SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE

A COEFFICIENTS CONSTANTS,

PAR M. P. APPELL.

1. Soit une équation différentielle

$$(1) \qquad \psi(y'', y', y) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme homogène irréductible par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées y', y'' : les coefficients de ce polynôme sont supposés *constants,* c'est-à-dire indépendants de x. L'intégration de l'équation se ramène immédiatement aux quadratures : il suffit, en effet, de poser

$$y = e^{\int u\,dx}, \qquad y' = uy, \qquad y'' = (u^2 + u')y$$

pour obtenir une équation du premier ordre

$$(2) \qquad \psi(u^2 + u', u, 1) = 0$$

donnant x en fonction de u par une intégrale abélienne.

Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut trouver des solutions de l'équation (1) ayant la forme spéciale

$$y = Ce^{rx},$$

C désignant une constante arbitraire et r une constante, racine de l'équation

$$(3) \qquad \varphi_n(r) = \psi(r^2, r, 1) = 0.$$

Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières :* on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire.

Nous allons montrer que certaines de ces intégrales peuvent être *particulières,* d'autres *singulières,* en donnant en même temps le moyen de reconnaître si une de ces intégrales est particulière ou singulière. On verra que, dans des cas limites, toutes les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx}$$

peuvent être particulières, ou toutes singulières [1].

2. L'équation (2) obtenue en faisant

$$y = e^{\int u\,dx}$$

est de la forme

$$(3) \qquad u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \ldots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0,$$

où $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ sont des polynômes, dont le dernier $\varphi_n(u)$ a pour racines les constantes r donnant les solutions

$$y = Ce^{rx}.$$

Soit r une racine de $\varphi_n(u)$: il est évident que

$$u = r$$

sera une intégrale de l'équation (3); il s'agit de voir si cette intégrale doit être regardée comme particulière ou comme singulière.

Lorsque l'on fait $u = r$, l'équation (3) en u' a au moins une racine nulle. Supposons d'abord qu'elle n'en ait qu'une, c'est-à-dire que la valeur $u = r$ n'annule pas $\varphi_{n-1}(u)$: alors l'intégrale $u = r$ est *particulière* par rapport à la branche de la fonction intégrale dont la dérivée s'annule pour $u = r$. En effet, comme pour $u = r$ une seule valeur de u' s'annule, cette valeur est, pour des valeurs de u voisines de r, développable en une série de la forme [2]

$$u' = a(u-r)^p[1 + a_1(u-r) + a_2(u-r)^2 + \ldots],$$

---

[1] Pour la théorie des intégrales singulières des équations du premier ordre, consulter les travaux de MM. Darboux (*Comptes rendus,* 1870) et Cayley (*Messenger of Mathematics,* 1872, 1876) et une Note de M. Kapteyn (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 1888). Pour les intégrales singulières des équations du second ordre, nous signalerons un travail de M. Goursat (*American Journal,* t. XII).

[2] *Voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques,* Livre V.

p étant un entier positif. On tire de là

$$a\,dx = \frac{du}{(u-r)^p}[1 + A_1(u-r) + A_2(u-r)^2 + \ldots]$$

et, en cherchant l'intégrale qui se réduit à u_0 pour $x = 0$,

$$(4) \qquad a x = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1}[(u-r)^{s-p+1} - (u_0 - r)^{s-p+1}],$$

où $A_0 = 1$ et où le terme correspondant à $s = p - 1$ doit être remplacé par

$$A_{p-1} \log \frac{u-r}{u_0 - r}.$$

En écrivant cette intégrale

$$\begin{aligned} a x(u-r)^{p-1}(u_0-r)^{p-1} \\ = \frac{(u-r)^{p-1} - (u_0-r)^{p-1}}{p-1} \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1}[(u-r)^s(u_0-r)^{p-1} - (u_0-r)^s(u-r)^{p-1}], \end{aligned}$$

on voit que, lorsque u_0 tend vers r, tous les termes s'annulent, excepté $(u-r)^{p-1}$: on trouve donc, en faisant tendre u_0 vers r,

$$(u-r)^{p-1} = 0, \qquad u = r;$$

ce qui montre que $u = r$ est bien une intégrale *particulière* pour la branche considérée de l'intégrale générale. On verra sans peine comment il faudra modifier le calcul précédent dans le cas particulier où $p = 1$; les premiers termes du développement (4) sont alors des logarithmes; la conclusion subsiste, $u = r$ est intégrale *particulière*.

