SUR LE CERCLE

CONSIDÉRÉ

COMME ÉLÉMENT GÉNÉRATEUR DE L'ESPACE,

PAR M. EUGÈNE COSSERAT,

Aide-Astronome à l'Observatoire de Toulouse,
Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Les recherches sur l'espace cerclé semblent commencer avec le Mémoire de M. A. Enneper [1], dans lequel on trouve une classification complète des surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle. M. Enneper, considérant la situation relative de deux cercles infiniment voisins, parvient à séparer les surfaces cerclées en plusieurs classes :

Les surfaces de la première classe sont celles pour lesquelles deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun.

Celles de la deuxième classe sont celles pour lesquelles chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice infiniment voisine.

M. Enneper en donne la génération suivante : Sur une surface gauche, considérons deux courbes Γ, Γ_1, dont la seconde soit une trajectoire orthogonale des génératrices, et soient π, π_1 deux points de Γ, Γ_1, situés sur la même génératrice; dans le plan mené par le point π et par la tangente à la courbe Γ_1 en π_1, décrivons, de π comme centre avec $\pi\pi_1$ pour rayon, un cercle; la surface engendrée par ce cercle est la surface la plus générale de la deuxième classe. On peut dire que le lieu du point commun à deux génératrices infiniment voisines forme sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent.

---

(1) A. ENNEPER, *Die cyklischen Flächen* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, p. 393; 1869).

Les surfaces cerclées de la troisième classe sont celles pour lesquelles deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs; la surface est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe.

Si les deux points communs aux génératrices infiniment voisines sont constamment confondus, on a deux nouvelles classes de surfaces :

Ou bien le cercle mobile reste constamment osculateur à une ligne à double courbure : ce cas correspond aux surfaces de la quatrième classe;

Ou bien le cercle mobile reste tangent à une courbe et son plan passe par la tangente à la courbe décrite par son centre : ce cas correspond aux surfaces de la cinquième classe.

M. Enneper étudie, dans le même Mémoire, les surfaces cerclées minima déjà considérées par Riemann, et introduit la notion des lignes de striction des surfaces cerclées. Sur chaque génératrice existent quatre points où la génératrice est à une distance maxima ou minima de la génératrice infiniment voisine; les courbes déterminées sur la surface par ces points sont les lignes de striction; l'équation qui les détermine est analogue à celle qui permet d'obtenir la ligne de striction sur les surfaces gauches.

L'étude des surfaces cerclées a été reprise par Laguerre (¹), en introduisant une notion importante relative aux cercles et qui est due à Chasles. Étant donné un cercle dans l'espace, par ce cercle, on peut toujours faire passer deux sphères de rayon nul. M. Darboux a donné aux centres de ces sphères le nom de *foyers* du cercle (²). Un cercle est déterminé par ses deux foyers. Laguerre emploie la notation (f, f') pour représenter le cercle dont les deux foyers sont f et f', et donne la génération suivante des surfaces cerclées. Considérons une courbe gauche quelconque C et une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices rencontre cette courbe en deux points f_i, f'_i. Soient $f_1 f'_1, f_2 f'_2, \ldots$ les génératrices de cette surface; les cercles $(f_1, f'_1), (f_2, f'_2), \ldots$ engendreront une autre surface, que l'on dira dérivée de la courbe C. D'une même courbe donnée, on peut ainsi déduire une infinité de surfaces cerclées; chacune des surfaces dérivées correspond à un mode de groupement des points de la courbe C, défini par la surface V. Lorsque la courbe C est plane, les droites $f_i f'_i$ enveloppent une

(¹) LAGUERRE, *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1872).

(²) DARBOUX, *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace* (*Journal de Liouville,* 2ᵉ série, t. I; 1872). — *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 25.

courbe qui peut servir à définir le groupement des points. Réciproquement, étant donnée une surface cerclée quelconque, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une courbe gauche; cette courbe est le lieu des foyers des génératrices circulaires de la surface, et la surface réglée V qui détermine le mode de groupement des points de la courbe est le lieu des axes des différents cercles. Nous verrons que la courbe C est une focale d'une quelconque des surfaces dérivées.

Les surfaces cerclées ont été considérées de nouveau par M. Demartres qui a appliqué à l'étude de leurs propriétés infinitésimales la méthode cinématique (¹). M. Demartres a retrouvé les principaux résultats de M. Enneper et en a ajouté beaucoup d'autres, parmi lesquels ce théorème fondamental : *Chaque point pris sur l'axe d'une génératrice circulaire* G *est le centre d'une sphère tangente à la surface en deux points de* G, *et toutes les cordes de contact sont concourantes.*

Les cercles de l'espace dépendent de six paramètres; on peut constituer des systèmes indéterminés de cercles, de même qu'on l'a fait pour la droite. Les premières recherches dans cette voie sont dues à M. Cyparissos Stephanos, qui a donné sans démonstration des propriétés des systèmes linéaires doublement indéterminés, ainsi que du pentacycle ou système de cinq cercles qui vérifient six équations linéaires (²).

La voie à suivre dans l'étude des systèmes linéaires a été indiquée par M. Kœnigs (³) qui, après avoir établi le théorème fondamental des recherches de M. Stephanos, a donné une proposition remarquable relative au système linéaire quintuplement indéterminé et découvert les invariants de ce système.

Un cercle étant déterminé par ses deux foyers, on voit que la géométrie du cercle dans l'espace n'est autre que la géométrie de l'ensemble de deux points. On est ainsi amené, au début de l'étude du cercle, à considérer comme élément de l'espace le système de deux points auquel nous donnons le nom de *double point*.

(¹) DEMARTRES, *Sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. II, p. 123).

(²) CYPARISSOS STEPHANOS, *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, p. 578). — *Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 633).

(³) G. KŒNIGS, *Contributions à la théorie du cercle dans l'espace* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II).

La première Partie de ce travail a rapport à l'étude des propriétés infinitésimales du premier ordre de l'espace cerclé. Nous avons cherché à construire une théorie analogue à celle donnée par M. Kœnigs dans le cas de l'espace réglé, et fondée sur l'existence de la forme fondamentale (¹).

Le théorème déjà signalé, et dû à M. Demartres, conduit à une proposition qui peut être considérée comme l'analogue du théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice et qui amène à la substitution de l'usage des corrélations anharmoniques à celui du cercle infiniment voisin.

La rencontre de deux cercles infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles des coordonnées; la considération de cette forme, jointe à l'étude des corrélations anharmoniques, conduit à la classification des surfaces cerclées, due à M. Enneper et fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins.

A cette forme biquadratique sont associées les théories des systèmes adjoints et des surfaces de singularités. Nous développons ces théories dans le cas général où l'on adopte comme élément générateur de l'espace une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres; la rencontre de deux éléments infiniment voisins s'exprime alors par l'évanouissement d'une forme des différentielles des $(n+1)$ paramètres qui est intimement liée aux propriétés infinitésimales des systèmes d'éléments, que nous désignons par les symboles S_0, S_1, S_2, ..., S_n, l'indice indiquant l'indétermination du système.

M. Kœnigs, qui, le premier, a considéré cette forme et lui a donné le nom de *forme fondamentale,* a prouvé que si le nombre des paramètres est supérieur à quatre, elle admet non plus une forme adjointe, comme dans le cas de l'espace réglé, mais un système adjoint composé de $(n-2)$ formes, dont l'emploi permet de constituer, à l'égard du système S_n, une théorie analogue à celle développée par M. Klein dans le cas du complexe de droites, par l'introduction de la forme adjointe.

Nous montrons qu'à chacun des systèmes S_3, S_4, ..., S_{n-1} on peut, de même, faire correspondre un système adjoint de la forme fondamentale dont l'existence est intimement liée aux propriétés infinitésimales du système auquel il est associé.

Ces systèmes adjoints conduisent naturellement à la généralisation de la

(¹) G. Kœnigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales de l'École Normale,* 1882).

notion de surface de singularités du complexe de droites; la surface focale de la congruence et la surface sur laquelle sont réparties les courbes de S_1 apparaissent comme des surfaces de singularités, et forment ainsi les derniers éléments d'une suite de surfaces qui présentent entre elles une liaison remarquable. Les théorèmes qui lient entre elles les surfaces de singularités de trois systèmes consécutifs peuvent être très utiles dans la recherche des surfaces de singularités, ainsi qu'on le voit, plus loin, dans l'étude des systèmes linéaires de cercles. La proposition qui établit un lien entre la surface de singularités du complexe de droites et les cônes du complexe apparaît comme un cas particulier d'une proposition plus générale.

