SUR LES

FORMES BILINÉAIRES,

PAR M. E. COSSERAT.

MM. Jordan (¹) et Kronecker ont considéré, en se bornant à l'étude du cas le plus général, le problème suivant :

Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n,\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

le ramener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les autres sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

M. Sylvester (²) a repris tout récemment l'étude de la même question.

Nous nous proposons actuellement d'établir quelques-unes des propositions que nous n'avons fait qu'indiquer dans un travail antérieur publié au tome III de ce Recueil.

Rappelons tout d'abord le résultat obtenu par M. Jordan.

Considérons l'équation

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & a_{11} & a_{12} & \ldots \\ 0 & -\lambda & 0 & \ldots & a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdots & -\lambda & 0 & \ldots \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdots & 0 & -\lambda & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) C. JORDAN, *Mémoire sur les formes bilinéaires* (*Journal de Liouville,* 2ᵉ série, t. XIX, p. 35-54).

(²) SYLVESTER, *Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique* (*Comptes rendus,* t. CVIII, p. 651).

qui ne contient que des puissances paires de λ et dont les coefficients restent invariables, quelque substitution orthogonale que l'on opère sur les x ou sur les y. Supposons que toutes les racines soient distinctes et désignons-les par

$$\lambda_1, \quad -\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad -\lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad -\lambda_n.$$

Les équations suivantes

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \tag{1}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1; \tag{1'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = \lambda_\rho x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = \lambda_\rho x_n; \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = \lambda_\rho y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda_\rho y_n, \end{array}\right. \tag{2'}$$

résolues par rapport aux x et aux y, donnent pour les valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (le signe étant choisi à volonté)

$$x_1 = \pm c_{1\rho} \ldots x_n = \pm c_{n\rho}, \qquad y_1 = \pm d_{1\rho} \ldots y_n = \pm d_{n\rho}.$$

Si l'on considère la substitution

$$\xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + c_{2\rho}x_2 + \ldots + c_{n\rho}x_n, \qquad \eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \ldots + d_{n\rho}y_n,$$

on opère la réduction à la forme canonique

$$P = \lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n.$$

Le résultat de M. Jordan peut être présenté sous une forme qui en rend la démonstration presque intuitive et qui facilite l'étude du cas où l'équation $D = 0$ a des racines multiples.

Remplaçons dans les équations (2) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs valeurs tirées des équations (2)', il vient

$$\begin{array}{l} a_{11}(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n) + \ldots = \lambda_\rho^2 x_1, \\ a_{21}(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_\rho^2 x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Considérons la forme quadratique

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n)^2 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n)^2 + \ldots$$

et proposons-nous de la réduire à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale. L'équation en s relative à cette forme s'obtiendra manifestement en remplaçant λ^2 par s dans l'équation $D = o$, et la substitution sera

$$\xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + c_{2\rho}x_2 + \ldots + c_{n\rho}x_n;$$

de plus, si la forme canonique du polynôme bilinéaire P est

$$\lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n,$$

la forme $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ deviendra

$$\lambda_1^2\xi_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\xi_n^2.$$

De même, si l'on considère la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$, elle deviendra

$$\lambda_1^2\eta_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\eta_n^2;$$

par la substitution,

$$\eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \ldots + d_{n\rho}y_n.$$

Le résultat de M. Jordan peut donc s'énoncer de la façon suivante :

Le problème de la réduction de la forme bilinéaire $P = \sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ *à la forme canonique* $\lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n$ *par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, les autres sur les variables* $y_1, \ldots, y_n$*, est identique au suivant :*

Déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux deux formes $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ *et* $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$*, les réduisent à des sommes de carrés.*

Sous cette forme, le résultat peut être établi immédiatement.

En effet, nous nous proposons de déterminer deux substitutions orthogonales

$$(3)\qquad \xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + \ldots + c_{n\rho}x_n, \qquad \eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \ldots + d_{n\rho}y_n$$

telles que la forme P devienne

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n.$$

Or, si l'on considère $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$, on aura identiquement

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 = \lambda_1^2 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \xi_n^2,$$

en supposant les relations (3); cela résulte de ce que la forme du paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction n'est pas altérée par une substitution orthogonale effectuée sur les variables.