Supposons maintenant que la valeur considérée $u = r$ annule non seulement $\varphi_n(u)$, mais aussi $\varphi_{n-1}(u)$, $\varphi_{n-2}(u)$, ... Alors, quand u tend vers r, plusieurs des valeurs de u' définies par l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \ldots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0$$

tendent vers zéro. Ces valeurs se partagent en systèmes circulaires composés de racines qui se permutent dans le voisinage de $u = r$. Pour l'un de ces systèmes circulaires, on aura

$$(5)\qquad u' = a(u-r)^{\frac{p}{q}}\left[1 + a_1(u-r)^{\frac{1}{q}} + a_2(u-r)^{\frac{2}{q}} + \ldots\right],$$

p et q étant des entiers positifs. On vérifiera par un calcul identique au précédent que, si

$$\frac{p}{q} \geqq 1,$$

la solution

$$u = r$$

doit être regardée comme une intégrale *particulière*, pour la branche de la fonction intégrale satisfaisant à l'équation (5).

Mais, si

$$\frac{p}{q} < 1,$$

cette solution $u = r$ devra être regardée comme une intégrale *singulière*. En effet, cherchons, comme plus haut, l'intégrale u qui se réduit à u_0 pour $x = 0$; nous verrons que cette intégrale ne tend pas vers $u = r$ quand u_0 tend vers r. Pour cela nous pouvons procéder comme plus haut : écrivons l'équation

$$a\,dx = \frac{du}{(u-r)^{\frac{p}{q}}}\left[1 + A_1(u-r)^{\frac{1}{q}} + A_2(u-r)^{\frac{2}{q}} + \ldots\right];$$

d'où, en intégrant,

$$ax = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{qA_s}{s-p+q}\left[(u-r)^{\frac{s-p+q}{q}} - (u_0-r)^{\frac{s-p+q}{q}}\right],$$

la constante A_0 ayant la valeur 1. Actuellement tous les exposants du second membre sont *positifs*, puisque $\frac{p}{q} < 1$: si donc on fait tendre u_0 vers r, l'intégrale précédente tend vers la fonction u définie par l'équation

$$ax = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{qA_s}{s-p+q}(u-r)^{\frac{s-p+q}{q}},$$

fonction qui n'est pas du tout $u = r$. L'intégrale $u = r$ est donc *singulière*. On arriverait également à cette conclusion en faisant dans l'équation (5) la substitution

$$u - r = v^q.$$

Il peut, d'après cela, arriver qu'une même solution $u = r$ doit être envisagée comme particulière ou comme singulière, suivant qu'on la compare à l'une ou à l'autre des branches de la fonction intégrale.

Les règles précédentes permettront de reconnaître facilement si une solution $u = r$ est particulière ou singulière. Par exemple, si l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1}\varphi_1(u) + \ldots + u'\varphi_{n-1}(u) + \varphi_0(u) = 0$$

est telle que l'intégrale abélienne

$$x = \int \frac{du}{u'}$$

soit de première espèce, c'est-à-dire reste partout finie, toutes les solutions de la forme $u = r$ seront *singulières*.

3. Si nous revenons aux équations algébriques homogènes à coefficients constants en y, y', y'',

$$\psi(y'', y', y) = 0,$$

nous sommes maintenant en mesure de reconnaître, parmi les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

celles qui sont particulières et celles qui sont singulières. Nous allons traiter comme exemple le cas le plus simple, à savoir le cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré

$$(6) \qquad \psi(y'', y', y) = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0,$$

les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 étant supposés constants. Cette équation admet des intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

r étant racine de l'équation de quatrième degré

$$\varphi_2(r) = a_0 r^4 + 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Si nous faisons

$$y = e^{\int u\,dx}, \qquad y' = uy, \qquad y'' = (u' + u^2) y,$$

l'équation différentielle devient

$$a_0 u'^2 + 2u'(a_0 u^2 + b_1 u + b_2) + \varphi_2(u) = 0.$$

Dans le cas particulier où $a_0 = 0$, cette équation est du premier degré en u'; les trois valeurs de u qui annulent $\varphi_2(u)$ donnent alors des intégrales *particulières*.

