SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTION CONTINUE

D'UNE SÉRIE

PROCÉDANT SUIVANT LES PUISSANCES DESCENDANTES D'UNE VARIABLE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

1. Soit

$$S = \frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{x^{n+1}} + \cdots \tag{1}$$

une série procédant suivant les puissances descendantes de x. Il est clair qu'on pourra, en général, la transformer en fraction continue de la manière suivante :

$$F = \cfrac{c_0}{x + \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{c_2}{x + \cfrac{c_3}{1 + \ldots + \cfrac{c_{2n-1}}{1 + \cfrac{c_{2n}}{x + \ldots}}}}}} \tag{2}$$

En désignant alors par

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{c_0}{x}, \qquad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{c_0}{x + c_1}, \qquad \ldots$$

les réduites de cette fraction continue, le développement de $\frac{P_n}{Q_n}$ suivant les puissances descendantes de x donnera une série dont les n premiers termes coïncident avec ceux de S.

La fraction continue F peut se transformer encore en F′

$$(3)\qquad F' = \cfrac{c_0}{x + c_1 - \cfrac{c_1 c_2}{x + c_2 + c_3 - \cfrac{c_3 c_4}{x + c_4 + c_5 - \ldots}}},$$

et, en désignant par $\frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{c_0}{x + c_1}$, $\frac{P'_n}{Q'_n}$, ... les réduites de cette seconde fraction continue, on a identiquement

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}.$$

2. Il est clair que les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$; c_n, du reste, ne dépend que de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Posons

$$(4)\qquad A_0 = 1, \qquad A_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$$(5)\qquad B_0 = 1, \qquad B_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix},$$

on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} c_0 = a_0, \\ c_{2n-1} = \dfrac{A_{n-1} B_n}{A_n B_{n-1}}, \\ c_{2n} = \dfrac{A_{n+1} B_{n-1}}{A_n B_n}. \end{cases}$$

La démonstration de ces formules ne présente aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons pas, renvoyant le lecteur qui désire plus de détails sur ce sujet aux Mémoires suivants :

FROBENIUS und STICKELBERGER, *Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen.* (*Journal de Borchardt*, t. 88.)

FROBENIUS, *Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen.* (*Journal de Borchardt*, t. 90.)

3. Mais le problème de la transformation de la série en fraction continue est susceptible d'une autre solution que nous allons développer.

Envisageons d'abord le problème inverse, c'est-à-dire cherchons à exprimer réciproquement les a_n au moyen des c_n. Nous proposons, pour ce problème, la solution suivante :

Calculons d'abord une série de quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ d'après les formules suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_{0,0}=1, & & \\ \alpha_{i,k}=0 & \text{lorsque} & i>k, \\ \beta_{i,k}=0 & \text{lorsque} & i>k; \end{array}\right.$$

$$(7')\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_{0,k}=\alpha_{0,k}+c_2\alpha_{1,k}, \\ \beta_{1,k}=\alpha_{1,k}+c_4\alpha_{2,k}, \\ \beta_{2,k}=\alpha_{2,k}+c_6\alpha_{3,k}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \beta_{i,k}=\alpha_{i,k}+c_{2i+2}\alpha_{i+1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots; \end{array}\right.$$

$$(7'')\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{0,k+1}=c_1\beta_{0,k}, \\ \alpha_{1,k+1}=c_3\beta_{1,k}+\beta_{0,k}, \\ \alpha_{2,k+1}=c_5\beta_{2,k}+\beta_{1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_{i,k+1}=c_{2i+1}\beta_{i,k}+\beta_{i-1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si l'on dispose ces quantités dans le Tableau suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \alpha_{0,0} & \beta_{0,0} & \alpha_{0,1} & \beta_{0,1} & \alpha_{0,2} & \beta_{0,2} & \alpha_{0,3} & \beta_{0,3} \\ \cline{1-2} & & \alpha_{1,1} & \beta_{1,1} & \alpha_{1,2} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,3} & \beta_{1,3} \\ \cline{3-4} & & & & \alpha_{2,2} & \beta_{2,2} & \alpha_{2,3} & \beta_{2,3} \\ \cline{5-6} & & & & & & \alpha_{3,3} & \beta_{3,3} \\ \cline{7-8} \end{array}$$

on voit que chaque colonne verticale se déduit de celle qui la précède, et, en effectuant le calcul, on a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} 1 & 1 & c_1 & c_1+c_2 & c_1^2+c_1c_2 & c_1^2+c_2^2+2c_1c_2+c_2c_3 & \dots \\ \cline{1-2} & & 1 & 1 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3+c_4 & \dots \\ \cline{3-4} & & & & 1 & 1 & \dots \\ \cline{5-6} & & & & & & \dots \\ \cline{7-7} \end{array}$$