Si nous remarquons que $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ ne dépend que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous avons cette conclusion que la substitution $\xi_\rho = c_{1\rho} x_1 + \ldots + c_{n\rho} x_n$ est la substitution orthogonale qui réduit la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ à une somme de carrés; on arrive à une conclusion semblable en considérant $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$, et d'ailleurs les équations en s relatives aux deux formes $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ sont identiques.

Réciproquement, si les formes $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ sont réduites respectivement à $\lambda_1^2 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \xi_n^2$ et à $\lambda_1^2 \eta_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \eta_n^2$, la forme bilinéaire P sera réduite à $\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n$.

On rencontre en Géométrie des formes bilinéaires particulièrement remarquables : elles correspondent au cas où l'on a, pour toutes les valeurs des indices i et j,

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ij} = -a_{ji}.$$

Le polynôme bilinéaire considéré est de la forme

$$P = \frac{1}{2} \sum a_{ik} p_{ik},$$

en posant

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

On peut écrire

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 = -\sum A_{ij} x_i x_j,$$

en posant

$$A_{ij} = a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \ldots + a_{in} a_{nj},$$

et l'on a l'identité suivante :

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}+x & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette identité est le carré d'un polynôme entier en x. Or, si dans le premier membre on remplace x^2 par $-\lambda^2$ et si l'on égale à zéro le résultat, on a l'équation $D=0$ considérée au début. Donc, dans le cas particulier que nous considérons, le premier membre de cette équation est un carré parfait, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le premier membre de l'équation en s relative à la forme bilinéaire $\frac{1}{2}\sum a_{ik}p_{ik}$, *considérée comme forme quadratique des* $2n$ *variables* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, *est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en* $-s^2$ *est l'équation en s relative à la forme quadratique* $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ *des* n *variables* $x_1, \dots, x_n$.

Les formes quadratiques $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ et $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ deviennent identiques si l'on remplace x_i et y_i par une même lettre z_i. Le problème proposé revient donc à la réduction d'une seule forme quadratique à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

De plus, on conçoit la possibilité d'opérer sur les x et sur les y la même substitution, en sorte que le polynôme bilinéaire $\frac{1}{2}\sum a_{ik}p_{ik}$ *conserve la même forme et devienne* $\frac{1}{2}\sum \mathcal{A}_{ik}\mathfrak{P}_{ik}$.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue et, afin d'étudier de plus près la question, cherchons à lui appliquer les principes utilisés par M. Jordan dans le cas général.

Nous nous bornerons à considérer le cas où $n=5$; le cas où $n=4$ sera également traité; car, si n est impair, l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y_i}\right)^2$ admet la racine simple $s=0$; on peut, par suite, ramener immédiatement ce cas à celui où n est pair. Les résultats que nous obtiendrons pourront facilement se généraliser. Ajoutons que, dans le cas que nous considérons, où $n=5$, ils ont une interprétation géométrique intéressante dans la théorie des systèmes linéaires de cercles, qui, inversement, permet de les établir géométriquement.

Soit donc

$$\mathrm{P}=\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha=1,2,3,4,5,\quad \beta=1,2,3,4,5),$$

avec

$$a_{\alpha\alpha}=0, \qquad a_{\alpha\beta}=-a_{\beta\alpha}.$$

La réduction de P à une forme plus simple dépend de la solution du problème suivant :

Trouver les maxima et minima de P, *lorsque les variables x et y restent assujetties aux relations*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=1, \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2=1.$$

Les valeurs des variables correspondant au maximum (ou au minimum) sont données par le système

$$(1)\quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=1, \qquad\qquad (1)'\quad y_1^2+y_2^2+\ldots+y_5^2=1,$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \phantom{a_{21}y_1+{}} a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4+a_{15}y_5=\lambda x_1,\\ a_{21}y_1 \phantom{+a_{12}y_2} +a_{23}y_3+a_{24}y_4+a_{25}y_5=\lambda x_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{51}y_1+a_{52}y_2+a_{53}y_3+a_{54}y_4 \phantom{+a_{55}y_5} =\lambda x_5, \end{array}\right. \qquad (2)'\left\{\begin{array}{l} \phantom{a_{21}x_1+{}} a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=-\lambda y_1,\\ a_{21}x_1 \phantom{+a_{12}x_2} +a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=-\lambda y_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{51}x_1+a_{52}x_2+a_{53}x_3+a_{54}x_4 \phantom{+a_{55}x_5} =-\lambda y_5. \end{array}\right.$$