Supposons maintenant a_0 différent de zéro. Si aucune des racines du polynôme du quatrième degré $\varphi_2(u)$ n'annule le trinôme

$$\varphi_1(u) = a_0 u^2 + b_1 u + b_2,$$

les quatre intégrales obtenues en égalant u à l'une des racines de $\varphi_2(u)$ sont *particulières;* les solutions de la forme

$$y = Ce^{rx}$$

de l'équation (6) sont donc toutes *particulières*. Si une racine simple de $\varphi_2(u)$ annule le trinôme $\varphi_1(u)$, la solution correspondante est *singulière;* les autres sont *particulières*.

Si deux racines simples de $\varphi_2(u)$ annulent le trinôme $\varphi_1(u)$, les deux intégrales correspondantes sont *singulières;* les deux autres sont *particulières*.

4. Ce dernier cas est remarquable en ce que l'intégrale générale peut se mettre, dans ce cas, sous une forme particulièrement simple. En effet, puisque $\varphi_2(u)$ est divisible par $\varphi_1(u)$, on peut écrire

$$\varphi_2(u) = \varphi_1(u)(u^2 + 2\alpha u + \beta)$$

ou, en développant et identifiant,

$$b_1 = 2\alpha a_0, \qquad a_4 = \beta b_2, \qquad \ldots.$$

Cela posé, l'équation en u

$$a_0 u'^2 + 2u'\varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0$$

s'écrit en divisant tous les termes par a_0, remplaçant $\varphi_2(u)$ par sa valeur

$$\varphi_1(u)(u^2 + 2\alpha u + \beta),$$

et posant $\frac{b_2}{a_0} = \gamma$,

$$u'^2 + 2u'(u^2 + 2\alpha u + \gamma) + (u^2 + 2\alpha u + \beta)(u^2 + 2\alpha u + \gamma) = 0. \tag{7}$$

Si l'on appelle r' et r'' les racines du trinôme $u^2 + \alpha u + \beta$ supposées distinctes, et ρ' et ρ'' celles du trinôme $u^2 + \alpha u + \gamma$ supposées également distinctes, les solutions

$$\mathrm{C}e^{r'x}, \quad \mathrm{C}e^{r''x}$$

seront *particulières,* les solutions

$$\mathrm{C}e^{\rho'x}, \quad \mathrm{C}e^{\rho''x}$$

seront *singulières*. Pour obtenir d'une façon simple l'intégrale générale, posons

$$u + \alpha = v, \qquad u = \frac{y'}{y}, \qquad v = \frac{z'}{z},$$

d'où

$$\frac{y'}{y} + \alpha = \frac{z'}{z}, \qquad y = ze^{-\alpha x};$$

l'équation deviendra

$$v'^2 + 2v'(v^2 + \gamma - \alpha^2) + (v^2 + \beta - \alpha^2)(v^2 + \gamma - \alpha^2) = 0$$

ou, en écrivant β' et γ' à la place des constantes $\beta - \alpha^2$, $\gamma - \alpha^2$,

$$(v' + v^2)^2 + \gamma'(2v' + v^2) + \beta'(v^2 + \gamma') = 0$$

et, en revenant à la fonction z par les formules

$$v = \frac{z'}{z}, \qquad v' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2,$$

$$(8) \qquad \chi(z'', z', z) = z''^2 + \gamma'(2zz'' - z'^2) + \beta'(z'^2 + \gamma' z^2) = 0.$$

Différentiant enfin cette équation par rapport à x, on trouve

$$(9) \qquad \frac{d\chi}{dx} = 2(z''' + \beta' z')(z'' + \gamma' z) = 0.$$

Donc toute solution de l'équation (9) annule l'un des deux facteurs linéaires

$$z''' + \beta' z', \quad z'' + \gamma' z.$$

Intégrons d'abord l'équation

$$z''' + \beta' z' = 0,$$

linéaire et à coefficients constants. Son intégrale générale est

$$z = \mathrm{C} + \mathrm{C}' e^{x\sqrt{-\beta'}} + \mathrm{C}'' e^{-x\sqrt{-\beta'}}, \tag{10}$$

ou encore

$$z = \mathrm{C} + \mathrm{C}' e^{(r'+\alpha)x} + \mathrm{C}'' e^{(r''+\alpha)x}, \tag{10'}$$

puisque r' et r'' sont les racines de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \beta = 0, \qquad (r+\alpha)^2 + \beta' = 0.$$

