ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR DE

NOUVELLES FONCTIONS HARMONIQUES

A TROIS VARIABLES

ANALOGUES AUX FONCTIONS THÊTAFUCHSIENNES;

PAR M. X. STOUFF,

Professeur au Lycée de Grenoble.

I.

Dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, M. Poincaré indique la formation de groupes de substitutions à trois variables, analogues aux groupes fuchsiens. On est naturellement conduit à chercher des fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ et subissant des transformations simples quand on y soumet les variables aux substitutions de ces groupes. Nous désignerons la conjuguée d'une quantité imaginaire par la lettre qui désigne cette quantité affectée de l'indice o. Posons

$$u = x + y\sqrt{-1}, \qquad \mu = au + b, \qquad \lambda = cu + d,$$

a, b, c, d étant quatre nombres complexes satisfaisant à l'équation

$$bc - ad = 1;$$

l'expression générale d'une substitution transformant en lui-même le plan des xy est

$$\begin{pmatrix} u, & \dfrac{\lambda\mu_0 + ca_0 z^2}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \\ z, & \dfrac{z}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \end{pmatrix}.$$

Les substitutions de cette forme dans lesquelles a, b, c, d sont des entiers complexes, c'est-à-dire des quantités dans lesquelles la partie réelle et le multiplicateur de i sont entiers, constituent un groupe important étudié par M. Poincaré et par M. Picard. Je m'occuperai d'abord de celui-ci.

Soit S_i une quelconque des substitutions de ce groupe. Posons

$$r_i = \sqrt{\mu_i\mu_{i0} + a_i a_{i0} z^2},$$

$$\varphi_{n0i} = \frac{\mu_i^n}{r_i^{2n+1}},$$

$$\varphi_{n1i} = \frac{\mu_i^{n-1}(u_0\mu_i + a_i z^2)}{r_i^{2n+1}},$$

$$\varphi_{n2i} = \frac{\mu_i^{n-2}(u_0\mu_i - a_i z^2)^2}{r_i^{2n+1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varphi_{nki} = \frac{\mu_i^{n-k}(u_0\mu_i + a_i z^2)^k}{r_i^{2n+1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varphi_{nni} = \frac{(u_0\mu_i + a_i z^2)^n}{r_i^{2n+1}}.$$

Ces fonctions satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Pour le démontrer, je décompose la fonction φ_{nki} en éléments simples. On a

$$r_i^2 = \mu_i(a_{i0}u_0 + b_{i0}) + a_i a_{i0} z^2,$$

$$u_0\mu_i + a_i z^2 = \frac{r_i^2 - b_{i0}\mu_i}{a_{i0}},$$

$$\varphi_{nki} = \frac{\mu_i^{n-k}(r_i^2 - b_{i0}\mu_i)^k}{a_{i0}^k r_i^{2n+1}} = \sum_{h=0}^{h=k} C_k^h(-1)^h \frac{b_{i0}^h}{a_{i0}^k}\,\frac{\mu_i^{n-k+h}}{r_i^{2n-2k+2h+1}},$$

où C_k^h désigne le nombre des combinaisons de k objets h à h. Les numérateurs des diverses fractions qui forment le second membre ne contiennent que x et y et satisfont évidemment à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

μ_i^{n-k+h} est une fonction homogène, de degré $n - k + h$, de $x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$ et de $y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 i a_i a_{i0}}$, et l'on a

$$r_i = \sqrt{a_i a_{i0} \left[\left(x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}} \right)^2 + \left(y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 i a_i a_{i0}} \right)^2 + z^2 \right]};$$

$\frac{\mu_i^{n-k+h}}{r_i^{2n-2k+2h+1}}$ est donc, par rapport à $x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$, $y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$, z, une fonction V_n à indice négatif.