Le maximum est égal à λ, inconnue déterminée par l'équation

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & \ldots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & . & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots & . & \ldots \\ . & . & . & . & \lambda & \ldots & . & \ldots \\ 0 & a_{21} & . & . & . & \lambda & 0 & \ldots \\ a_{12} & 0 & . & . & . & 0 & \lambda & \ldots \\ \ldots & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}=0.$$

L'équation $\mathrm{D}=0$ a ses coefficients invariables pour toute substitution orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres x_1, $x_2, \ldots, x_5$ et $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Elle est identique à l'équation en s relative à la forme bilinéaire considérée comme forme quadratique des dix variables x_1, $x_5, y_1, \ldots, y_5$.

Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux que nous appellerons α, et posons

$$\Omega_\alpha(a) = a_{\beta\gamma}a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta}a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon}a_{\gamma\delta},$$

$$\mathrm{I} = \sum_{ij} a_{ij}^2, \qquad \mathrm{J} = \sum_\alpha (a_{\beta\gamma}a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta}a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon}a_{\gamma\delta})^2.$$

L'équation $\mathrm{D} = 0$ s'écrit

$$\mathrm{D} = \lambda^2(\lambda^4 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{J})^2 = 0.$$

Soit λ_1 une racine de l'équation $\lambda^4 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{J} = 0$. Les équations (2) et (2)' feront connaître en général les rapports des quantités correspondantes $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$. On achèvera de les déterminer, au signe près, en employant l'une ou l'autre des équations (1), (1)'. [On remarquera que l'on a

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 = y_1^2 + \ldots + y_5^2$$

en vertu de (2), (2)'].

Considérons donc un système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad x_2 = \alpha_{21}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

A la racine $-\lambda_1$, de $\mathrm{D} = 0$, correspond manifestement le système de solutions suivant :

$$x_1 = \alpha_{12}, \quad x_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{52}, \quad y_1 = \alpha_{11}, \quad y_2 = \alpha_{21}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{51}.$$

On a

$$\begin{array}{l} \phantom{a_{21}\alpha_{12}} \quad a_{21}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} + a_{14}\alpha_{42} + a_{15}\alpha_{52} = \lambda_1\alpha_{11}, \\ a_{21}\alpha_{12} \qquad\qquad\quad + a_{23}\alpha_{32} + a_{24}\alpha_{42} + a_{25}\alpha_{52} = \lambda_1\alpha_{21}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{51}\alpha_{12} + a_{52}\alpha_{22} + a_{53}\alpha_{32} + a_{54}\alpha_{42} + \qquad\quad = \lambda_1\alpha_{51}. \end{array}$$

Multiplions les deux membres de ces relations respectivement par $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{52}$, et ajoutons; il vient

$$\lambda_1(\alpha_{11}\alpha_{12} + \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire, puisque λ_1 n'est pas nul,

$$\alpha_{11}\alpha_{12}+\ldots=0.$$

Cela posé, $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{51}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{52}$ satisfaisant aux équations (1), (1)', on sait que l'on pourra déterminer deux substitutions orthogonales de la forme

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3+\alpha_{41}x_4+\alpha_{51}x_5,\\
\xi_2 &= \alpha_{12}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{52}x_5,\\
\xi_3 &= A_{13}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{53}x_5,\\
\xi_4 &= A_{14}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{54}x_5,\\
\xi_5 &= A_{15}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{55}x_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \alpha_{11}y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3+\alpha_{41}y_4+\alpha_{51}y_5,\\
\eta_2 &= \alpha_{12}y_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{52}y_5,\\
\eta_3 &= A_{13}y_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{53}y_5,\\
\eta_4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$A_{13}, \ldots, A_{55}$ étant des coefficients convenablement choisis.