Nous appliquons les résultats obtenus aux différents systèmes de cercles. On trouve, pour les *cyclides de raccordement* des surfaces cerclées, une définition analogue à celle des hyperboloïdes de raccordement des surfaces gauches, en utilisant la génération des cyclides due à M. Casey. A l'égard de la congruence de cercles, nous retrouvons la surface focale, considérée par M. Darboux dans le cas général des congruences de courbes. A propos du système quintuplement indéterminé, nous montrons comment la notion de surface de singularités conduit naturellement au beau théorème que l'on doit à M. Kœnigs (¹) et qui est la généralisation de la proposition de M. Klein relative aux complexes de droites; nous établissons également la réciproque de ce théorème, pour le cas du cercle.

Dans la seconde Partie, nous abordons l'étude des systèmes linéaires de cercles.

La théorie des systèmes linéaires de droites peut se déduire, comme on sait, d'un seul théorème. Il existe de même, à l'égard des systèmes linéaires de cercles, un théorème qui peut servir de base à leur théorie. Cette proposition n'est, d'ailleurs, que l'interprétation géométrique d'une propriété de certaines formes bilinéaires. A la recherche des conséquences que l'on peut en déduire, nous associons l'application des propositions développées dans la première Partie.

(¹) G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Comptes rendus,* t. CIV, p. 673-675, 842-844). — *Acta Mathematica,* t. X, p. 313-338).

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU PREMIER ORDRE DE L'ESPACE CERCLÉ.

I. — Les corrélations anharmoniques; leur rôle dans les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé.

Considérons comme élément de l'espace l'ensemble de deux points auquel nous donnerons le nom de *double point;* la droite joignant les deux points sera la droite du double point.

Appelons *couple* le système formé par l'ensemble d'un double point et d'une sphère menée par ce double point; nous désignerons le double point, formé de l'ensemble des deux points a_1, a_2, par a. Un couple pourra se désigner par la notation (a, α), où a est le double point et α la sphère du couple.

Appelons *couple simple* le système formé par l'ensemble d'un point et d'une sphère menée par ce point; nous désignerons un couple simple par la notation (a, α), où a désigne le point et α la sphère du couple.

Un couple sera dit situé sur un cercle C, ou bien le cercle C sera dit appartenir au couple, si ce cercle est sur la sphère α du couple et passe par le double point a de ce couple. Les mêmes expressions, employées à l'égard du couple simple, auront une signification semblable.

Lorsque nous considérerons sur un même cercle plusieurs doubles points, nous les concevrons en général de la manière suivante : choisissons dans le plan du cercle un point P et menons par ce point une sécante; elle coupe le cercle suivant un double point; en faisant tourner la sécante autour de P, nous aurons différents doubles points. On peut ainsi envisager le cercle comme engendré par un double point, la droite de ce double point passant par un point fixe P.

Étant donnés quatre doubles points ainsi déterminés a, b, c, d, leur rapport anharmonique (a, b, c, d) sera le rapport anharmonique des quatre droites de ces doubles points.

Quatre couples (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) étant situés sur un même cercle, on dira que ces couples sont en *relation anharmonique,* s'il y a égalité entre les rapports anharmoniques.

$$(a, b, c, d) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

des quatre doubles points a, b, c, d et des quatre sphères α, β, γ, δ.

Considérons un cercle et supposons donné le point P qui détermine la description du cercle par le mouvement d'un double point. Pour définir un couple sur ce cercle, on doit alors envisager deux coordonnées z et u, définissant, l'une le double point, et l'autre la sphère. Un couple sur un cercle donné dépend alors de deux conditions; une équation entre z et u assujettit le couple à une condition; les couples correspondant à un point P et satisfaisant ainsi à une même condition forment une *corrélation*. Si l'on remarque qu'un couple d'une corrélation est défini par une nouvelle condition, on peut dire qu'une corrélation est une correspondance entre les doubles points d'un cercle C relatifs à un point P et les sphères passant par ce cercle. Si m doubles points correspondent à une sphère et si μ sphères correspondent à un double point, on dit que la corrélation est du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $\mu^{\text{ième}}$ classe, et l'on peut la désigner par le symbole Γ_μ^m.

Rappelons enfin le théorème suivant, conséquence immédiate du principe de correspondance :

Quatre couples d'une même corrélation Γ_1^1, *du premier ordre et de la première classe, sont en relation anharmonique, et réciproquement, les couples qui, situés sur un cercle, sont en relation anharmonique avec trois couples fixes situés sur ce cercle, engendrent une corrélation* Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe.*

C'est pour cette raison qu'on donne à la corrélation du premier ordre et de la première classe le nom de *corrélation anharmonique*.

Deux corrélations Γ_μ^m et $\Gamma_{\mu'}^{m'}$, correspondant à un même point P, ont en commun un nombre de couples égal à

$$m\mu' + m'\mu,$$

et, en particulier, deux corrélations anharmoniques correspondant à un même point P ont en commun deux couples (a, α), (b, β).

Arrivons au rôle des corrélations anharmoniques dans les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé.

Supposons qu'un cercle donné C dans l'espace appartienne à une surface cerclée. Pour étudier la surface autour du cercle, prenons pour plan des xy

le plan du cercle, les coordonnées étant rectangulaires. Les équations de la génératrice de la surface cerclée seront

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0;$$

a, b, c, α, β, γ sont des fonctions d'une même variable λ, les fonctions α, β, γ s'annulant simultanément avec la variable. Le développement en série donne

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1\lambda + \alpha'_1\lambda^2 + \ldots, & a &= a_0 + a_1\lambda + a'_1\lambda^2 + \ldots, \\ \beta &= \beta_1\lambda + \beta'_1\lambda^2 + \ldots, & b &= b_0 + b_1\lambda + b'_1\lambda^2 + \ldots, \\ \gamma &= \gamma_1\lambda + \gamma'_1\lambda^2 + \ldots, & c &= c_0 + c_1\lambda + c'_1\lambda^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Cherchons les points $(x, y, 0)$, où la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = \mu z,$$

qui passe par le cercle C, touche la surface.

Posons

$$\mathrm{M} = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$\mathrm{Q} = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1.$$

Les coefficients directeurs de la normale à la surface au point $(x, y, 0)$ sont proportionnels à

$$2x + a_0, \quad 2y + b_0, \quad \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Q}}.$$

Ceux de la normale à la sphère sont proportionnels à

$$2x + a_0, \quad 2y + b_0, \quad -\mu.$$

Écrivons que ces deux normales sont confondues; il vient

$$\mathrm{M} = -\mu\mathrm{Q}.$$

Nous retrouvons donc ce théorème, dû à M. Demartres [1] :

Chaque point pris sur l'axe du cercle C *est le centre d'une sphère tangente à la surface cerclée en deux points de* C; *toutes les cordes de contact sont concourantes.*

---

[1] DEMARTRES, *Sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. II, p. 123).

La droite $Q = 0$ est la *caractéristique* AA' de M. Demartres.

La droite $M = 0$ est l'*axe radical* $\alpha\alpha'$.

Les deux points α, α' du cercle situés sur $\alpha\alpha'$ correspondent à la sphère, qui admet le cercle comme grand cercle; les deux points A, A' situés sur AA' correspondent au plan du cercle; en ces deux points A, A', la normale est perpendiculaire au plan du cercle; donc :

Il existe sur chaque génératrice deux points où elle est tangente à une ligne asymptotique de la surface, et ces deux points sont situés sur la caractéristique.

Remarquons également cette proposition, énoncée aussi par M. Demartres : *La courbe lieu des foyers des cercles qui engendrent la surface est une focale de cette surface.*

Plaçons-nous dans le cas général où $Q = 0$, $M = 0$ sont deux droites distinctes; P étant leur point d'intersection, concevons le cercle comme décrit par un double point dont la droite passe par P. On peut alors énoncer le théorème suivant, qui constitue, à l'égard des surfaces cerclées, le théorème analogue au théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice :

Les couples formés par un double point d'une surface cerclée et la sphère tangente en ce double point, et qui sont situés sur une même génératrice circulaire, engendrent une corrélation anharmonique.

Considérons une autre surface cerclée passant par le cercle C; elle donnera lieu à d'autres développements et à une autre corrélation anharmonique qui sera, en général, relative à un point P_1 différent de P. Les droites des doubles points qui correspondent à une même sphère forment des faisceaux homographiques de sommets P et P_1; par conséquent :

Deux surfaces cerclées passant par un même cercle sont, en général, tangentes en quatre points de ce cercle.

Supposons que P et P_1 soient confondus, c'est-à-dire supposons que les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

soient proportionnels aux déterminants analogues, en sorte qu'on ait

$$\frac{\alpha_1 b_1 - a_1 \beta_1}{\alpha_2 b_2 - a_2 \beta_2} = \frac{\alpha_1 c_1 - a_1 \gamma_1}{\alpha_2 c_2 - a_2 \gamma_2} = \frac{\beta_1 c_1 - b_1 \gamma_1}{\beta_2 c_2 - b_2 \gamma_2};$$

les couples communs aux deux corrélations correspondant au même point P seront les couples de raccordement des deux surfaces.