Ceci posé, les quantités a_n, ... s'expriment au moyen des $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, ainsi qu'il est indiqué par le théorème suivant :

I. *La forme quadratique à une infinité de variables*

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned}
&c_0[\alpha_{0,0}X_0 + \alpha_{0,1}X_1 + \alpha_{0,2}X_2 + \alpha_{0,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2[\alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3c_4[\alpha_{2,2}X_2 + \alpha_{2,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6[\alpha_{3,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

de même la forme quadratique

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned}
&c_0c_1[\beta_{0,0}X_0 + \beta_{0,1}X_1 + \beta_{0,2}X_2 + \beta_{0,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3[\beta_{1,1}X_1 + \beta_{1,2}X_2 + \beta_{1,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3c_4c_5[\beta_{2,2}X_2 + \beta_{2,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7[\beta_{3,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

4. Pour démontrer ce théorème, soient

$$\begin{aligned}
A = {}&c_0[\alpha_{0,0}X_0 + \alpha_{0,1}X_1 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2[\alpha_{1,1}X_1 + \ldots]^2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = {}&c_0c_1[\beta_{0,0}X_0 + \beta_{0,1}X_1 + \ldots]^2 \\
&+ c_0c_1c_2c_3[\beta_{1,1}X_1 + \ldots]^2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ce sont là des formes quadratiques qu'on pourra mettre sous les formes suivantes

$$A = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{i,k} X_i X_k,$$

$$B = \sum_0^\infty \sum_0^\infty B_{i,k} X_i X_k.$$

Nous remarquons d'abord que

$$A_{i+1,k} = B_{i,k}.$$

En effet, la valeur de $A_{i+1,k}$ est

$$c_0\alpha_{0,i+1}\alpha_{0,k} + c_0c_1c_2\alpha_{1,i+1}\alpha_{1,k} + c_0c_1c_2c_3c_4\alpha_{2,i+1}\alpha_{2,k} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les relations (7″),

$$(8)\quad c_0\alpha_{0,k}c_1\beta_{0,i} + c_0c_1c_2\alpha_{1,k}[\beta_{0,i} + c_3\beta_{1,i}] + c_0c_1c_2c_3c_4\alpha_{2,k}[\beta_{1,i} + c_5\beta_{2,i}] + \ldots,$$

tandis que la valeur de $B_{i,k}$ est

$$c_0c_1\beta_{0,i}\beta_{0,k} + c_0c_1c_2c_3\beta_{1,i}\beta_{1,k} + c_0c_1c_2c_3c_4c_5\beta_{2,i}\beta_{2,k} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les relations (7′),

$$(9)\quad \begin{aligned} &c_0c_1\beta_{0,i}[\alpha_{0,k} + c_2\alpha_{1,k}] \\ &\quad + c_0c_1c_2c_3\beta_{1,i}[\alpha_{1,k} + c_4\alpha_{2,k}] + c_0c_1c_2c_3c_4c_5\beta_{2,i}[\alpha_{2,k} + c_6\alpha_{3,k}] + \ldots. \end{aligned}$$

L'identité des expressions (8) et (9) est évidente.

Il est clair qu'on aura de la même façon

$$A_{i,k+1} = B_{i,k},$$

donc

$$A_{i+1,k} = A_{i,k+1};$$

d'où l'on conclut que généralement

$$A_{i,k} = A_{r,s}$$

sous la condition $i + k = r + s$.