Substituant dans l'expression des nouvelles variables les valeurs

$$x_1=\alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5=\alpha_{51}, \quad y_1=\alpha_{12}, \quad y=\alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5=\alpha_{52},$$

on voit que P sera maximum pour

$$\xi_1=\eta_2=1, \qquad \xi_2=\xi_3=\xi_4=\xi_5=\eta_1=\eta_3=\eta_4=\eta_5=0.$$

Or, soit $\Sigma\mathcal{A}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta$ ce que devient P rapporté à ces nouvelles variables; on aura, pour déterminer les valeurs de ces variables correspondant au maximum, les relations

$$\begin{aligned}
&\xi_1^2+\ldots+\xi_5^2=1, && \eta_1^2+\ldots+\eta_5^2=1,\\
&\mathcal{A}_{12}\eta_2+\ldots=\lambda_1\xi_1, && \mathcal{A}_{21}\xi_2+\ldots=\lambda_1\eta_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{A}_{51}\eta_1+\ldots=\lambda_1\xi_5, && A_{15}\xi_1+\ldots=\lambda_1\eta_5,
\end{aligned}$$

analogues à (1), (1)', (2), (2)'. Et, pour qu'elles soient satisfaites pour $\xi_1=\eta_2=1$ et $\xi_2=\xi_3=\ldots=\eta_5=0$, il faudra que l'on ait

$$\mathcal{A}_{12}=\lambda_1, \qquad \mathcal{A}_{13}=\mathcal{A}_{14}=\mathcal{A}_{15}=0:$$

donc P se réduira à la forme

$$\lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + P_1,$$

P_1 étant indépendant de ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 et de même forme que P.

Opérant sur P_1 comme sur P, on pourra le mettre sous la forme

$$\lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) + P_2;$$

P_2, ne dépendant pas de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, η_1, η_2, η_3, η_4, est nul; donc on est parvenu à mettre P sous la forme canonique

$$P = \lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4).$$

Les coefficients de l'équation $D = 0$ sont invariables pour toute substitution orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$. Or cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & -\lambda_1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\lambda(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)]^2 = 0.$$

On peut donc calculer *a priori* les coefficients de la forme canonique en résolvant l'équation caractéristique $D = 0$.

On peut également, lorsque l'équation $\sqrt{D} = 0$ a ses racines inégales, calculer *a priori* les coefficients d'une des substitutions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \xi_1 = C_{11}x_1 + \ldots + C_{51}x_5, & \eta_1 = C_{11}y_1 + \ldots + C_{51}y_5, \\ \xi_2 = C_{12}x_1 + \ldots + C_{52}x_5, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_5 = C_{15}x_1 + \ldots + C_{55}x_5, & \end{array} \right.$$

que l'on doit employer pour opérer la réduction à la forme canonique.

Considérons la racine λ_1. On aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_5, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_5$ qui donnent le maximum, les relations

$$\begin{array}{rlrl} \lambda_1\eta_2 = & \lambda_1\xi_1, & \lambda_1\xi_2 = & -\lambda_1\eta_1, \\ -\lambda_1\eta_1 = & \lambda_1\xi_2, & -\lambda_1\xi_1 = & -\lambda_1\eta_2, \\ \lambda_2\eta_4 = & \lambda_1\xi_3, & \lambda_2\xi_4 = & -\lambda_1\eta_3, \\ -\lambda_2\eta_3 = & \lambda_1\xi_4, & -\lambda_2\xi_3 = & -\lambda_1\eta_4, \\ 0 = & \lambda_1\xi_5, & 0 = & -\lambda_1\eta_5, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\eta_2 = \xi_1, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,$$
$$\eta_1 = -\xi_2, \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1,$$
$$\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0.$$