Si, de plus, tous les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls, les deux corrélations coïncident; les deux surfaces cerclées sont tangentes tout le long du cercle C.

Réciproquement, si deux surfaces cerclées sont tangentes le long du cercle C, les points P, P_1, qui leur correspondent, sont confondus et, de plus, les deux corrélations coïncident.

Ceci posé, on aperçoit immédiatement que les conditions qui correspondent à ce cas particulier peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$a_2 = \mu a_1, \quad b_2 = \mu b_1, \quad c_2 = \mu c_1, \quad \alpha_2 = \mu \alpha_1, \quad \beta_2 = \mu \beta_1, \quad \gamma_2 = \mu \gamma_1.$$

On a, par suite, la conclusion suivante :

Considérons le cercle C, qui a pour équations

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = 0.$$

Si on laisse a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 invariables, et que l'on attribue aux constantes $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, a'_1, a'_2, \ldots, b'_1, b'_2, \ldots, c'_1, c'_2, \ldots$ telles valeurs que l'on voudra, les développements suivants, où λ est une variable indépendante, conviendront à toutes les surfaces cerclées tangentes entre elles tout le long du cercle C.

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \lambda + \alpha'_1 \lambda^2 + \ldots, & a &= a_0 + a_1 \lambda + a'_1 \lambda^2 + \ldots, \\ \beta &= \beta_1 \lambda + \beta'_1 \lambda^2 + \ldots, & b &= b_0 + b_1 \lambda + b'_1 \lambda^2 + \ldots, \\ \gamma &= \gamma_1 \lambda + \gamma'_1 \lambda^2 + \ldots; & c &= c_0 + c_1 \lambda + c'_1 \lambda^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Or attribuons à λ une valeur infiniment petite ε; en négligeant les termes du second ordre, on a

$$\alpha = \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta = \beta_1 \varepsilon, \quad \gamma = \gamma_1 \varepsilon, \quad a = a_0 + a_1 \varepsilon, \quad b = b_0 + b_1 \varepsilon, \quad c = c_0 + c_1 \varepsilon.$$

Le cercle correspondant est infiniment voisin du cercle C, et, comme il est indépendant de $\alpha'_1, \ldots$, on en conclut qu'il est commun à toutes les surfaces cerclées qui définissent la même corrélation sur le cercle C; c'est ce qu'on peut exprimer en disant qu'une corrélation anharmonique sur un cercle C correspond à un cercle de l'espace infiniment voisin du cercle C.

De même qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit une direction issue de ce point, et que, inversement, la considération de cette direction peut souvent être substituée à celle du point voisin, de même, dans l'espace cerclé, un cercle infiniment voisin d'un cercle définit sur lui une corrélation anharmonique dont l'emploi peut remplacer celui du cercle infiniment voisin dans un grand nombre de questions.

Arrivons à la représentation analytique des cercles et des corrélations anharmoniques.

Les cercles de l'espace forment un système sextuplement indéterminé; un cercle dépend de six paramètres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_6;$$

nous désignerons ce cercle par la notation (u).

Un cercle infiniment voisin du cercle (u) a pour coordonnées

$$u_i + \Delta u_i,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u_i + du_i.$$

On peut le désigner par le symbole $(u + du)$.

Chaque système de valeurs des rapports

$$du_1 : du_2 : \ldots : du_6$$

définit un cercle infiniment voisin du cercle (u) et, par suite, une corrélation anharmonique sur ce cercle. Si $t_1, t_2, \ldots, t_6$ sont des quantités *finies* proportionnelles à $du_1, du_2, \ldots, du_6$, on pourra dire que les quantités t sont les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur le cercle (u).

Les corrélations anharmoniques sur un cercle donné (u) forment une quintuple infinité. Une équation entre les coordonnées d'une corrélation représente une série quatre fois indéterminée de corrélations; deux équations représentent une série trois fois indéterminée, etc. Si toutes les équations sont linéaires, on a des systèmes linéaires de corrélations que nous représenterons par les symboles M_4, M_3, M_2, M_1, M_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Revenons à la corrélation sur le cercle C, défini par les équations

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = 0,$$

afin d'étudier tous les cas qui peuvent se présenter.

Étant donnée la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = \mu z,$$

les points de contact avec la surface s'obtiennent, ainsi qu'on l'a vu, en coupant le cercle par la droite qui a pour équation dans le plan des xy

$$M = -\mu Q,$$

en posant

$$M = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$Q = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1.$$

Supposons d'abord que les deux droites $M = 0$, $Q = 0$ soient distinctes : elles se couperont en un point P.

Le cas général est celui où le point P est quelconque.

Si le point P est sur le cercle, on dira que la corrélation est *singulière*.

Le point P, considéré comme double point (la droite du double point étant la tangente au cercle), et la sphère correspondante constituent le *couple singulier*.

Supposons maintenant que tous les déterminants déduits du Tableau

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

soient nuls.

Dans ce cas, les couples formés par les sphères tangentes et les doubles points de contact se composent, ou bien d'une sphère fixe et d'un double point quelconque, ou bien d'une sphère quelconque et d'un double point fixe. Si ce dernier double point est formé de deux points distincts, on peut dire que la corrélation est *doublement singulière;* s'il est formé de deux points confondus, la corrélation sera *triplement singulière*.

II. — La forme fondamentale et les systèmes adjoints.

Lorsqu'on adopte comme élément générateur de l'espace une courbe dépendant de $n+1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, la rencontre de deux éléments infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme $M(u \mid du)$ des $(n+1)$ différentielles des $(n+1)$ paramètres dont dépend l'élément. Cette forme joue un rôle fondamental dans la géométrie des systèmes de courbes que l'on peut former avec l'élément considéré.

M. Kœnigs, à qui l'on doit la notion de la *forme fondamentale* $M(u \mid du)$, a montré que, si le nombre des paramètres est supérieur à quatre, cette forme fondamentale présente des particularités caractéristiques [1] : l'une de ces particularités consiste dans l'existence d'un système adjoint composé de $(n-2)$ formes. Il nous est nécessaire de rappeler comment M. Kœnigs établit ce point.

Supposons les équations de l'élément considéré mises sous la forme

$$x = f(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u),$$
$$y = \varphi(z \mid u).$$

Convenons d'une façon générale de la notation suivante; θ étant une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, nous poserons

$$\boxed{\theta, t} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} t_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} t_2 + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial u_{n+1}} t_{n+1}.$$

Si les courbes (u) et $(u+du)$ se coupent au point (x, y, z), on a

$$\boxed{f, du} = 0,$$
$$\boxed{\varphi, du} = 0.$$

En éliminant z entre ces deux équations, on trouve une forme homogène des différentielles du, dont les coefficients dépendent des u. Désignons par $M(u \mid du)$ cette forme qui n'est définie qu'à un facteur près, indépendant des différentielles. Au lieu des du, introduisons des quantités finies t_1,

---

(1) G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Acta Mathematica*, t. X).

$t_2, \ldots, t_{n+1}$ et considérons la forme

$$\mathrm{M}(u \mid t),$$

qui provient de l'élimination de z entre les équations

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \boxed{f, t} = 0, \\ \boxed{\varphi, t} = 0. \end{cases}$$

Pour interpréter ces équations, M. Kœnigs fait usage de la considération des espaces à plusieurs dimensions. Regardons les quantités u comme constantes, et les t comme les coordonnées linéaires homogènes d'un point d'un espace à n dimensions. Une équation homogène entre les t définit un espace à $(n-1)$ dimensions que l'on peut appeler une *surface;* si l'équation est linéaire, on a un espace linéaire à $(n-1)$ dimensions que l'on peut appeler un *plan*.

Ceci posé, différentions totalement les équations (A), en regardant les u comme constants, il vient

$$\frac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z} dz + \boxed{f, dt} = 0,$$

$$\frac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z} dz + \boxed{\varphi, dt} = 0;$$

d'où, en posant

$$-\lambda = \frac{\dfrac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z}},$$

on conclut

$$\boxed{f, dt} + \lambda \boxed{\varphi, dt} = 0.$$

Par conséquent, si nous exprimons le contact de l'espace linéaire à $(n-1)$ dimensions

$$\mathrm{T}_1^1 t_1 + \mathrm{T}_2^1 t_2 + \ldots + \mathrm{T}_{n+1}^1 t_{n+1} = 0$$

avec la surface

$$\mathrm{M}(u \mid t) = 0,$$

nous avons à éliminer z et λ entre les équations

$$\frac{T_1^1}{\frac{\partial f}{\partial u_1}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}=\frac{T_2^1}{\frac{\partial f}{\partial u_2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}}=\ldots=\frac{T_{n+1}^1}{\frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

et nous obtenons $(n-2)$ équations homogènes entre les quantités T^1, dont les coefficients dépendent des u, et que nous écrirons

$$\mathfrak{M}_1(u\,|\,T^1)=0,\qquad \mathfrak{M}_2(u\,|\,T^1)=0,\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T^1)=0.$$

Le système des premiers membres de ces $(n-2)$ équations est le système adjoint composé de $(n-2)$ formes.