On voit par là qu'il existe une série de quantités

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,$$

telles que l'on a identiquement

$$A = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k,$$

$$B = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k.$$

De plus, si l'on remarque que, d'après notre algorithme, on a

$$\alpha_{i,i} = \beta_{i,i} = 1,$$

on conclut directement les valeurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{n-1} & \cdot\cdot & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix} = c_0 \times c_0 c_1 c_2 \times c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 \times \ldots \times c_0 c_1 c_2 \ldots c_{2n-2},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = c_0 c_1 \times c_0 c_1 c_2 c_3 \times \ldots \times c_0 c_1 c_2 \ldots c_{2n-1},$$

et les formules que nous avons rappelées dans le n° 2 montrent alors que, en réduisant en fraction continue la série

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \ldots,$$

on obtient la fraction continue

$$\cfrac{c_0}{x + \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{c_2}{x + \ldots}}}$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

5. On voit, par ce qui précède, que l'on pourra écrire immédiatement la fraction continue F, dès que l'on aura obtenu les décompositions en carrés des formes quadratiques

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k, \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k.$$

Nous ajoutons que, en connaissant seulement la décomposition en carrés de

$$\sum^\infty \sum^\infty a_{i+k} X_i X_k,$$

on pourra écrire immédiatement la fraction continue F'. En effet, dans cette fraction continue figurent seulement les quantités

$$c_0,\quad c_1c_2,\quad c_3c_4,\quad c_5c_6,\quad \ldots$$

et

$$c_1,\quad c_2+c_3,\quad c_4+c_5,\quad \ldots.$$

Les premières sont connues immédiatement. Quant aux autres, il suffit d'observer que

$$\alpha_{n,n+1}=c_1+c_2+\ldots+c_{2n+1},$$

pour en conclure

$$c_1=\alpha_{0,1},\qquad c_2+c_3=\alpha_{1,2}-\alpha_{0,1},\qquad c_4+c_5=\alpha_{2,3}-\alpha_{1,2},\qquad \ldots.$$

Sous une forme légèrement modifiée, nous pouvons dire :

II. *Si l'on a identiquement*

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty\sum_0^\infty a_{i+k}X_iX_k=\varepsilon_0[X_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots]^2&\\ +\varepsilon_1[X_1+\beta_2X_2+\ldots]^2&\\ +\varepsilon_2[X_2+\gamma_3X_3+\ldots]^2&\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots,&\end{aligned}$$

on a en même temps

$$\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}-\frac{a_3}{x^4}+\ldots=\cfrac{\varepsilon_0}{x+\alpha_1-\cfrac{\varepsilon_1:\varepsilon_0}{x+\beta_2-\alpha_1-\cfrac{\varepsilon_2:\varepsilon_1}{x+\gamma_3-\beta_2-\ldots}}}$$

6. Nous allons donner maintenant quelques applications de ces théorèmes. Considérons pour cela le développement

$$(\text{séc}\,x)^k=a_0+\frac{a_1}{1.2}x^2+\frac{a_2}{1.2.3.4}x^4+\ldots.$$

On trouve facilement

$$a_0=1,\qquad a_1=k,\qquad a_2=2k+3k^2,\qquad a_3=16k+30k^2+15k^3+\ldots.$$

Généralement a_n est un polynôme du degré n en k; mais la loi de ces polynômes est très compliquée. Nous allons voir que la réduction en fraction continue de

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \dots$$

conduit à des expressions très simples pour les c_n.

Soit

$$f(x) = (\operatorname{séc} x)^k;$$

en calculant les dérivées successives f', f'', ..., on obtient

$$f' = k(\operatorname{séc} x)^k \operatorname{tang} x,$$
$$f'' = (\operatorname{séc} x)^k [k + (k + k^2) \operatorname{tang}^2 x],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Posons, pour abréger,

$$\operatorname{tang}^2 x = z;$$

on voit facilement que l'on aura généralement

$$f^{(2m)} \quad = (\operatorname{séc} x)^k \varphi_m,$$
$$f^{(2m+1)} = (\operatorname{séc} x)^k \operatorname{tang} x \psi_m,$$

φ_m et ψ_m étant des polynômes du degré m en z.