Je dis maintenant que la série

$$\sum_i \varphi_{nki},$$

où la somme est étendue à toutes les substitutions du groupe, est convergente pour $n \geqq 4$. En effet, on a évidemment

$$\operatorname{mod} \mu_i < r_i, \qquad \operatorname{mod}(a_i z) < r_i;$$

par suite

$$\operatorname{mod}(u_0 \mu_i + a_i z^2) < \operatorname{mod} u_0 \operatorname{mod} \mu_i + \operatorname{mod} a_i z^2,$$
$$\operatorname{mod}(u_0 \mu_i + a_i z^2) < r_i (\operatorname{mod} u_0 + \operatorname{mod} z),$$
$$\operatorname{mod} \varphi_{nki} < \frac{(\operatorname{mod} u_0 + \operatorname{mod} z)^k}{r_i^{n+1}}.$$

Or on a

$$r_i = \sqrt{\operatorname{mod}^2(a_i u + b_i) + \operatorname{mod}^2(a_i z)},$$
$$\operatorname{mod}^2(a_i u + b_i) > (\operatorname{mod} b_i - \operatorname{mod} u \operatorname{mod} a_i)^2,$$
$$r_i > \sqrt{\operatorname{mod}^2 b_i - 2 \operatorname{mod} b_i \operatorname{mod} a_i \operatorname{mod} u + \operatorname{mod}^2 a_i (\operatorname{mod}^2 u + \operatorname{mod}^2 z)};$$

en écrivant que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique, on a

$$\operatorname{mod}^2 b_i + \operatorname{mod}^2 a_i (\operatorname{mod}^2 u + \operatorname{mod}^2 z) > 2 \sqrt{\operatorname{mod}^2 u + \operatorname{mod}^2 z} \operatorname{mod} b_i \operatorname{mod} a_i,$$
$$r_i > \lambda \sqrt{\operatorname{mod} bi \operatorname{mod} a_i},$$

λ désignant une quantité positive indépendante de i. Il suffit donc de prouver la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{(\operatorname{mod} b_i \operatorname{mod} a_i)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Considérons d'abord les substitutions où a_i a la même valeur; dans la série précédente, l'ensemble des termes qui correspondent à ces substitutions peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(\operatorname{mod} a_i)^{\frac{n+1}{2}}} \sum \frac{1}{(\operatorname{mod} b_j)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Formons un premier groupe des termes où la partie réelle et la partie imaginaire de b_j sont moindres que 2, un second groupe de ceux où ces deux quantités ne sont pas inférieures à 2 et sont moindres que $2^2, \ldots$; les sommes des termes des différents groupes sont respectivement moindres que

$$\frac{1}{(\operatorname{mod} a_i)^{\frac{2n+1}{2}}} \frac{2^2}{1^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \frac{1}{(\operatorname{mod} a_i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{(2^2)^2}{2^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \cdots.$$

Nous voyons que ces derniers termes forment une progression géométrique dont la raison est $2^{2-\frac{n+1}{2}}$; elle est convergente si

$$\frac{n+1}{2} > 2,$$

et, comme n est entier, si n est $\geqq 4$. La somme des termes où a_i a la même valeur est, par suite, moindre que

$$\frac{\theta}{(\operatorname{mod} a_i)^{\frac{n+1}{2}}},$$

θ ne dépendant que de n. Le même procédé montre que, pour $n \geqq 4$,

$$\sum \frac{\theta}{(\operatorname{mod} a_i)^{\frac{n+1}{2}}}$$

est convergente. Nous en concluons que

$$\sum \varphi_{nki}$$

représente une fonction de x, y, z satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$. Nous la représenterons par

$$Z_{nk}.$$

Soit S_j une substitution quelconque du groupe, et

$$S_i S_j = S_g,$$

$S_i S_j$ est la substitution obtenue en remplaçant dans S_i les valeurs de x, y, z par les expressions que fournit la substitution S_j.

On a

$$(\mu_i)S_j = a_i \frac{\lambda_j \mu_{j0} + c_j a_{j0} z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2} + b_i = \frac{(a_i\lambda_j + b_i\mu_j)\mu_{j0} + (a_i c_j + b_i a_j) z^2 a_{j0}}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2},$$

$$(\mu_i)S_j = \frac{\mu_g \mu_{j0} + a_g z^2 a_{j0}}{\mu_j \mu_{i0} + a_j a_{j0} z^2} = \frac{(u_0 \mu_g + a_g z^2) a_{j0} + \mu_g b_{j0}}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2},$$