Les équations (3), résolues par rapport aux x et aux y, donneront les valeurs correspondantes de $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$, à savoir :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = C_{11}\xi_1 + C_{12}\xi_2, & y_1 = -C_{11}\xi_2 + C_{12}\xi_1, \\ x_2 = C_{21}\xi_1 + C_{22}\xi_2, & y_2 = -C_{21}\xi_2 + C_{22}\xi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_5 = C_{51}\xi_1 + C_{52}\xi_2, & y_5 = -C_{51}\xi_2 + C_{52}\xi_1, \end{array} \right.$$

avec

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

Or revenons aux équations (1), (1)′, (2), (2)′. Si les équations linéaires (2), (2)′ admettent comme système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52},$$

elles admettent aussi

$$x_1 = \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{52}, \quad y_1 = -\alpha_{11}, \quad \ldots, \quad y_5 = -\alpha_{51}$$

et, par suite,

$$x_1 = \lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12}, \quad \ldots, \quad x_5 = \lambda\alpha_{51} + \mu\alpha_{52}, \quad y_1 = \lambda\alpha_{12} - \mu\alpha_{11}, \quad \ldots.$$

Donc le système des équations (1), (1)′, (2), (2)′ admet

$$(5) \qquad x_1 = \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{12}, \quad \ldots, \quad y_1 = -\xi_2\alpha_{11} + \xi_1\alpha_{12}, \quad \ldots,$$

en supposant la relation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

On voit que, si l'on a *un* système de solutions de (2), (2)′

$$\alpha_{11}, \quad \ldots, \quad \alpha_{51}, \quad \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad \alpha_{52},$$

on a la *solution générale* des (1) par ces dernières formules (5); cela résulte de la considération des formules (4), qui donnent la solution générale.

La comparaison des formules (4) et (5) montre de plus qu'on a, pour $C_{11}, \ldots,$ le système le plus général de solutions par

$$C_{11} = \zeta_1 \alpha_{11} + \zeta_2 \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad C_{12} = -\zeta_2 \alpha_{11} + \zeta_1 \alpha_{12}, \quad \ldots$$

avec

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1.$$

Répétant le raisonnement pour λ_2, on aura de même la forme générale des $C_{13}, \ldots, C_{54}$.

Arrivons à $C_{15}, C_{25}, C_{35}, C_{45}, C_{55}$.

Les équations (1) sont vérifiées par

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}$$

et

$$y_1 = \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

Le déterminant des coefficients des y étant nul, on obtient, en multipliant par les mineurs du premier ordre, ou par $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$,

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 \alpha_{11} + \Omega_2 \alpha_{21} + \ldots + \Omega_5 \alpha_{51} = 0,\\
&\Omega_1 \alpha_{12} \qquad\qquad\;\; + \ldots + \Omega_5 \alpha_{52} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 C_{11} + \ldots + \Omega_5 C_{51} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Par suite,

$$C_{15} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_1, \quad C_{25} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_2, \quad \ldots, \quad C_{55} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_5.$$

Ces dernières formules peuvent être écrites immédiatement : si l'on se reporte à la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$, ces coefficients correspondent à la racine $s = 0$ de l'équation en s.

Remarquons que, si l'on effectue une substitution orthogonale, telle que l'on ait

$$\xi_5 = C_{15} x_1 + \ldots + C_{55} x_5, \quad \eta_5 = C_{15} y_1 + \ldots + C_{55} y_5,$$

la forme bilinéaire devient

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \mathcal{A}_{ik} \mathfrak{P}_{ik}$$

et l'on a

$$\mathcal{A}_{15} = \mathcal{A}_{25} = \mathcal{A}_{35} = \mathcal{A}_{45} = 0.$$

Remarquons enfin que, dans le cas où $J = 0$, le problème est impossible. Le problème général de M. Jordan est lui-même impossible dans ce cas. On ne peut pas réduire la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ à une somme de carrés par l'emploi d'une substitution orthogonale; car, si l'on considère la racine $s = 0$ de l'équation en s, les coefficients de la substitution qui lui correspondent sont proportionnels à $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$, et l'on a par hypothèse $\Sigma \Omega_i^2 = 0$.

Il reste, pour compléter ce qui précède, à indiquer le mode de formation des équations en λ pour les différentes valeurs de n. Le premier membre de l'une quelconque de ces équations est un carré parfait; dans l'équation obtenue en annulant la racine carrée, on posera $\lambda = is$; les coefficients de l'équation obtenue s'expriment élégamment, ainsi qu'il est aisé de le voir, à l'aide des déterminants gauches symétriques de M. Cayley.