En prenant les dérivées, on trouve les relations

$$\psi_m \quad = \quad 2(1+z)\varphi'_m + k\varphi_m,$$
$$\varphi_{m+1} = 2z(1+z)\psi'_m + [1 + (1+k)z]\psi_m.$$

Nous désignons ici par φ'_m, ψ'_m les dérivées de φ_m et de ψ_m par rapport à z. Ces relations permettent de calculer de proche en proche les polynômes φ et ψ, et si nous posons maintenant

$$\varphi_m = \alpha_{m,0} + k(k+1)\alpha_{m,1} z + k(k+1)(k+2)(k+3)\alpha_{m,2} z^2 + \dots,$$
$$\psi_m = k\beta_{m,0} + k(k+1)(k+2)\beta_{m,1} z + k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\beta_{m,2} z^2 + \dots,$$

il en résulte les relations suivantes :

$$\beta_{m,0} = \alpha_{m,0} + 2(k+1)\alpha_{m,1},$$
$$\beta_{m,1} = \alpha_{m,1} + 4(k+3)\alpha_{m,2},$$
$$\beta_{m,2} = \alpha_{m,2} + 6(k+5)\alpha_{m,3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\beta_{m,i} = \alpha_{m,i} + (2i+2)(k+2i+1)\alpha_{m,i+1};$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha_{m+1,0} &= k\beta_{m,0},\\
\alpha_{m+1,1} &= \beta_{m,0} + 3(k+2)\beta_{m,1},\\
\alpha_{m+1,2} &= \beta_{m,1} + 5(k+4)\beta_{m,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{m+1,i} &= \beta_{m,i-1} + (2i+1)(k+2i)\beta_{m,i}.
\end{aligned}$$

En comparant ces relations avec l'algorithme que nous avons exposé dans le n° 3, on reconnaît que les quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ sont exactement celles qu'on aurait obtenues là en partant des valeurs

$$c_1 = 1.k,\qquad c_2 = 2(k+1),\qquad c_3 = 3(k+2),\qquad \ldots,\qquad c_n = n(k+n-1),$$

et l'on en conclut, sans la moindre difficulté,

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots = \cfrac{1}{x + \cfrac{1.k}{1 + \cfrac{2(k+1)}{x + \cfrac{3(k+2)}{1 + \ldots}}}}$$

En remarquant que

$$\left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k = a_0 - \frac{a_1}{1.2}z^2 + \frac{a_2}{1.2.3.4}z^4 - \ldots$$

et que, par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k e^{-xz}\,dz$$

donne ce développement (divergent)

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^5} - \frac{a_3}{x^7} + \ldots,$$

on obtient enfin ce résultat

$$(10)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k e^{-xz}\,dz = \cfrac{1}{x + \cfrac{1.k}{x + \cfrac{2(k+1)}{x + \cfrac{3(k+2)}{x + \ldots}}}}$$

Nous nous bornerons ici à considérer la transformation de la série en fraction continue au point de vue purement formel. Dans une autre occasion, nous ferons voir que la fraction continue que nous venons d'obtenir est convergente et représente effectivement l'intégrale si l'on suppose $x > 0$, $k > 0$.

Notons, en passant, le cas particulier $k = -n$, n étant un nombre entier positif. La formule (10) se réduit alors à cette identité algébrique

$$\frac{(n)_0}{x+n} + \frac{(n)_1}{x+n-2} + \frac{(n)_2}{x+n-4} + \ldots + \frac{(n)_n}{x-n} = \cfrac{2^n}{x - \cfrac{1.n}{x - \cfrac{2(n-1)}{x - \ldots - \cfrac{n.1}{x}}}}.$$

7. Nous allons donner maintenant une application du théorème II. Considérons pour cela la fonction

$$f = \sin\operatorname{am} x,$$

le module étant k comme d'ordinaire. En calculant les dérivées successives, on voit qu'on a

$$(11)\quad \begin{cases} f = \sin\operatorname{am} x[a_0], \\ f'' = \sin\operatorname{am} x[a_1 + b_1 z], \\ f^{(4)} = \sin\operatorname{am} x[a_2 + b_2 z + c_2 z^2], \\ f^{(6)} = \sin\operatorname{am} x[a_3 + b_3 z + c_3 z^2 + d_3 z^3], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abréger, $z = k \sin\operatorname{am}^2 x$.