La relation

$$b_j c_j - a_j d_j = 1$$

peut s'écrire

$$\mu_j c_j - \lambda_j a_j = 1.$$

On voit donc que la substitution S_j transforme $uu_0 + z^2$ en

$$\frac{(\lambda_j \mu_{j0} + c_j a_{j0} z^2)(\lambda_{j0}\mu_j + c_{j0} a_j z^2) + (\mu_j c_j - \lambda_j a_j)(\mu_{j0} c_{j0} - \lambda_{j0} a_{j0}) z^2}{(\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2)^2}$$

ou, en réduisant et en supprimant le facteur $\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2$ commun aux deux membres,

$$\frac{\lambda_j \lambda_{j0} + c_j c_{j0} z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2};$$

mais

$$u_0 \mu_i + a_i z^2 = a_i(uu_0 + z^2) + b_i u_0.$$

Cette quantité se transforme donc en

$$\frac{a_i(\lambda_j \lambda_{j0} + c_j c_{j0} z^2) + b_i(\lambda_{j0}\mu_j + c_j a_{j0} z^2)}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2}$$

ou

$$\frac{\lambda_{j0}\mu_g + c_{j0} a_g z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2} = \frac{c_{j0}(u_0 \mu_g + a_g z^2) + d_{j0}\mu_g}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2}.$$

Enfin des calculs analogues montrent que S_j transforme r_i en $\frac{r_g}{r_j}$. Par suite,

φ_{nki} devient

$$r_j \frac{[(u_0\mu_g + a_g z^2)a_{j0} + \mu_g b_{j0}]^{n-k}[(u_0\mu_g + a_g z^2)c_{j0} + \mu_g d_{j0}]^k}{r_g^{2n+1}}.$$

Posons

$$A_{jnkm} = \sum_{p \leqq m} C_{n-k}^p C_k^{m-p} b_{j0}^p a_{j0}^{n-k-p} d_{j0}^{m-p} c_{j0}^{k-m+p},$$

nous aurons

$$(\varphi_{nki}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnkm} \varphi_{nmg}.$$

Si l'on fait varier i de manière à obtenir pour S_i une fois et une seule chaque substitution du groupe, S_g reproduit aussi une fois et une seule chaque substitution de ce groupe, et, en ajoutant membre à membre toutes les équations en nombre infini ainsi obtenues, il vient

$$(Z_{nk}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnkm} Z_{nm}.$$

On voit que les $n+1$ fonctions Z_{nk} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ deviennent, lorsqu'on y fait la substitution S_j, abstraction faite du facteur r_j, des fonctions linéaires homogènes de leurs valeurs primitives. C'est à de pareilles fonctions que M. Poincaré a donné le nom de *fonctions zêtafuchsiennes*. On sait, d'ailleurs, que ce géomètre a appelé *fonction thêtafuchsienne*, une fonction $\Theta(z)$, telle que

$$\Theta\left(\frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}\right) = (\gamma_j z + \delta_j)^n \Theta(z).$$

Notre système zêtafuchsien, obtenu dans le cas de trois variables, offre une analogie complète avec le système

$$\Theta(z), \quad z\Theta(z), \quad \ldots, \quad z^n \Theta(z).$$

II.

Les groupes de substitutions à trois variables qui laissent invariables le plan des xy, transformés par une substitution convenable, laisseront invariable une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Nous nommerons cette sphère *sphère fondamentale*. Voici d'abord l'expression générale des substitutions qui ne changent pas la sphère fondamentale.

Soient a, b, c, d, a', b', c', d' huit nombres réels satisfaisant à l'équation

$$aa' + bb' + cc' + dd' = 0.$$

Soient x, y, z les trois coordonnées d'un point, et

$$\begin{aligned} X &= bx + dy + cz - a', \\ Y &= -ax + cy - dz - b', \\ Z &= dx - by - az - c', \\ U &= -cx - ay + bz - d'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X' &= b'x + d'y + c'z + a, \\ Y' &= -a'x + c'y - d'z + b, \\ Z' &= d'x - b'y - a'z + c, \\ U' &= -c'x - a'y + b'z + d. \end{aligned}$$

La substitution aura pour expression

$$\begin{aligned} x \quad &in \quad \frac{XY' - YX' - ZU' + UZ'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}, \\ y \quad &in \quad \frac{XU' - YZ' + ZY' - UX'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}, \\ z \quad &in \quad \frac{XZ' + YU' - ZX' - UY'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément l'identité

$$XX' + YY' + ZZ' + UU' = 0, \tag{1}$$

et l'on voit, à l'aide de cette identité, que $x^2 + y^2 + z^2$ se transforme en

$$\frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + U'^2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2},$$

Si, dans cette fraction, on développe le numérateur et le dénominateur et si l'on suppose $x^2 + y^2 + z^2$ égal à 1, on voit qu'elle se réduit à l'unité. Notre substitution laisse donc bien invariable la sphère de rayon qui a l'origine pour centre. Je me propose maintenant de former la substitution T produit d'une substitution donnée S par une autre substitution donnée S_1.