M. Kœnigs a montré l'importance de ce système adjoint dans l'étude du système de courbes défini par une relation entre les $(n+1)$ paramètres $u_1, \ldots, u_{n+1}$; nous y reviendrons d'ailleurs plus loin.

Nous verrons qu'il y a également intérêt à attacher au système de courbes défini par k relations entre $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ un système adjoint qui pourra être dit de $k^{\text{ième}}$ espèce et qui sera composé de $(n-k-1)$ formes.

Si nous exprimons le contact d'un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions avec la surface $M(u\,|\,t)=0$, nous avons à éliminer $z, \lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ entre les équations

$$\frac{\mu_1 T_1^1+\mu_2 T_1^2+\mu_3 T_1^3+\ldots+\mu_k T_1^k}{\frac{\partial f}{\partial u_1}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}=\frac{\mu_1 T_2^1+\mu_2 T_2^2+\ldots+\mu_k T_2^k}{\frac{\partial f}{\partial u_2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}}=\ldots$$
$$=\frac{\mu_1 T_{n+1}^1+\ldots+\mu_k T_{n+1}^k}{\frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

et nous obtenons $(n-k-1)$ équations homogènes entre les quantités $T^1, \ldots, T^k$, que nous écrirons

$$\mathfrak{M}_1(u\,|\,T^1, T^2, \ldots, T^k)=0,\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{M}_{n-k-1}(u\,|\,T^1, T^2, \ldots, T^k)=0.$$

Le système des premiers membres de ces équations est le système adjoint de $k^{\text{ième}}$ espèce, composé de $(n-k-1)$ formes.

Considérons le cas particulier de l'espace cerclé.

Si nous prenons pour coordonnées du cercle les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ dans les équations

$$\alpha x+\beta y+\gamma-z=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0$$

du cercle rapporté à trois axes coordonnés rectangulaires, la condition de rencontre des cercles infiniment voisins

$$(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad (a + da, b + db, \ldots, \gamma + d\gamma)$$

s'exprime par l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles da, db, ..., $d\gamma$, qu'on obtient en éliminant x, y, z entre les quatre équations

$$\begin{gathered}
x\,d\alpha + y\,d\beta + d\gamma = 0,\\
x\,da + y\,db + dc = 0,\\
\alpha x + \beta y + \gamma - z = 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0.
\end{gathered}$$

L'élimination est immédiate. Si l'on prend ensuite des coordonnées u_1, u_2, ..., u_6 quelconques pour le cercle dans l'espace, cette forme devient une forme biquadratique des différentielles du_1, du_2, ..., du_6, que nous désignerons par $N(du)$. Soient $N_1(du)$, $N_2(du)$, $N_3(du)$ ce que deviennent les formes quadratiques

$$\begin{gathered}
db\,d\gamma - d\beta\,dc,\\
dc\,d\alpha - d\gamma\,da,\\
da\,d\beta - d\alpha\,db,
\end{gathered}$$

on aura

$$N(du) = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + (aN_1 + bN_2)N_3 + (\alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3)^2.$$

Soit K une expression indépendante des différentielles des coordonnées; l'évanouissement de la forme biquadratique des différentielles des coordonnées

$$\mathbf{M}(du) = \mathbf{K}\mathbf{N}(du) = \Sigma \mathbf{M}_{ij} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j$$

exprime la rencontre des cercles infiniment voisins (u) et $(u + du)$.

La forme $M(du)$ est la forme fondamentale relative au cercle; c'est une forme quadratique ternaire par rapport à N_1, N_2, N_3. D'après sa définition, elle n'est déterminée qu'à un facteur près K, indépendant des différentielles.

Si l'on exprime que les deux cercles infiniment voisins se rencontrent en deux points, on obtient deux conditions en annulant les déterminants déduits du Tableau

$$\begin{vmatrix} da & db & dc \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}.$$

On aura donc, d'une façon générale, ces deux conditions en annulant les trois formes quadratiques

$$N_1(du), \quad N_2(du), \quad N_3(du).$$

Si l'on exprime que les deux points de rencontre sont confondus, on a une nouvelle condition

$$P(du) = 0\,;$$

la forme $P(du)$ est une forme quadratique des différentielles.

Si l'on se reporte à ce que l'on a dit sur les corrélations et si l'on considère une corrélation anharmonique sur un cercle, on voit que :

1° L'évanouissement de $M(t)$ exprime que la corrélation est singulière; le cercle $(u+du)$, qui la détermine sur le cercle (u), rencontre ce cercle en un point;

2° L'évanouissement simultané de $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, qui équivaut à deux conditions, exprime que la corrélation est doublement singulière; le cercle $(u+du)$, qui la détermine sur le cercle (u), rencontre ce cercle en deux points.

Les cercles (u) et $(u+du)$ ont ainsi un couple commun (a, α). Ce couple est le *couple singulier* de la corrélation doublement singulière.

Tout couple d'une corrélation doublement singulière admet pour un de ses éléments (double point ou sphère) au moins un des éléments du couple singulier.

3° L'évanouissement simultané de $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, $P(t)$ exprime que la corrélation est triplement singulière.

Nous pouvons maintenant compléter ce que nous avons dit précédemment. On est amené à la classification rationnelle des surfaces cerclées due à M. Enneper et fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins :

Première classe. — Deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun.

Deuxième classe. — Chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice infiniment voisine; les points communs forment sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent. Nous donnerons, d'après M. Darboux, le nom d'*arête de rebroussement* de la surface à cette courbe.

Troisième classe. — Deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs. Le cercle mobile reste constamment tangent à deux directrices curvilignes; chaque génératrice est une ligne de courbure de la surface.

Quatrième et cinquième classes. — Les deux points communs se confondent.

Arrivons maintenant au système adjoint de première espèce et prenons encore les équations du cercle sous la forme

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u_4 x + u_5 y + u_6 = 0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} D &= u_1(2y + u_5) - u_2(2x + u_4), \\ R &= -(2y + u_5) + \lambda(2x + u_4), \\ S &= u_2 - \lambda u_1; \end{aligned}$$

on trouve, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u_1} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_1} = x\frac{R}{D}, &\qquad &\frac{\partial x}{\partial u_4} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_4} = x\frac{S}{D}, \\ &\frac{\partial x}{\partial u_2} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_2} = y\frac{R}{D}, &\qquad &\frac{\partial x}{\partial u_5} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_5} = y\frac{S}{D}, \\ &\frac{\partial x}{\partial u_3} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_3} = \frac{R}{D}, &\qquad &\frac{\partial x}{\partial u_6} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_6} = \frac{S}{D}. \end{aligned}$$

Le système adjoint s'obtient, par suite, en éliminant x, y entre les relations

$$x = \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_4}{T_6},$$

$$y = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_5}{T_6},$$

$$x^2 + y^2 + (u_1 x + u_2 y + u_3)^2 + u_4 x + u_5 y + u_6 = 0.$$

On a trouvé, pour une expression de la forme fondamentale,

$$M(u \mid du) = Q(u \mid N) = N_1^2 + N_2^2 + (u_1 N_1 + u_2 N_2 + N_3)^2 + u_4 N_1 N_3 + u_5 N_2 N_3 + u_6 N_3^2,$$

en y faisant $k = 1$ et posant

$$\begin{aligned} N_1(u \mid du) &= N_1 = du_3\, du_5 - du_2\, du_6, \\ N_2(u \mid du) &= N_2 = du_1\, du_6 - du_3\, du_4, \\ N_3(u \mid du) &= N_3 = du_2\, du_6 - du_1\, du_5. \end{aligned}$$

Les équations du système adjoint de première espèce apparaissent donc sous la forme suivante :

$$N_1(u \mid T) = 0,$$
$$N_2(u \mid T) = 0,$$
$$N_3(u \mid T) = 0,$$
$$Q(u \mid T) = 0.$$

Les trois premières équivalent à deux équations.

III. — Les surfaces de singularités.

On connaît l'importance qu'il y a, dans la théorie des systèmes de droites, à associer à chaque système une surface qui, pour le complexe, est la surface de singularités et, pour la congruence, la surface focale.

Lorsqu'on aborde la théorie des systèmes de courbes construits avec un élément donné, on est amené à chercher s'il n'est pas possible d'associer à chaque système une surface jouant le rôle des surfaces précédentes.