Il est clair ensuite que

$$\sin\operatorname{am} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

et, d'après la série de Taylor, on a

$$\tfrac{1}{2}[\sin\operatorname{am}(x+y) + \sin\operatorname{am}(x-y)] = f + f''\frac{y^2}{1.2} + f^{(4)}\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les formules (11),

$$(12)\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\sin\operatorname{am}(x+y) + \sin\operatorname{am}(x-y)] \\ &= \sin\operatorname{am} x\left[a_0 + a_1\frac{y^2}{1.2} + a_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + z\sin\operatorname{am} x\left[b_1\frac{y^2}{1.2} + b_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + z^2\sin\operatorname{am} x\left[c_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'autre part, on a, d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\sin\operatorname{am}(x+y)+\sin\operatorname{am}(x-y)]\\
&\quad=\frac{\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y}{1-k^2\sin\operatorname{am}^2x\sin\operatorname{am}^2y}\\
&\quad=\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y\left\{1+kz\sin\operatorname{am}^2y+k^2z^2\sin\operatorname{am}^4y+\ldots\right\}.
\end{aligned}$$

La comparaison avec (12) fait voir que

$$\begin{aligned}
\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= a_0+a_1\frac{y^2}{1.2}+a_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
k\ \sin\operatorname{am}^2y\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= \qquad b_1\frac{y^2}{1.2}+b_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
k^2\sin\operatorname{am}^4y\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= \qquad\qquad c_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, par intégration,

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}y &= a_0y+a_1\frac{y^3}{1.2.3}+a_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
\frac{k}{3}\sin\operatorname{am}^3y &= \qquad b_1\frac{y^3}{1.2.3}+b_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
\frac{k^2}{5}\sin\operatorname{am}^5y &= \qquad\qquad c_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on se rappelle que $z=k\sin\operatorname{am}^2x$, on voit que le second membre de la formule (12) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\left[a_0x+a_1\frac{x^3}{1.2.3}+a_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[a_0y+a_1\frac{y^3}{1.2.3}+a_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\\
&\quad+3\left[b_1\frac{x^3}{1.2.3}+b_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[b_1\frac{y^3}{1.2.3}+b_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\\
&\quad\quad+5\left[c_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[c_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\\
&\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

tandis que le premier membre est

$$=\frac{1}{2}\sum_0^\infty\frac{a_n}{1.2\ldots(2n+1)}[(x+y)^{2n+1}+(x-y)^{2n+1}].$$

La comparaison de ces deux expressions donne cette relation remarquable

$$a_{i+k} = a_i a_k + 3 b_i b_k + 5 c_i c_k + \ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = & [a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + 3[b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + 5[c_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ayant ainsi obtenu la décomposition en carrés de $\sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$, on peut écrire immédiatement la réduction en fraction continue de la série $\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \cdots$. Il suffit pour cela de calculer $a_0, b_1; b_1, b_2; c_2, c_3, \ldots$, ce qui n'a aucune difficulté, à l'aide des formules (13).

En modifiant légèrement le résultat ainsi obtenu, nous trouvons que, si l'on écrit

$$\sin \operatorname{am} x = \alpha_0 x - \alpha_1 \frac{x^3}{1.2.3} + \alpha_2 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots,$$

la série (divergente)

$$\frac{\alpha_0}{x^2} - \frac{\alpha_1}{x^4} + \frac{\alpha_2}{x^6} - \frac{\alpha_3}{x^8} + \cdots,$$

qui provient de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xz} \sin \operatorname{am} z \, dz,$$

donne la fraction continue (convergente)

$$\text{(14)} \qquad \cfrac{1}{x^2 + l - \cfrac{1.2^2.3k^2}{x^2 + 3^2 l - \cfrac{3.4^2.5k^2}{x^2 + 5^2 l - \cfrac{5.6^2.7k^2}{x^2 + 7^2 l - \ddots}}}},$$

en posant, pour abréger, $1 + k^2 = l$.

8. La considération des dérivées successives de

$$\cos \operatorname{am} x, \quad \Delta \operatorname{am} x$$

conduit à des résultats analogues, mais qui offrent encore une application du théorème I.