Posons, pour abréger,

$$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + U_1^2,$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= -aX'_1 + bY'_1 + cZ'_1 + dU'_1,\\
N_1 &= -bX'_1 - aY'_1 - dZ' + cU'_1,\\
P_1 &= -cX'_1 + dY'_1 - aZ'_1 - bU'_1,\\
Q_1 &= -dX'_1 - cY'_1 + bZ'_1 - aU'_1.
\end{aligned}$$

On trouve que X, Y, Z, U se transforment respectivement en

$$\frac{1}{R_1^2}(M_1X_1 + N_1Y_1 + P_1Z_1 + Q_1U_1 - a'R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(N_1X_1 - M_1Y_1 - Q_1Z_1 + P_1U_1 - b'R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(P_1X_1 + Q_1Y_1 - M_1Z_1 - N_1U_1 - c'R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(Q_1X_1 - P_1Y_1 + N_1Z_1 - M_1U_1 - d'R_1^2).$$

Soient

$$\begin{aligned}
M &= -a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + d'U_1,\\
N &= -b'X_1 - a'Y_1 - d'Z_1 + c'U_1,\\
P &= -c'X_1 + d'Y_1 - a'Z_1 - b'U_1,\\
Q &= -d'X_1 - c'Y_1 + b'Z_1 - a'U_1
\end{aligned}$$

$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2$ devient

$$\frac{1}{R_1^2}[(M_1 + M)^2 + (N_1 + N)^2 + (P_1 + P)^2 + (Q_1 + Q)^2].$$

Posons

$$\begin{aligned}
M'_1 &= -a'X'_1 + b'Y'_1 + c'Z'_1 + d'U'_1,\\
N'_1 &= -b'X'_1 - a'Y'_1 - d'Z'_1 + c'U'_1,\\
P'_1 &= -c'X'_1 + d'Y'_1 - a'Z'_1 - b'U'_1,\\
Q'_1 &= -d'X'_1 - c'Y'_1 + b'Z'_1 - a'U'_1.
\end{aligned}$$

X', Y', Z' se transforment en

$$\frac{1}{R_1^2}(M'_1 X_1 + N'_1 Y_1 + P'_1 Z_1 + Q'_1 U_1 + aR_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(N'_1 X_1 - M'_1 Y_1 - Q'_1 Z_1 + P'_1 U_1 + bR_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(P'_1 X_1 + Q'_1 Y_1 - M'_1 Z_1 - N'_1 U_1 + cR_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2}(Q'_1 X_1 - P'_1 Y_1 + N'_1 Z_1 - M'_1 U_1 + dR_1^2).$$

Posons aussi

$$\begin{aligned}
M' &= -aX_1 + bY_1 + cZ_1 + dU_1,\\
N' &= -bX_1 - aY_1 - dZ_1 + cU_1,\\
P' &= -cX_1 + dY_1 - aZ_1 - bU_1,\\
Q' &= -dX_1 - cY_1 + bZ_1 - aU_1,
\end{aligned}$$

$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + U'^2$ devient

$$(M'_1 - M')^2 + (N'_1 - N')^2 + (P'_1 - P')^2 + (Q'_1 - Q')^2.$$

Enfin, en formant, à l'aide des résultats précédents, les expressions de x, y, z, on trouve que les quantités X, Y, Z, U; X', Y', Z', U' relatives à la substitution T sont respectivement

$$M_1 + M,\quad N_1 + N,\quad P_1 + P,\quad Q_1 + Q;\quad M'_1 - M',\quad N'_1 - N',\quad P'_1 - P',\quad Q'_1 - Q';$$

les huit entiers relatifs à cette même substitution s'expriment donc par les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
A &= -a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 + d'd_1 - aa'_1 + bb'_1 + cc'_1 + dd'_1,\\
B &= -b'a_1 - a'b_1 - d'c_1 + c'd_1 - ba'_1 - ab'_1 - dc'_1 + cd'_1,\\
C &= -c'a_1 + d'b_1 - a'c_1 - b'd_1 - ca'_1 + db'_1 - ac'_1 - bd'_1,\\
D &= -d'a_1 - c'b_1 + b'c_1 - a'd_1 - da'_1 - cb'_1 + bc'_1 - ad'_1,\\
A' &= aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1 - a'a'_1 + b'b'_1 + c'c'_1 + d'd'_1,\\
B' &= ba_1 + ab_1 + dc_1 - cd_1 - b'a'_1 + a'b'_1 - d'c'_1 - c'd'_1,\\
C' &= ca_1 - db_1 + ac_1 + bd_1 - c'a'_1 + d'b'_1 - a'c'_1 - b'd'_1,\\
D' &= da_1 + cb_1 - bc_1 + ad_1 - d'a'_1 - c'b'_1 + b'c'_1 - a'd'_1.
\end{aligned}\right.$$