Si l'on substitue cette intégrale dans le premier membre de l'équation différentielle (8), ce premier membre $\chi(z'', z', z)$ prendra une valeur constante, puisque sa dérivée deviendra nulle. Cette valeur constante sera évidemment une forme quadratique de C, C′, C″ : en égalant cette forme à zéro, on aura une relation déterminant une des constantes C, C′, C″ en fonction des deux autres; sous cette condition, l'expression (10) sera l'intégrale générale de l'équation en z. Ainsi l'intégrale générale de l'équation (8) en z est de la forme remarquable

$$z = \mathrm{C} + \mathrm{C}' e^{(r'+\alpha)x} + \mathrm{C}'' e^{(r''+\alpha)x}, \tag{10'}$$

C, C′, C″ étant liés par une certaine relation algébrique obtenue en égalant à zéro une forme quadratique de C, C′, C″. L'intégrale générale de l'équation en y sera, puisque $y = ze^{-\alpha x}$,

$$y = \mathrm{C}e^{-\alpha x} + \mathrm{C}' e^{r'x} + \mathrm{C}'' e^{r''x}.$$

Pour former la relation qui lie C, C′, C″, remplaçons z par l'expression (10) dans le premier membre $\chi(z'', z', z)$ de l'équation (8). Comme l'expression (10) donne

$$z'' = \beta'(\mathrm{C} - z),$$

nous aurons d'abord

$$\chi(z'', z', z) = (\beta' - \gamma')[\beta'(\mathrm{C} - z)^2 + z'^2] + \mathrm{C}^2\beta'\gamma',$$

puis, comme

$$\beta'(\mathrm{C} - z)^2 + z'^2 = \beta'\left[\left(\mathrm{C}' e^{x\sqrt{-\beta'}} + \mathrm{C}'' e^{-x\sqrt{-\beta'}}\right)^2 - \left(\mathrm{C}' e^{x\sqrt{-\beta'}} - \mathrm{C}'' e^{-x\sqrt{-\beta'}}\right)^2\right] = 4\beta'\mathrm{C}'\mathrm{C}'',$$

nous aurons enfin

$$\chi(z'', z', z) = 4\beta'(\beta' - \gamma')\mathrm{C}'\mathrm{C}'' + \mathrm{C}^2\beta'\gamma',$$

valeur qui est bien constante. Si donc on établit entre C, C′, C″ la relation

$$4(\beta' - \gamma')C'C'' + \gamma' C^2 = 0,$$

l'expression (10) est l'intégrale générale de l'équation. Faisons, pour simplifier,

$$C' = \lambda^2, \qquad C'' = \mu^2, \qquad C = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu,$$

nous verrons que l'intégrale générale de l'équation (8) en z est

$$z = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu + \lambda^2 e^{(r'+\alpha)x} + \mu^2 e^{(r''+\alpha)x},$$

et, par suite, celle de l'équation en y,

$$y = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu e^{-\alpha x} + \lambda^2 e^{r'x} + \mu^2 e^{r''x} \tag{11}$$

avec deux constantes arbitraires λ et μ. Sur cette forme de l'intégrale générale, on voit bien que $e^{r'x}$ et $e^{r''x}$ sont des intégrales particulières correspondant à $\mu = 0$ et $\lambda = 0$.

Nous avons obtenu cette intégrale générale en égalant à zéro le premier facteur de l'expression de $\frac{d\chi}{dx}$ (9). Si nous égalons à zéro l'autre facteur

$$z'' + \gamma' z = 0,$$

nous aurons une équation du second ordre ayant pour intégrale générale

$$z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}} \tag{12}$$

ou encore

$$z = g' e^{(\rho'+\alpha)x} + g'' e^{(\rho''+\alpha)x}, \tag{12'}$$

puisque nous avons appelé ρ' et ρ'' les racines de l'équation

$$r^2 + 2\alpha + \gamma = 0, \qquad (r+\alpha)^2 + \gamma' = 0.$$

Si l'on substitue cette valeur de z dans l'expression $\chi(z'', z', z)$, cette expression deviendra encore une constante, puisque l'on aura encore