La question a été résolue depuis longtemps par M. Darboux en ce qui concerne les congruences, c'est-à-dire les systèmes de courbes dépendant de deux paramètres a et b (1). M. Darboux, considérant les équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

d'un système de courbes dépendant de deux paramètres a et b, remarque que, si l'on exprime que l'une des courbes du système passe par un point M, a et b seront, en général, déterminés. La condition que le plan tangent en M à une surface soit tangent à l'une des courbes qui y passent conduit à une équation aux dérivées partielles qui se décompose en équations linéaires. L'intégrale générale est formée des courbes pour lesquelles b est une fonction de a.

Si, entre les équations

$$(\alpha) \qquad f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}},$$

---

(1) DARBOUX, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre et Leçons sur la théorie genérale des surfaces.*

on élimine a et b, on obtient une surface qui est la *surface focale* du système de courbes: c'est la solution singulière. Cette surface focale est l'enveloppe de toutes les intégrales générales et peut être considérée comme lieu des intersections successives de deux courbes infiniment voisines du système; toutes ces courbes lui sont tangentes en un nombre limité de points; les points de contact de l'une des courbes avec la surface focale s'obtiennent en résolvant les équations (α) dans lesquelles a et b ont reçu les valeurs qui correspondent à la courbe considérée; ces points portent le nom de *points focaux*.

Ce point rappelé, supposons qu'on adopte comme élément une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ et dont nous prendrons, comme précédemment, les équations sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u). \end{cases}$$

Désignons par $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_{n-k+1}, \ldots, S_1, S_0$ les systèmes de courbes que l'on peut former avec l'élément considéré, l'indice indiquant l'indétermination du système. Nous avons vu qu'à chacun des systèmes $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_3$ on pouvait faire correspondre un système adjoint de la forme fondamentale; c'est par l'interprétation géométrique des équations qui conduisent à ces systèmes adjoints que nous parviendrons aux surfaces de singularités des différents systèmes de courbes.

Considérons le système S_{n-k+1} défini par les k relations

$$(2)\qquad \theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0$$

entre les paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, et supposons que k soit inférieur à $(n-1)$. A ce système correspond le système adjoint de $k^{\text{ième}}$ espèce composé des $(n-k-1)$ formes que nous avons représentées par les symboles

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k), \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-k-1}(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k).$$

Éliminons $z, \lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ entre les équations

$$(3)\qquad \frac{\mu_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u_1} + \ldots + \mu_k \dfrac{\partial \theta_k}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \ldots = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_{n+1}} + \mu_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u_{n+1}} + \ldots + \mu_k \dfrac{\partial \theta_k}{\partial u_{n+1}}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

nous obtenons les $(n-k-1)$ équations

$$(4)\qquad \mathfrak{M}_1\left(u\left|\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\right.\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{M}_{n-k-1}\left(u\left|\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\right.\right) = 0.$$

Les courbes du système S_{n-k+1} qui satisfont à ces relations sont les *courbes singulières.*

Si l'on élimine les paramètres λ, μ_1, μ_2, ..., μ_k, u_1, ..., u_{n+1} entre les équations (1), (2), (3), on obtient généralement une seule équation

$$S(x, y, z) = 0$$

entre x, y, z. La surface représentée par cette équation est la *surface de singularités,* et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Les courbes singulières forment une congruence et sont tangentes à la surface de singularités qui est une des nappes de la surface focale de la congruence.

Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le mode de formation des équations (4) et de remarquer que, si

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

sont les équations d'une courbe dépendant de deux paramètres a et b, les points focaux s'obtiennent en adjoignant à ces deux équations celle qu'on forme en annulant le déterminant fonctionnel des deux fonctions f et φ par rapport aux variables a et b.

Nous avons défini les courbes singulières et la surface de singularités de l'un quelconque des systèmes S_n, S_{n-1}, ..., S_3; pour le système général S_{n-k+1}, il nous a suffi d'adjoindre aux équations (1) et (2) les équations (3).

Que deviennent ces notions lorsqu'on considère le système S_2? Dans ce cas, on a $k = n - 1$, et les équations (3) constituent la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant fonctionnel des $(n+1)$ fonctions f, φ, θ_1, θ_2, ..., θ_{n-1} par rapport aux $(n+1)$ variables u_1, u_2, ..., u_{n+1} soit nul; l'élimination des paramètres z, λ, μ_1, ..., μ_{n-1}, u_1, ..., u_{n+1} entre les équations (1), (2), (3) conduit donc, dans ce cas, à la surface focale de la congruence.

Ainsi la surface focale apparaît comme la surface de singularités de la congruence pour laquelle on peut dire que tous les cercles sont singuliers.

Revenons à la surface de singularités du système général S_{n-k+1}, l'indice k pouvant prendre maintenant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, et cherchons le plan tangent en un point de cette surface. L'équation de la surface de singularités s'obtient en éliminant λ, $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $u_1, \ldots, u_{n+1}$ entre les équations (1), (2), (3); on peut se dispenser d'effectuer cette élimination en convenant de conserver toutes ces équations et d'y regarder λ, $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $u_1, \ldots, u_{n+1}$ comme des fonctions à déterminer; le plan tangent à la surface de singularités s'obtiendra alors en différentiant les équations (1), (2), (3), dans lesquelles on considérera λ, $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $u_1, \ldots, u_{n+1}$ comme des variables; or différentions les équations (1), et formons la combinaison

$$dx + \lambda\, dy.$$

En vertu des équations (2), (3), il vient

$$dx + \lambda\, dy = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz.$$

Cette équation qui définit le plan tangent conduit naturellement aux propriétés générales des surfaces de singularités.

Considérons un système S_{n-k} défini par les équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k = 0, \qquad \theta_{k+1} = 0$$

et le système S_{n-k+1} défini par les k premières de ces équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k = 0;$$

envisageons une courbe singulière de S_{n-k+1}, vérifiant $\theta_{k+1} = 0$; il apparaît immédiatement que ce sera aussi une courbe singulière du système S_{n-k}; de plus, le point de contact avec la surface de singularités et le plan tangent en ce point seront identiques pour les deux systèmes; ceci est applicable à toutes les courbes singulières de S_{n-k+1} qui vérifient l'équation $\theta_{k+1} = 0$ et qui forment une surface; on a donc la proposition suivante :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *contenu dans le système* S_{n-k+1} *est circonscrite à la surface de singularités de* S_{n-k+1}.

On peut donner à cette proposition d'autres formes, par exemple, la suivante, qui nous sera utile :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes* S_{n-k+1} *qui contiennent ce système* S_{n-k}.

Considérons maintenant un système S_{n-k}, défini par les équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_k = 0, \quad \theta_{k+1} = 0,$$

et le système S_{n-k+2}, défini par les $(k-1)$ premières de ces équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_{k-1} = 0.$$

Une courbe singulière de S_{n-k+2}, qui vérifie les équations $\theta_k = 0$, $\theta_{k+1} = 0$, sera aussi une courbe singulière de S_{n-k}. De plus, le point de contact avec la surface de singularités et le plan tangent en ce point seront identiques pour les deux systèmes. Ceci est applicable à toutes les courbes singulières de S_{n-k+2}, qui vérifient les équations $\theta_k = 0$, $\theta_{k+1} = 0$ et qui sont en nombre limité. On a donc la proposition suivante, qui peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence du théorème précédent :

La surface de singularités d'un système S_{n-k}, *contenu dans le système* S_{n-k+2}, *est tangente en un nombre limité de points à la surface de singularités de* S_{n-k+2}.

Ou encore :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes* S_{n-k+2} *qui contiennent* S_{n-k}.

Les théorèmes précédents s'appliquent au système S_1, si l'on prend pour surface de singularités de S_1 la surface sur laquelle sont réparties toutes les courbes de S_1 ; il suffit, pour s'en convaincre, de répéter les mêmes raisonnements. On a ainsi les théorèmes suivants qui, lorsqu'on prend comme élément la droite, deviennent les théorèmes connus relatifs aux systèmes de droites :

La surface de singularités d'un complexe (ou système triplement indéterminé) de courbes est circonscrite à la surface focale de toute congruence de ce complexe.

La surface de singularités d'un complexe de courbes touche en un nombre limité de points toute surface du complexe.

La surface focale d'une congruence est circonscrite à toute surface de la congruence.

On connaît la proposition qui établit un lien entre la surface de singularités du complexe de droites et les cônes du complexe. Nous devons montrer qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale relative aux systèmes de courbes.