Nous aurons encore besoin de la relation suivante; soit δs un élément d'arc, $\delta s'$ son transformé par une substitution S, on a

$$\delta s' = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}\,\delta s.$$

Nous supposerons désormais, ce qui est permis,

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1.$$

Considérons un groupe discontinu de ces substitutions, et désignons par S_i une substitution quelconque du groupe. Soit

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 + U_i^2}.$$

La fonction $\frac{1}{R_i}$, et par conséquent l'une quelconque de ses dérivées partielles par rapport à a_i, b_i, c_i, d_i, a'_i, b'_i, c'_i, d'_i satisfait à l'équation $\Delta V = 0$. Je dis que la série

$$\sum_i \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R_i}\right)}{\partial a_i^{\alpha}\, \partial b_i^{\beta}\, \partial c_i^{\gamma}\, \partial d_i^{\delta}\, \partial a_i'^{\alpha'}\, \partial b_i'^{\beta'}\, \partial c_i'^{\gamma'}\, \partial d_i'^{\delta'}}$$

est convergente pour $n \geqq 5$.

En effet, M. Poincaré a indiqué, dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, comment on peut partager la sphère fondamentale en polyèdres par des surfaces sphériques orthogonales à cette sphère, de sorte que chacun de ces polyèdres contienne un représentant de chaque point donné. Imaginons dans l'intérieur d'un de ces polyèdres une petite sphère n'ayant aucun point commun avec la sphère fondamentale, et dont nous désignerons le volume par V; soit V_i le volume de la transformée de cette sphère par la substitution S_i. La somme de tous les volumes V_i est moindre que le volume de la sphère fondamentale, et par conséquent finie. La série

$$\sum_i V_i,$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, est donc convergente. Or on a

$$V_i = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{R_i^6},$$

l'intégration étant étendue à tous les points de la première sphère. Désignons par ξ_i, η_i, ζ_i le point que la substitution S_i transforme dans le point infini. On a

$$R_i^2 = (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2)[(x_0 - \xi_i)^2 + (y_0 - \eta_i)^2 + (z_0 - \zeta_i)^2],$$

Le point (ξ_i, η_i, ζ_i) est extérieur à la sphère fondamentale. Soit (x_0, y_0, z_0) un point pris à l'intérieur de la petite sphère considérée. Il résulte de la forme précédente de R_i^2 que

$$\frac{R_i^2}{R_{i0}^2} \leqq \frac{\rho'^2}{\rho^2},$$

ρ désignant la plus petite, et ρ' la plus grande des normales communes à la petite sphère et à la sphère fondamentale; donc

$$\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{R_i^6} > \frac{\rho^6}{\rho'^6} \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{R_{i0}^6},$$

$$V_i > \frac{\rho}{\rho'^6} \frac{V}{R_{i0}^6}.$$

Si donc la série

$$\sum_i V_i$$

est convergente, la série

$$\sum \frac{\rho^6}{\rho'^6} \frac{V}{R_{i0}^6},$$

ou, puisque ρ, ρ', V ne contiennent pas i, la série

$$\sum \frac{1}{R_{i0}^6},$$

est convergente. La série $\sum \frac{1}{R_{i0}^n}$ l'est *a fortiori* pour $n > 6$.