$$\frac{d\chi}{dx} = 0,$$

et cette constante sera une forme quadratique de g' et g''. En égalant cette forme à zéro, on établira une relation entre g' et g'' : si cette relation est satisfaite, l'expression (12) sera une intégrale de l'équation différentielle $\chi = 0$, avec une constante arbitraire. Pour former cette relation, substituons l'expression

$$z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}} \tag{12}$$

dans le premier membre $\chi(z'', z', z)$ de l'équation différentielle (8). Comme cette expression donne

$$z'' = -\gamma' z,$$

on a

$$\begin{aligned}\chi(z'', z', z) &= (\beta' - \gamma')(\gamma' z^2 + z'^2)\\ &= (\beta' - \gamma')\gamma'\left[\left(g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}\right)^2 - \left(g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} - g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}\right)^2\right]\\ &= 4(\beta' - \gamma')\gamma' g' g''.\end{aligned}$$

Si donc on suppose

$$g' g'' = 0,$$

l'expression (12) sera une intégrale de $\chi(z'', z', z) = 0$. On trouve ainsi les deux intégrales

$$z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}}, \qquad z = g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

ou encore

$$z = g' e^{(\rho'+\alpha)x}, \qquad z = g'' e^{(\rho''+\alpha)x}.$$

Comme on a

$$y = z e^{-\alpha x},$$

on en déduit, pour l'équation différentielle proposée, les deux intégrales

$$y = g' e^{\rho' x}, \qquad y = g'' e^{\rho'' x}$$

qui sont *singulières*, comme nous l'avons vu.

L'équation que nous venons d'étudier rentre dans une catégorie générale d'équations différentielles dont nous nous sommes occupés précédemment dans une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (second semestre 1888) et dans un Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*, publié dans le *Journal de Mathématiques* (4e série, t. V, 1889).

Remarque I. — Nous avons supposé les racines r' et r'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \beta = 0$$

distinctes, c'est-à-dire

$$\beta' = \beta - \alpha^2$$

différent de zéro. Si l'on avait $\beta' = 0$, l'équation $\chi(z'', z', z) = 0$ deviendrait

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \gamma'(2zz'' - z'^2) = 0;$$

d'où

$$\frac{d\chi}{dx} = 2z'''(z'' + \gamma' z) = 0.$$

Prenant d'abord $z''' = 0$, on a

$$z = C + C'x + C''x^2 \tag{13}$$

et, en portant dans $\chi(z'', z', z)$,

$$\chi(z'', z', z) = 4C''(C'' + \gamma' C) - \gamma' C'^2.$$

Si donc on fait

$$C'' = \gamma' \lambda^2, \qquad C'' + \gamma' C = \mu^2, \qquad C' = 2\lambda\mu,$$

l'expression (13), c'est-à-dire

$$z = \frac{\mu^2 - \gamma'\lambda^2}{\gamma'} + 2\lambda\mu x + \gamma'\lambda^2 x^2,$$

est l'intégrale générale de l'équation $\chi = 0$ avec deux constantes arbitraires λ et μ.

L'intégrale générale de l'équation en y est

$$y = z e^{-\alpha x}.$$

Comme plus haut, les solutions

$$z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}}, \qquad z = g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

sont *singulières*.

Remarque II. — Nous avons supposé les racines ρ' et ρ'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \gamma = 0$$

distinctes, c'est-à-dire $\gamma' = \gamma - \alpha^2$ différent de zéro. Si γ' était nul, l'équation

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \beta' z'^2 = 0$$

ne serait plus irréductible et se décomposerait en deux facteurs linéaires

$$(z'' + z'\sqrt{-\beta'})(z'' - z'\sqrt{-\beta'}) = 0;$$

il en serait de même de l'équation proposée en y.

Enfin nous avons supposé β' différent de γ'. Si l'on avait

$$\beta' = \gamma',$$

on aurait

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + 2\beta' z z'' + \beta'^2 z^2 = (z'' + \beta' z)^2 = 0,$$

et le premier membre de cette équation serait le carré d'une fonction linéaire.

En revenant à l'équation en u

$$a_0 u'^2 + 2u'\varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0,$$

il resterait à examiner quelques cas particuliers, par exemple le cas où une racine simple de $\varphi_1(u)$ serait double ou triple pour $\varphi_2(u)$. Mais l'examen de ce cas, qui, d'après la théorie générale, ne présente aucune difficulté, n'offre pas d'intérêt particulier.