existe aucun travail virtuel des forces appliquées aux divers éléments de la surface qui limite le fluide, et dès lors celui-ci admet un potentiel défini par l'égalité (20), du moins si on le regarde comme incompressible. Il suffit, pour que l'équilibre soit stable, que ce potentiel Ω soit minimum.

Nous aurons

$$\Delta\Omega = \delta\Omega + \delta^2\Omega + \ldots.$$

Il faut montrer que l'on a

$$\Delta\Omega > 0.$$

Or on a $\delta\Omega = 0$, à moins qu'il ne se soit formé une cavité en un point où $W < a$, cas auquel on a $\delta\Omega > 0$. Il suffit donc de montrer que l'on a $\delta^2\Omega > 0$ pour tout déplacement sans formation de cavité ou pour tout déplacement avec formation de cavité en un point où $W = a$.

17. La variation première de Ω nous est donnée par l'égalité

$$\delta\Omega = \iiint \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dx\, dy\, dz.$$

La variation seconde est donnée par l'égalité

$$\begin{aligned}\delta^2\Omega = \iiint \rho\Big[& \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta z\right)\delta x \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta z\right)\delta y \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\delta z\right)\delta z\Big]\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Posons, comme au n° 10,

$$\begin{aligned}\delta x &= u\,\delta t,\\ \delta y &= v\,\delta t,\\ \delta z &= w\,\delta t,\end{aligned}$$

δt étant une constante infiniment petite, et u, v, w des fonctions de x, y, z uniformes, finies et continues, admettant des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z. Nous aurons

$$\begin{aligned}\delta^2\Omega = \delta t^2 \int\int\int\Big[& \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} v + \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial z} w\right)\rho u \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} u + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} v + \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial z} w\right)\rho v \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x} u + \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial y} v + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} w\right)\rho w\Big]\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette égalité en la suivante :

$$\begin{aligned}\delta^2\Omega = & -\delta t^2 \mathbf{S}\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)] \\ & \times \left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}\right)\rho\, d\sigma \\ & -\delta t^2 \int\int\int\Big[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} \\ & \qquad + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} \\ & \qquad + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial(\rho w v)}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\Big]\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Le signe $\mathbf{S}$ indique une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\sigma$ des surfaces déformables qui limitent le fluide, y compris celles qui prennent naissance si le fluide se creuse de cavités; (n, x), (n, y), (n, z) sont les angles que fait avec les trois axes coordonnés la normale à l'élément $d\sigma$, cette normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace rempli par le fluide.

L'intégrale triple qui figure au second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned}& \int\int\int\left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ & + \int\int\int \rho\left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Mais on suppose que chaque élément de masse garde un volume invariable. On a donc [égalité (8)]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2\Omega = &-\delta t^2 \mathsf{S}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\\ &\times\left(u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\sigma\\ &-\delta t^2\int\!\!\int\!\!\int\left(u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Désignons par ε la grandeur du déplacement d'une particule, par (ε, x), (ε, y), (ε, z) les angles que la direction de ce déplacement fait avec les trois axes de coordonnées et, lorsqu'il s'agit du déplacement d'une particule située au voisinage immédiat de la surface limite, par (ε, n) l'angle que la direction du déplacement fait avec la normale à la surface limite au point où se trouve la particule, cette normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace occupé par le fluide. Nous aurons

$$\begin{aligned}u\,\delta t &= \varepsilon\cos(\varepsilon, x),\\ v\,\delta t &= \varepsilon\cos(\varepsilon, y),\\ w\,\delta t &= \varepsilon\cos(\varepsilon, z),\end{aligned}$$

$$\cos(\varepsilon,n)=\cos(\varepsilon,x)\cos(n,x)+\cos(\varepsilon,y)\cos(n,y)+\cos(\varepsilon,z)\cos(n,z)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2\Omega = &-\mathsf{S}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(\varepsilon,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(\varepsilon,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(\varepsilon,z)\right]\rho\varepsilon^2\cos(\varepsilon,n)\,d\sigma\\ &-\int\!\!\int\!\!\int\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(\varepsilon,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(\varepsilon,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(\varepsilon,z)\right]\\ &\qquad\times\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos(\varepsilon,x)+\frac{\partial \rho}{\partial y}\cos(\varepsilon,y)+\frac{\partial \rho}{\partial z}\cos(\varepsilon,z)\right]\varepsilon^2\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Le déplacement ε imposé à une particule d'un point où la valeur de la fonction potentielle était V est la densité primitive du fluide ρ, à un point où la fonction potentielle a pour valeur $V+\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\varepsilon$ et où la densité primitive du fluide avait pour valeur $\rho + \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial x}\cos(\varepsilon, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\varepsilon, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(\varepsilon, z),\\ \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\cos(\varepsilon, x) + \frac{\partial\rho}{\partial y}\cos(\varepsilon, y) + \frac{\partial\rho}{\partial z}\cos(\varepsilon, z)\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(21) \qquad \delta^2\Omega = -\mathbf{S}\,\rho\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\cos(\varepsilon, n)\varepsilon^2\,d\sigma - \int\!\!\int\!\!\int\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\,\varepsilon^2\,dx\,dy\,dz.$$

Nous avons à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette quantité soit positive, quels que soient les déplacements imposés au fluide.

Voici une première condition nécessaire.