On reconnaît aisément, en formant les dérivées partielles successives de $\frac{1}{R_i}$ par rapport à a_i, b_i, c_i, ..., qu'une dérivée d'ordre n a pour numérateur un polynôme de degré n, soit par rapport à x, y, z entrant explicitement, soit par rapport à X_i, Y_i, Z_i, U_i, et pour dénominateur R_i^{2n+1}; cette dérivée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{\Sigma A_{pqrs} X_i^p Y_i^q Z_i^r U_i^s}{R_i^{2n+1}} \qquad (p+q+r+s = 2n+1),$$

A_{pqrs} étant un polynôme en x, y, z, par suite indépendant de i. Or

$X_i^p Y_i^q Z_i^r U_i^s$ est évidemment moindre en valeur absolue que R_i^n. La valeur absolue de la dérivée partielle considérée est donc moindre que

$$\frac{1}{R_i^{n+1}} \sum \operatorname{mod} A_{pqrs}.$$

Or, pour $n + 1 \geqq 6$, c'est-à-dire pour $n \geqq 5$, la série

$$\sum \frac{1}{R_i^{n+1}}$$

est convergente. Il en est donc de même de la série que nous avons en vue.

Nous pouvons donc poser, sous cette condition,

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \sum_i \frac{\partial^n\left(\frac{1}{R_i}\right)}{\partial a_i^\alpha\, \partial b_i^\beta\, \partial c_i^\gamma\, \partial d_i^\delta\, \partial a_i'^{\alpha'}\, \partial b_i'^{\beta'}\, \partial c_i'^{\gamma'}\, \partial d_i'^{\delta'}},$$

où φ désigne une fonction de x, y, z satisfaisant à l'équation $\delta\varphi = 0$.

Or, si dans $\frac{1}{R_i}$ on fait la substitution S_j, S_j appartenant au groupe, $\frac{1}{R_i}$ se transforme en $\frac{R_j}{R_g}$, S_g désignant le produit $S_i S_j$. On pourra donc poser

$$\frac{1}{R_i} = \frac{R_j}{R_g},$$

en sous-entendant que dans le premier membre R_i est exprimé en fonction des nouvelles coordonnées, et dans le second R_j et R_g en fonction des anciennes. Prenons les dérivées partielles des deux membres, en observant que les coefficients de la substitution S_g sont des coefficients linéaires, homogènes des coefficients de la substitution S_i données par les formules (2). On aura

$$\frac{1}{R_j}\,\frac{\partial^n\left(\frac{1}{R_i}\right)}{\partial a_i^\alpha\, \partial b_i^\beta\, \partial c_i^\gamma\, \partial d_i^\delta\, \partial a_i'^{\alpha'}\, \partial b_i'^{\beta'}\, \partial c_i'^{\gamma'}\, \partial d_i'^{\delta'}}$$

$$= \left[- a_j' \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial a_g} - b_j' \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial b_g} - c_j' \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial c_g} - d_j' \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial d_g} \right.$$

$$\left. + a_j \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial a_g} + b_j \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial b_g} + c_j \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial c_g} + d_j \frac{\partial\left(\frac{1}{R_g}\right)}{\partial d_g} \right]^\alpha$$

. . . . , les puissances indiquées sont des puissances symboliques. Nous aurons donc

$$\frac{1}{R_j}(\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'})\, S_j = \sum A_{j\,\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\, \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Les A étant des coefficients constants fonctions des coefficients de S_j, et la sommation étant étendue dans le second membre aux fonctions φ qui correspondent à toutes les dérivées partielles d'ordre n de $\frac{1}{R_i}$. Les fonctions φ forment donc un système zêtafuchsien.

III.

La construction de fonctions subissant par les substitutions d'un groupe des transformations plus simples paraît présenter d'assez grandes difficultés. Il n'est possible de trouver d'expressions analytiques que dans certains cas particuliers. Si l'on considère, par exemple, la fonction elliptique $\operatorname{sn}(u, k)$, la fonction $\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi i}\log z\right)$ est une fonction fuchsienne de z dont le groupe est engendré par la seule substitution z *in* $z q^2$, q étant égal à $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$. La fonction

$$F(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sn}\left\{\frac{2K}{\pi i}\log[x + i(y\cos\omega + z\sin\omega)]\right\} d\omega$$

satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, ne change pas de valeur par la substitution

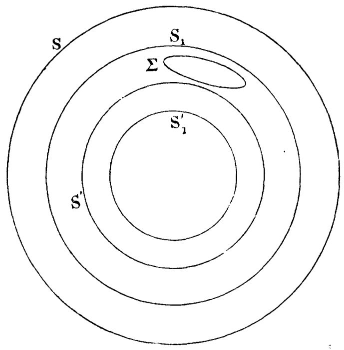
$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} x & in & xq^2, \\ y & in & yq^2, \\ z & in & zq^2, \end{array}\right.$$

et enfin ne présente que des pôles simples.