Considérons d'abord une congruence, une courbe C de cette congruence, et soit P un point de contact de C avec la surface focale ; les courbes de la congruence passant par un point de l'espace forment un système S_0. Si le point de l'espace tend vers le point P, deux courbes de S_0 tendent à se confondre avec C; on peut dire que C est une *ligne double* du système S_0 correspondant à P et l'on a la proposition suivante :

Les courbes d'une congruence passant par un point P *de l'espace forment un système* S_0 ; *le lieu du point* P, *tel que l'une des courbes passant par ce point soit une ligne double de* S_0, *est la surface focale de la congruence.*

Si l'on considère maintenant un complexe, il résulte immédiatement de la définition de la surface de singularités la proposition suivante :

Les courbes du complexe, passant par un point P *de l'espace, forment un système* S_1 *de courbes réparties sur une surface à point conique* Σ_1 ; *le lieu du point* P, *tel que l'une des courbes passant par ce point soit une ligne double de la surface* Σ_1, *est la surface de singularités du complexe. La courbe qui forme la ligne double est une courbe singulière. Les surfaces* Σ_1 *à point conique, qui dépendent de trois paramètres, ont néanmoins une enveloppe qui est la surface de singularités du complexe.*

Il n'y a aucune difficulté à étendre ce théorème aux systèmes généraux de courbes : il suffit de généraliser les notions bien connues relatives aux droites doubles des congruences et complexes de droites.

Soit un système S_{n-k+1}, défini par les k équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k = 0.$$

Une courbe $(u + du)$, infiniment voisine d'une courbe (u) du système et appartenant à ce système, vérifie les équations

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \quad \boxed{\theta_2, du} = 0, \quad \ldots, \quad \boxed{\theta_k, du} = 0.$$

La courbe (u) sera une *courbe double* du système S_{n-k+1}, si ce système d'équations est indéterminé.

Cette définition posée, on a la proposition suivante :

Les courbes d'un système S_{n-k+1}, *passant par un point* P *de l'espace, forment un système* S_{n-k-1}; *le lieu du point* P, *tel què l'une des courbes passant par ce point soit une courbe double du système* S_{n-k-1}, *est la surface de singularités de* S_{n-k+1}. *La courbe double est une courbe singulière de* S_{n-k+1}.

Si l'on considère une courbe double d'un système, pour tous les systèmes compris dans le premier et contenant cette courbe, elle sera également une courbe double.

En particulier, les surfaces à point conique, relatives à tous les points d'une courbe double d'un complexe, admettront toutes cette courbe pour ligne double.

IV. — Les systèmes de cercles.

Surfaces cerclées.

Une surface cerclée est représentée par les cinq équations

$$\theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \quad \theta_2(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \quad \theta_3(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$
$$\theta_4(u_1, \ldots, u_6) = 0, \quad \theta_5(u_1, \ldots, u_6) = 0.$$

Un cercle $(u + du)$, infiniment voisin d'un cercle (u) de la surface et appartenant à cette surface, vérifie les équations

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \quad \boxed{\theta_2, du} = 0, \quad \boxed{\theta_3, du} = 0, \quad \boxed{\theta_4, du} = 0, \quad \boxed{\theta_5, du} = 0.$$

Appelons Δ_α le déterminant obtenu en retranchant la colonne d'indice α

dans le Tableau :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_2} & \frac{d\theta_1}{\partial u_3} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_4} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_5} & \frac{\partial\theta_1}{du_6} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial\theta_2}{du_6} \\ \frac{\partial\theta_3}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\theta_4}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\theta_5}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial\theta_5}{\partial u_6} \end{vmatrix}.$$

On déduit des équations précédentes

$$\frac{du_1}{\Delta_1} = \frac{du_2}{\Delta_2} = \ldots = \frac{du_6}{\Delta_6}.$$

On peut considérer les Δ comme les coordonnées homogènes de la corrélation relative au cercle (u), c'est-à-dire de la corrélation anharmonique que la surface définit sur ce cercle, en vertu du théorème sur la distribution des sphères tangentes.

Posons $I = M(\Delta)$ et considérons les cercles de la surface pour lesquels la quantité I est nulle. On a $I = 0$ quand tous les Δ sont nuls, et alors le cercle (u) est une ligne double de la surface. Écartant ce cas, l'équation $I = 0$ exprime qu'autour du cercle (u) la surface cerclée se comporte comme une surface de la deuxième classe : les normales le long du cercle rencontrent, outre l'axe de ce cercle, une droite fixe, etc.

On voit, de plus, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cerclée soit une surface de la deuxième classe, c'est que l'équation

$$I = 0$$

soit vérifiée par tous ses cercles, sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

Posons

$$J_1 = N_1(\Delta), \qquad J_2 = N_2(\Delta), \qquad J_3 = N_3(\Delta).$$

Pour certaines surfaces, il existera des cercles de la surface pour lesquels les deux conditions obtenues en écrivant

$$J_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_3 = 0$$

seront vérifiées. Ces équations expriment qu'autour du cercle (u) la surface se comporte comme une surface cerclée de la troisième classe. Ainsi, les normales correspondant aux points de la génératrice forment un cône de révolution, et cette génératrice est une ligne de courbure de la surface.

Si, de plus, la condition $P(\Delta) = 0$ est vérifiée, la surface se comporte comme une surface de la quatrième classe, ou comme une surface de la cinquième classe.

Nous voyons en même temps que les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les génératrices soient des lignes de courbure s'obtiennent en écrivant que les deux conditions qui résultent de

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0$$

sont vérifiées par tous les cercles, sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

Deux surfaces cerclées qui, sur un cercle, définissent la même corrélation, se raccordent suivant ce cercle. Parmi les surfaces qui, suivant un cercle, se raccordent avec une surface cerclée donnée, on peut distinguer les *cyclides de raccordement*. Voici comment on les obtient :

Soient (a, α), (b, β), (c, γ) trois couples de la corrélation relative à un cercle (u) d'une surface cerclée; soient A, B, C trois cercles appartenant respectivement à ces couples. La cyclide engendrée, suivant le mode de génération de M. Casey, en prenant les trois cercles A, B, C pour directrices, est de raccordement.

On voit ainsi que ces cyclides sont triplement indéterminées. On peut, en effet, les envisager comme des cyclides passant par deux cercles (u) et $(u + du)$ infiniment voisins.

On pourrait définir les cyclides de raccordement en les considérant comme des anallagmatiques. Ce point a été traité par M. Demartres.

Congruences de cercles.

Une congruence est définie par quatre équations

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$
$$\theta_3(u_1, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_4(u_1, \ldots, u_6) = 0.$$

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins de la congruence, on a

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_3, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_4, du} = 0$$

ou, en introduisant les coordonnées t d'une corrélation

$$\boxed{\theta_1, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_3, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_4, t} = 0.$$

Les corrélations sur un cercle d'une congruence qui appartiennent à la congruence forment donc un système M_1.

Le lieu des points P correspondant aux corrélations d'un système M_1 est une conique : les coordonnées du point P correspondant à l'une de ces corrélations sont, en effet, des fractions rationnelles d'un paramètre λ pour lesquelles les numérateurs et les dénominateurs sont du second degré. On a donc la conclusion suivante :

Les corrélations qui appartiennent à une congruence sur un de ses cercles admettent quatre couples simples fixes (a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4).

L'existence de ces quatre couples montre que, parmi les corrélations qui appartiennent à la congruence, il y en a quatre singulières; cela résulte aussi d'ailleurs de la considération de la forme fondamentale; de là ce théorème analogue au théorème de Monge, relatif aux congruences de droites :

Étant donné un cercle d'une congruence, il existe quatre cercles de la congruence infiniment voisins du premier et le rencontrant.

(a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4) sont manifestement les couples singuliers des corrélations singulières, en considérant a_1, a_2, a_3, a_4 comme des doubles points; les points a_1, a_2, a_3, a_4 sont les *points focaux* et les sphères S_1, S_2, S_3, S_4 les *sphères focales* de la congruence.

Les points focaux ne dépendent que de deux paramètres ainsi que les sphères focales. Les points focaux engendrent donc des surfaces, les sphères focales enveloppent des surfaces.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre surfaces lieux des points a_1, a_2, a_3, a_4; elles pourront constituer, soit quatre surfaces distinctes, soit plus habituellement quatre nappes d'une seule et même surface qui est la *surface focale*.

Envisageons une surface cerclée de la deuxième classe de la congruence, une de ses génératrices (u) et l'arête de rebroussement (c) de la surface, courbe à laquelle cette génératrice reste constamment tangente; le point α_1 de contact de (u) avec (c), considéré comme double point, et la sphère Σ_1 correspondant à α_1 forment un couple singulier de ce cercle; d'ailleurs, puisqu'il correspond quatre couples singuliers à chaque cercle d'une congruence, tout cercle de la congruence appartient à quatre surfaces de la deuxième classe de cette congruence; les quatre points tels que α_1 sont identiques à a_1, a_2, a_3, a_4 et les quatre sphères, telles que Σ_1, à S_1, S_2, S_3, S_4. On en conclut que les quatre surfaces A_1, A_2, A_3, A_4 sont respectivement le lieu des quatre séries d'arêtes de rebroussement (c) des surfaces de la deuxième classe de la congruence, et par suite que :

Les cercles de la congruence sont tangents en quatre points à la surface focale.