Les surfaces $V =$ const. sont des surfaces d'égale densité [égalité (17)]. Pour que $\delta^2\Omega$ soit toujours positif, *il faut que le côté d'une surface vers lequel* V *va en croissant soit aussi le côté vers lequel* ρ *va en décroissant.*

Supposons, en effet, qu'il en soit autrement dans une certaine région du fluide. En tout point de cette région, le produit $\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}$ serait positif, de quelque manière que soit dirigé le déplacement ε, ou nul si ε est sur la surface. Supposons alors que l'on donne des déplacements infiniment petits aux diverses particules du fluide qui se trouvent dans cette région, en laissant immobile tout le reste du fluide et en ayant soin, si cette région confine à la surface terminale, de ne donner aux particules de cette surface que des déplacements tangents à la surface. La quantité $\delta^2\Omega$ se réduirait alors à l'intégrale

$$-\int\!\!\int\!\!\int\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\,\varepsilon^2\,dx\,dy\,dz$$

étendue à la région considérée et serait certainement négative, si l'on a soin que le déplacement de chaque point n'ait pas lieu sur la surface de niveau qui passe par ce point.

Nous trouvons ainsi une condition nécessaire pour que la quantité $\delta^2\Omega$ soit constamment positive; *cette condition est en même temps suffisante.*

En effet, si elle est réalisée, l'intégrale

$$\int\int\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \, dx \, dy \, dz$$

est négative dans tout déplacement du fluide. Il est aisé de voir que l'intégrale

$$\mathbf{S} \, \rho \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \cos(\varepsilon, n) \, d\sigma$$

est, dans tout déplacement du fluide, nulle ou négative.

En effet, cette intégrale peut se partager en deux intégrales semblables : l'une relative à la surface déformable du fluide, l'autre qui limite les cavités dont le fluide a pu se creuser.

Envisageons d'abord la première intégrale.

Nous savons que, sur la surface déformable d'un fluide quelconque, $P+W$ doit avoir une valeur au moins égale à la plus grande des valeurs que prend W à l'intérieur du fluide. Dans le cas envisagé ici, où le fluide a une surface libre, $P=0$, W a une valeur constante sur la surface, et cette valeur est supérieure ou égale à toutes celles qu'il prend à l'intérieur du fluide. Il en résulte que $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ est une quantité négative ou nulle si le déplacement ε est dirigé vers l'intérieur du fluide, et nulle si le déplacement ε est tangent à la surface libre.

Mais on a [égalité (17)]

$$\rho = f(V)$$

et [égalité (18)]

$$W = \int_{V_0}^{V} f(V) \, dV = F(V).$$

On a donc

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = f(V) \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}.$$

La quantité $f(V)$, qui représente une densité, est essentiellement positive ; les deux quantités $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ et $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ ont donc le même signe ; $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ est positif ou nul pour les déplacements dirigés vers l'extérieur du fluide, nul pour les déplacements tangentiels, négatif ou nul pour les déplacements dirigés vers l'intérieur du fluide. D'autre part, $\cos(n, \varepsilon)$ est négatif pour les déplacements dirigés vers l'extérieur du fluide, nul pour les déplacements tangentiels, positif pour les déplacements dirigés vers l'intérieur du fluide. Le produit $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\cos(\varepsilon, n)$ est donc négatif ou nul en tous les points de la surface; par conséquent, l'intégrale

$$\mathrm{S}\,\rho\,\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\,\varepsilon^2\cos(\varepsilon, n)\,d\sigma,$$

étendue à la surface libre, est nulle ou négative.

Envisageons maintenant la même intégrale étendue à la surface limite d'une cavité infiniment petite qui se serait creusée dans le fluide par suite du déplacement.

D'une manière générale, si nous désignons par W la valeur de la fonction W en un point de la surface déformable d'un fluide, par P la pression au même point, par W′ la valeur de la fonction W au point où s'est creusée la cavité, nous avons

$$P + W \geqq W'.$$

Dans le cas actuel où le fluide est terminé par une surface libre, on a $P = 0$ et, par conséquent,

$$W \geqq W'.$$

Si W était supérieur à W′, la formation de la cavité aurait entraîné, comme nous l'avons vu, un travail virtuel négatif. Ce cas doit, comme nous l'avons vu, être exclu des recherches sur le signe de $\delta^2\Omega$. La cavité n'a pu se former que si $W = W'$. Mais, comme en aucun point à l'intérieur du fluide la fonction W ne peut avoir une valeur supérieure à la valeur qu'elle prend sur la surface libre, il en résulte qu'en tous les points du fluide W est au plus égal à W′. Donc, si l'on envisage un déplacement quelconque partant du point où s'est formée la petite cavité, pour ce déplacement, $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ est certainement négatif ou nul. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, il en est de même de $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\cdot$ D'autre part, en chaque point de la surface qui limite la petite cavité, le déplacement est forcément ou tangentiel ou dirigé vers l'extérieur de la cavité; $\cos(\varepsilon, n)$ est donc positif ou nul, et le produit $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\cos(\varepsilon, n)$ est négatif ou nul. L'intégrale

$$\mathrm{S}\,\rho\,\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\cos(\varepsilon, n)\,\varepsilon^2\,d\sigma$$

est négative ou nulle.

Par conséquent, *pour que la fonction* Ω *soit minimum, il faut et il suffit que la variation subie par la densité* ρ *lorsqu'on passe d'un point à l'autre à l'intérieur du fluide soit de signe contraire à la variation que subit la fonction* V, *les conditions d'équilibre étant d'ailleurs remplies*. Nous trouvons ainsi la condition suffisante pour que l'équilibre d'un fluide à surface libre soit un équilibre stable.