Pour les groupes les plus généraux, il paraît nécessaire de recourir à des méthodes analogues à celles qui ont été données par MM. Schwarz et Neumann pour la démonstration du principe de Dirichlet.

De l'origine des coordonnées comme centre, décrivons quatre sphères S, S′, S_1, S'_1 avec des rayons R, R′, R_1, R'_1 (*fig.* 1), R′ et R'_1 étant respectivement égaux à Rq^2 et à $R_1 q^2$ et R_1 étant compris entre R et R′. Soit Σ une surface comprise tout entière entre les deux sphères S′ et S_1. Je suppose que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet pour les volumes V et V_1 limités par Σ, S et S'; Σ, S_1 et S'_1. Je me propose de montrer comment on peut

Fig. 1.



former une fonction harmonique, finie et continue, prenant des valeurs données sur Σ et se transformant en elle-même par la substitution (1).

Je m'appuierai sur une proposition bien connue. Si la valeur d'une fonction harmonique et continue dans un volume donné est nulle sur une partie déterminée de la surface qui limite ce volume, le maximum de sa valeur absolue sur une surface contenue tout entière à l'intérieur de ce volume et n'atteignant en aucun point la surface, est moindre que le maximum de la valeur absolue de la fonction sur la surface limite multipliée par une constante positive λ inférieure à 1; λ dépend seulement de la surface limite, de la partie de cette surface sur laquelle la fonction est nulle et de la surface intérieure.

Formons une fonction φ_0 prenant sur Σ les valeurs données, sur S des valeurs prises arbitrairement (φ_0) et les mêmes valeurs aux points correspondants de S'; soient (φ_1) les valeurs que prend φ_0 sur S_1. Formons une fonction φ_1 prenant aux points correspondants de S_1 et de S'_1 les valeurs (φ_1) et les valeurs données sur Σ. Soient (φ_2) les valeurs que prend cette fonction sur S'; nous formerons une fonction φ_2 prenant sur S et S' les valeurs (φ_2) et les valeurs données sur Σ, et ainsi de suite. Je dis que la fonction φ_{2k} a une limite quand k croît indéfiniment. Il suffit de prouver que la série

$$\varphi_0 + (\varphi_2 - \varphi_0) + (\varphi_4 - \varphi_2) + \ldots + (\varphi_{2k} - \varphi_{2k-2}) + \ldots$$

est convergente. En effet, le maximum de la valeur absolue de $\varphi_{2k} - \varphi_{2k-2}$

est moindre que le maximum de la valeur absolue de $(\varphi_{2k})-(\varphi_{2k-2})$. D'ailleurs, en remarquant que $\varphi_{2k}-\varphi_{2k-2}$, $\varphi_{2k-1}-\varphi_{2k-3}$ sont nuls sur Σ, on a

$$\max[(\varphi_{2k})\ -(\varphi_{2k-2})] < \lambda_1 \max[(\varphi_{2k-1})-(\varphi_{2k-3})],$$
$$\max[(\varphi_{2k-1})-(\varphi_{2k-3})] < \lambda \max[(\varphi_{2k-2})-(\varphi_{2k-4})],$$

λ et λ_1 étant des constantes positives moindres que 1 dépendant, la première des surfaces Σ, S_1, S'_1, la seconde des surfaces Σ, S, S'. La série converge donc comme une progression géométrique ayant pour raison $\lambda\lambda_1$.

On démontrerait de même que φ_{2k+1} a une limite. Enfin on voit immédiatement que les valeurs de la différence $\varphi_{2k}-\varphi_{2k+1}$ sur S_1 et sur S' tendent vers o. Donc la fonction $\varphi_{2k}-\varphi_{2k+1}$ tend vers o dans le volume limité par S_1, par S' et par Σ. Les limites de φ_{2k} et de φ_{2k+1} sont donc deux fonctions qui sont le prolongement l'une de l'autre. Désignons par φ la fonction ainsi obtenue; elle prend sur Σ les valeurs données et aux points correspondants de S et de S', de S_1 et de S'_1 les mêmes valeurs. Il en résulte qu'elle se reproduit par la substitution (1). En effet, soit φ' ce que devient φ par la substitution (1), la fonction $\varphi-\varphi'$ est nulle sur S' et sur S'_1; donc elle est nulle dans le volume limité par ces deux sphères, et la fonction prolongée est nulle dans tout l'espace.