Si nous considérons la corrélation singulière dans laquelle (a_1, S_1) est le couple singulier, (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4) seront trois couples simples. Une surface de la deuxième classe a son arête de rebroussement C_{a_1} sur la surface A_1, par exemple, et est circonscrite aux surfaces A_2, A_3, A_4 suivant des courbes C_{a_2}, C_{a_3}, C_{a_4}. La sphère S_2 étant tangente en a_2 à la surface de la deuxième classe est donc tangente en a_2 à la surface A_2; de même S_3 est tangente en a_3 à A_3 et S_4 est tangente en a_4 à A_4; par conséquent :

Les sphères focales sont tangentes à la surface focale.

De ce qui précède, résulte encore la proposition suivante :

Les surfaces cerclées d'une congruence qui ont une génératrice (u) commune se raccordent toutes suivant les couples (a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4).

Nous avons retrouvé, dans le cas du cercle, la surface focale considérée par M. Darboux dans le cas général et rattachée, comme nous l'avons rappelé, à la théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La surface focale se présente également, ainsi que l'a montré M. Lie, lorsque l'on considère les transformations de contact [1].

---

(1) LIE (S.), *Over en Classe geometriske Transformationer* (I. *Christiana Videnskabsselskabs Forhandlinger*, 1871, p. 67-109). — *Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. V).

Soient

$$\psi_1(x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0$$

les équations d'un cercle, où X, Y, Z sont les coordonnées courantes, et x, y, z trois paramètres.

Nous définirons une congruence de cercles en adjoignant à ces équations une relation entre x, y, z

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0.$$

Si l'on considère x, y, z comme les coordonnées d'un point, nous faisons correspondre à un point de la surface $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ un cercle. A la surface correspond la congruence de cercles.

Considérons sur chaque cercle l'un des points (X, Y, Z) de contact avec la surface focale et la transformation qui permet de passer du point (x, y, z) au point (X, Y, Z); on aperçoit immédiatement qu'elle jouit des propriétés des transformations de contact. On est ainsi amené à poser la question suivante.

Proposons-nous de résoudre l'identité connue

$$d\mathrm{Z} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = \rho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

en partant des deux relations

$$\psi_1(x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0.$$

L'équation

$$\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}p + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}q + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}p + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}q + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}},$$

jointe à ces deux relations, détermine X, Y, Z en fonction de z, x, y, p, q.

On peut interpréter ceci de la façon suivante.

Étant donnée une surface par l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

on en tire z en fonction de x et y; on porte cette valeur dans $\psi_1 = 0$,

$\psi_2 = 0$, qui deviennent, en posant $x = a$, $y = b$,

$$f(X, Y, Z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(X, Y, Z, a, b) = 0.$$

On cherche la surface enveloppe des cercles ainsi obtenus en éliminant a et b entre les équations

$$f = 0, \qquad \varphi = 0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}}.$$

On obtient ainsi la surface correspondant à la surface $F(x, y, z) = 0$. Ainsi, *quand le point* (x, y, z) *décrit une surface* $F(x, y, z) = 0$, *la congruence correspondante enveloppe une surface qui est la surface focale.*

L'équation aux dérivées partielles

$$\psi(X, Y, Z) = 0$$

aura ici la signification suivante : trouver une surface telle que la congruence qui se déduit de cette surface par les équations

$$\psi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

ait pour surface focale

$$\psi(X, Y, Z) = 0.$$

La solution singulière sera la véritable solution du problème.

Inversement, si l'on considère x, y, z comme fonctions de X, Y, Z, P, Q, l'équation aux dérivées partielles

$$\chi(x, y, z) = 0$$

aura la signification suivante : trouver la surface focale correspondant à $\chi(x, y, z) = 0$. La solution singulière sera encore la véritable solution du problème.

Un cas particulièrement remarquable est celui où les équations du cercle sont

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On arrive à la transformation apsidale considérée par M. Darboux ([1]).

Lorsque le point (x, y, z) décrit une surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

la congruence de cercles enveloppe la surface focale

$$\psi(X, Y, Z) = 0,$$

qui est l'apsidale de la surface $F(x, y, z) = 0$.

Inversement, la surface $F(x, y, z) = 0$ étant l'apsidale de la surface $\psi(X, Y, Z) = 0$, si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\psi(X, Y, Z) = 0,$$

la solution singulière est la surface apsidale de

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Complexes de cercles.

Trois équations,

$$(2) \qquad \theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, \ldots, u_6), \qquad \theta_3(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$

définissent un complexe de cercles.

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins, les équations suivantes

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_3, du} = 0$$

doivent être vérifiées.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne les relations

$$\boxed{\theta_1, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_3, t} = 0$$

(1) Darboux, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 211.

qui expriment que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle d'un complexe, qui appartiennent à ce complexe, forment un système linéaire M_2.

Parmi les corrélations, il y en a trois doublement singulières ; donc :

Étant donné un cercle du complexe, il existe trois cercles du complexe infiniment voisins du premier et le rencontrant en deux points.

On a trois couples doublement singuliers ; ces couples dépendent de trois paramètres.

Considérons une surface cerclée de la troisième classe du complexe, une de ses génératrices (u) et la courbe (C) à laquelle toutes les génératrices sont tangentes en deux points. Le double point de contact de (u) et de (C) forme avec la sphère correspondante un couple doublement singulier de ce cercle ; et, puisque à chaque cercle du complexe correspondent trois couples doublement singuliers, tout cercle du complexe appartient à trois surfaces de la troisième classe du complexe.

Si l'on considère les arêtes de rebroussement de ces trois surfaces, elles constituent trois systèmes de courbes à trois paramètres ; les cercles du complexe sont tangents en deux points à chacune de ces courbes.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u) \end{cases}$$

les équations du cercle.

Éliminons z, λ, μ_1, μ_2, μ_3 entre les équations

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_1} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_2} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_2} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \dots \\ &\qquad\qquad = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_6} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_6} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_6}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_6}}; \end{aligned} \right.$$

nous obtenons l'équation

$$\mathfrak{M}_1\left(u \mid \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du complexe qui satisfont à cette équation sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant λ, μ_1, μ_2, μ_3, u_1, u_2, ..., u_6 entre les équations (1), (2) et (3).

Lorsque les équations d'un cercle du complexe seront données sous une autre forme, on obtiendra facilement la surface de singularités en utilisant la propriété que nous avons signalée de cette surface.

Supposons, par exemple, que les équations d'un cercle du complexe soient données sous la forme

$$(a) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \\ \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \end{cases}$$

X, Y, Z étant des paramètres variables.

Si l'on considère les cercles passant par un point (x_0, y_0, z_0) de l'espace, ils forment une surface à point conique, dont on obtiendra l'équation en éliminant X, Y, Z entre les équations (a) et les relations

$$f_0 = f(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0,$$
$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0.$$

Considérons un cercle (X, Y, Z) de la surface et le cercle infiniment voisin $(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$. Ce dernier est déterminé par les équations

$$\frac{\partial f_0}{\partial X} dX + \frac{\partial f_0}{\partial Y} dY + \frac{\partial f_0}{\partial Z} dZ = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X} dX + \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} dY + \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} dZ = 0,$$

qui définissent en général les rapports $dX : dY : dZ$.

Ces équations forment un système indéterminé dans le cas où l'on a

$$\frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial X}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial X}} = \frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial Y}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial Y}} = \frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial Z}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial Z}}.$$

Il y a alors deux valeurs pour le système des rapports $dX : dY : dZ$ et, par suite, deux nappes de la surface se coupant suivant le cercle correspondant.

Si l'on élimine X, Y, Z entre les équations (a) et les équations

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{X}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{Y}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{d\mathrm{Z}}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{Z}}} = \lambda, \tag{b}$$

on obtient l'équation

$$\mathrm{S}(x, y, z) = 0$$

de la surface de singularités.

Le plan tangent en un point de cette surface sera déterminé par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz - \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations (a) et tenant compte des équations (b). Cette équation conduirait facilement aux propriétés de la surface de singularités.

Systèmes de cercles quadruplement indéterminés.

Deux équations,

$$\theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \tag{2}$$

définissent un pareil système.

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins du système, les équations suivantes

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, du} = 0$$

doivent être vérifiées.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne les relations

$$\boxed{\theta_1, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, t} = 0,$$

qui expriment que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système qui appartiennent à ce système forment un système linéaire M_3.