Soit $f(x) = \cos\operatorname{am} x$: en introduisant encore la quantité $z = k \sin\operatorname{am}^2 x$, les dérivées d'ordre pair se présentent sous la forme suivante

$$(15)\quad \begin{cases} f \;\;\; = \cos\operatorname{am} x[a_0], \\ f'' \;\, = \cos\operatorname{am} x[a_1 + b_1 z], \\ f^{(4)} = \cos\operatorname{am} x[a_2 + b_2 z + c_2 z^2], \\ f^{(6)} = \cos\operatorname{am} x[a_3 + b_3 z + c_3 z^2 + d_3 z^3], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et il est clair que

$$\cos\operatorname{am} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}.$$

Le théorème de Taylor donne ensuite

$$\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) + \cos\operatorname{am}(x-y)] = f + f''\frac{y^2}{1.2} + f^{(4)}\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

ou bien, en introduisant les valeurs (15),

$$(16)\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) + \cos\operatorname{am}(x-y)] \\ &= \cos\operatorname{am} x\left[a_0 + a_1\frac{y^2}{1.2} + a_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &\quad + z\cos\operatorname{am} x\left[b_1\frac{y^2}{1.2} + b_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &\quad + z^2\cos\operatorname{am} x\left[c_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'autre part, les formules d'addition donnent

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) + \cos\operatorname{am}(x-y)] \\ &= \frac{\cos\operatorname{am} x \cos\operatorname{am} y}{1 - k^2 \sin\operatorname{am}^2 x \sin\operatorname{am}^2 y} \\ &= \cos\operatorname{am} x \cos\operatorname{am} y[1 + kz\sin\operatorname{am}^2 y + k^2 z^2 \sin\operatorname{am}^4 y + \ldots]. \end{aligned}$$

La comparaison avec (16) montre que

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am} y = a_0 + a_1 \dfrac{y^2}{1.2} + a_2 \dfrac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots, \\ k\ \sin\operatorname{am}^2 y \cos\operatorname{am} y = \qquad b_1 \dfrac{y^2}{1.2} + b_2 \dfrac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots, \\ k^2 \sin\operatorname{am}^4 y \cos\operatorname{am} y = \qquad\qquad c_2 \dfrac{y_4}{1.2.3.4} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

On voit par là que le second membre de la formule (16) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\left[a_0 + a_1 \frac{x^2}{1.2} + a_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \times \left[a_0 + a_1 \frac{y^2}{1.2} + a_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &+ \left[b_1 \frac{x^2}{1.2} + b_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \times \left[b_1 \frac{y^2}{1.2} + b_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &+ \left[c_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \times \left[c_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et le premier membre est égal à

$$\frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{a_n}{1.2\ldots(2n)} [(x+y)^{2n} + (x-y)^{2n}].$$

La comparaison de ces deux expressions conduit à la relation

$$a_{i+k} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\quad \begin{aligned} \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = {} & [a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + [b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + [c_2 X_2 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

9. La considération des dérivées d'ordre impair de $f = \cos\operatorname{am} x$ va nous donner une formule analogue. On trouve que ces dérivées se présentent sous la forme suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} f' = \sin\operatorname{am} x\, \Delta\operatorname{am} x [a_1], \\ f''' = \sin\operatorname{am} x\, \Delta\operatorname{am} x [a_2 + b_2 z], \\ f^{(5)} = \sin\operatorname{am} x\, \Delta\operatorname{am} x [a_3 + b_3 z + c_3 z^2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il est à remarquer que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ont ici les mêmes valeurs que dans les formules (15), mais il n'en est pas de même des $b_i, c_i, \ldots$. Cette remarque est à peu près évidente, car si l'on prend encore $a_0 = 1$, on tire des formules (19) le développement

$$\cos\operatorname{am} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n}}{1.2\ldots(2n)}.$$

La formule de Taylor donne

$$\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) - \cos\operatorname{am}(x-y)] = f'\frac{y}{1} + f'''\frac{y^3}{1.2.3} + f^{(5)}\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots,$$

et, si l'on introduit les valeurs (19),

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) - \cos\operatorname{am}(x-y)] \\ &\quad = \sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} x\left[a_1\frac{y}{1} + a_2\frac{y^3}{1.2.3} + a_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + z\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} x\left[b_2\frac{y^3}{1.2.3} + b_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + z^2\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} x\left[c_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\cos\operatorname{am}(x+y) - \cos\operatorname{am}(x-y)] \\ &\quad = -\frac{\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} x\,\sin\operatorname{am} y\,\Delta\operatorname{am} y}{1 - k^2\sin\operatorname{am}^2 x\,\sin\operatorname{am}^2 y} \\ &\quad = -\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} x\,\sin\operatorname{am} y\,\Delta\operatorname{am} y[1 + kz\sin\operatorname{am}^2 y + k^2 z^2\sin\operatorname{am}^4 y + \ldots] \end{aligned}$$

donc, par comparaison avec (20),

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} -\ \sin\operatorname{am} y\,\Delta\operatorname{am} y &= a_1\frac{y}{1} + a_2\frac{y^3}{1.2.3} + a_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots, \\ -k\ \sin\operatorname{am}^3 y\,\Delta\operatorname{am} y &= \qquad b_2\frac{y^3}{1.2.3} + b_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots, \\ -k^2\sin\operatorname{am}^5 y\,\Delta\operatorname{am} y &= \qquad\qquad c_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le second membre de la formule (20) s'écrit donc

$$\begin{aligned}
&-\left[a_1\frac{x}{1}+a_2\frac{x^3}{1.2.3}+a_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[a_1\frac{y}{1}+a_2\frac{y^3}{1.2.3}+a_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\\
&-\left[b_2\frac{x^3}{1.2.3}+b_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[b_2\frac{y^3}{1.2.3}+b_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\\
&-\left[c_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[c_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right],
\end{aligned}$$

tandis que le premier membre est

$$\frac{1}{2}\sum_0^\infty\frac{a_n}{1.2\ldots(2n)}[(x+y)^{2n}-(x-y)^{2n}].$$

On en conclut

$$-a_{i+k+1}=a_{i+1}a_{k+1}+b_{i+1}b_{k+1}+c_{i+1}c_{k+1}+\ldots$$

ou encore

$$\begin{aligned}
(22)\qquad -\sum_0^\infty\sum_0^\infty a_{i+k+1}X_iX_k=&[a_1X_0+a_2X_1+a_3X_2+\ldots]^2\\
&+[b_2X_1+b_3X_2+\ldots]^2\\
&+[c_3X_2+\ldots]^2\\
&+\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les décompositions en carrés données par les formules (18) et (22) permettent maintenant d'écrire immédiatement la fraction continue F, qui résulte de la série

$$\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}-\ldots.$$

En changeant légèrement les notations, nous écrivons le résultat final ainsi : soit

$$\cos\operatorname{am}x=\beta_0-\beta_1\frac{x^2}{1.2}+\beta_2\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

alors la série (divergente)

$$\frac{\beta_0}{x}-\frac{\beta_1}{x^3}+\frac{\beta_2}{x^5}-\ldots,$$

qui provient de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xz}\cos\operatorname{am}z\,dz,$$

donne la fraction continue (convergente)

$$\frac{1}{x+\cfrac{1^2}{x+\cfrac{2^2k^2}{x+\ldots+\cfrac{(2n-1)^2}{x+\cfrac{(2n)^2k^2}{x+\ldots}}}}} \tag{23}$$

Et une analyse toute semblable conduit encore à ce résultat que, si l'on écrit

$$\Delta \operatorname{am} x = \gamma_0 - \gamma_1 \frac{x^2}{1.2} + \gamma_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

la série (divergente)

$$\frac{\gamma_0}{x} - \frac{\gamma_1}{x^3} + \frac{\gamma_2}{x^5} - \ldots,$$

qui provient de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xz}\,\Delta \operatorname{am} z\, dz,$$

donne la fraction continue (convergente)

$$\frac{1}{x+\cfrac{k^2}{x+\cfrac{2^2}{x+\ldots+\cfrac{(2n-1)^2k^2}{x+\cfrac{(2n)^2}{x+\ldots}}}}} \tag{24}$$

La démonstration que ces fractions continues convergentes représentent effectivement les intégrales dépend de considérations toutes différentes que nous nous réservons de développer dans un autre Mémoire.