Adjoignons à $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ les deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u), \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant que les cercles passent par un point $P(x, y, z)$ de l'espace. On définit ainsi une congruence de cercles à laquelle on pourra faire correspondre une congruence de droites en transformant par inversion et prenant pour pôle le point P. Les surfaces focales se correspondront. A une droite double de la congruence de droites correspondra un cercle double de la congruence de cercles.

Si l'on exprime que l'un des cercles (u) passant par le point P est un cercle double de la congruence, on a à éliminer z, λ, μ_1, μ_2 entre les équations

$$(3) \qquad \frac{\mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{\mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} + \mu_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial u_2}}{\frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{\mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u_6} + \mu_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial u_6}}{\frac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_6}},$$

et l'on obtient ainsi les deux relations

$$\mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial \theta_1}{\partial u}, \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2\left(u \,\Big|\, \frac{\partial \theta_1}{\partial u}, \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du système qui satisfont à ces relations sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant λ, μ_1, μ_2, u_1, u_2, $\dots$, u_6 entre les équations (1), (2) et (3).

Lorsque les équations d'un cercle du système seront données sous une autre forme, il n'y aura aucune difficulté à obtenir la surface de singularités, en utilisant la propriété que nous avons signalée de cette surface.

Systèmes de cercles quintuplement indéterminés.

Soit l'équation d'un système quintuplement indéterminé

$$(2) \qquad \theta_1(u_1, u_2, \dots, u_6) = 0.$$

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins du système, l'équation

$$\boxed{\theta_1, du} = 0$$

doit être vérifiée.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne

$$\boxed{\theta_1, t} = 0$$

qui exprime que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système, qui appartiennent à ce système, forment un système linéaire M_4.

Adjoignons à $\theta_1 = 0$ les deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u), \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant que les cercles passent par un point $P(x, y, z)$ de l'espace. On définit ainsi un complexe de cercles auquel on peut faire correspondre un complexe de droites en transformant par inversion et prenant pour pôle le point P. Aux droites singulières et à la surface de singularités de ce complexe de droites correspondront les cercles singuliers et la surface de singularités du complexe de cercles.

Exprimons que l'un des cercles (u) passant par le point P est un cercle double du complexe de cercles ou un cercle double de la surface à point conique relative à un point quelconque de ce cercle; nous avons à éliminer z, λ entre les équations

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_6}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_6}},$$

et nous obtenons les trois relations

$$(4) \qquad \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_3\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du système qui satisfont à ces relations sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant λ, $u_1, \ldots, u_6$ entre les équations (1), (2), (3).

On peut se proposer de savoir si les équations (4) peuvent être vérifiées identiquement par tous les cercles du système de cercles.

Les raisonnements que nous avons faits à l'égard de la surface de singularités subsistent, et l'on voit que tous les cercles du système sont alors tangents à cette surface.

Il est clair que ce que l'on vient de dire dans le cas du cercle s'applique lorsqu'on considère une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres; si l'on remarque que l'élimination de λ, $u_1, \ldots, u_6$ entre les équations (1), (2), (3) conduit dans certains cas particuliers à deux relations entre x, y, z, on peut énoncer ce théorème, dû à M. Kœnigs [1] :

Si la fonction $\theta_1(u)$ *vérifie les équations du système adjoint de première espèce, soit identiquement, soit en vertu de l'équation* $\theta_1 = 0$, *cette dernière exprime que les courbes qui la vérifient touchent une surface fixe ou rencontrent une courbe fixe.*

M. Kœnigs a également démontré la réciproque :

Si l'équation $\theta_1 = 0$ *est telle que les courbes qui la vérifient touchent une surface fixe ou rencontrent une courbe fixe, les équations du système adjoint de première espèce sont vérifiées par la fonction* θ_1, *soit identiquement, soit en vertu de l'équation* $\theta_1 = 0$.

Nous établirons cette réciproque dans le cas où les courbes sont des cercles de la manière suivante :

Supposons, par exemple, que tous les cercles soient tangents à une surface, et soit P le point de contact de l'un des cercles (C); tous les cercles du système passant par le point P forment un complexe pour lequel (C) est un cercle double; il résulte, en effet, de la théorie des complexes de droites et des propriétés de l'inversion que la surface à point conique du complexe de cercles relative à un point quelconque du cercle (C) admet ce cercle comme ligne double.

Les relations (4) seront, par suite, vérifiées par le cercle (C).

Ajoutons que les équations des différents systèmes adjoints conduisent à des théorèmes analogues à celui de M. Kœnigs; nous n'insisterons pas sur ce point.

---

(1) G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 673-675, 842-844; *Acta mathematica*, t. X, p. 313-338).

SECONDE PARTIE.

LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE CERCLES.

I. — Les systèmes de doubles points sur la sphère et en particulier les systèmes linéaires.

Étant donnée une sphère quelconque S_5, on peut la considérer comme faisant partie d'un système de cinq sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 orthogonales deux à deux.

Un point quelconque de l'espace est représenté par ses cinq coordonnées pentasphériques x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 liées par la relation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0.$$

Les points de la sphère S_5 sont donc caractérisés par les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 liées par la relation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0.$$

L'équation d'une sphère quelconque étant

$$l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3+l_4x_4+l_5x_5=0,$$

celle d'un cercle quelconque de la sphère S_5 sera

$$l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3+l_4x_4=0\,;$$

R_1, R_2, R_3, R_4 étant les rayons des sphères S_1, S_2, S_3, S_4, on aura un grand cercle si la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{l_1}{R_1}+\frac{l_2}{R_2}+\frac{l_3}{R_3}+\frac{l_4}{R_4}=0.$$

Nous avons ainsi un système de coordonnées sur la sphère qui présente la plus grande analogie avec le système de coordonnées pentasphériques. Ce système de coordonnées s'applique d'ailleurs au plan ; les petits cercles sont remplacés par des cercles, les grands cercles sont remplacés par des droites. On peut dire aussi qu'on établit une correspondance entre les points d'une sphère et les points d'un plan ; à toute propriété du plan concernant les droites et les cercles, on pourra faire correspondre une propriété de la sphère relative aux grands cercles et aux petits cercles. Ajoutons que, pour le cas du plan, ce système de coordonnées a déjà été considéré, sous une forme peu différente, par M. Gino Loria (1).

Le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 sera déterminé par les quatre traces C_1, C_2, C_3, C_4 des sphères S_1, S_2, S_3, S_4 sur la sphère S_5 ; ces cercles C_1, C_2, C_3, C_4 seront les *cercles coordonnés*.

Considérons sur la sphère S_5 deux cercles définis par les équations

$$\sum_1^4 a_i x_i = 0, \qquad \sum_1^4 b_i x_i = 0$$

et posons

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

en sorte qu'on a

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ki} = -p_{ik}.$$

Les quantités p_{ik}, au nombre de six seulement, si l'on tient compte de ces dernières relations, peuvent être considérées comme les coordonnées du faisceau de cercles déterminé par les deux cercles donnés ou comme les coordonnées du double-point d'intersection de ces deux cercles.

Ces quantités interviennent dans l'équation de chacun des cercles appartenant au faisceau et orthogonal à chacun des cercles coordonnés. Par exemple, le cercle du faisceau orthogonal à C_i a pour équation

$$p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + p_{i3}x_3 + p_{i4}x_4 = 0.$$

Ces six quantités p_{ik} ne sont pas indépendantes ; il existe entre elles la relation

$$\Omega = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

On peut donner une autre interprétation des quantités p_{ik} ; montrons qu'elles peuvent être considérées comme les coordonnées pluckériennes de la droite du double point d'intersection des deux cercles.

En effet, dans le système de coordonnées pentasphériques, toute sphère

---

(1) Gino Loria, *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du quatrième ordre* (*Quarterly Journal*, t. XXII).

est représentée par une équation linéaire

$$\sum_1^5 l_i x_i = 0;$$

les rapports mutuels des cinq quantités l_i sont les coordonnées de la sphère. La sphère se réduit à un plan, si l'on a

$$\sum \frac{l_i}{R_i} = 0,$$

en désignant par R_i le rayon de la sphère coordonnée $x_i = 0$.

Les plans de l'espace sont, par suite, déterminés par cinq quantités l_i, et ces coordonnées satisfont à la relation linéaire $\sum \frac{l_i}{R_i} = 0$.

On doit à M. Darboux la remarque suivante (1) :

Le système actuel de coordonnées, quand il est employé à la détermination des plans, est un système de coordonnées tangentielles surabondantes; car les cinq coordonnées l_i sont proportionnelles aux distances divisées par R_i des centres des cinq sphères S_i au plan considéré.

Les quantités l_1, l_2, l_3, l_4 peuvent être considérées comme les coordonnées tangentielles du plan rapporté au tétraèdre des centres des sphères S_1, S_2, S_3, S_4.

Or, reportons-nous au double point d'intersection des cercles qui sont situés sur S_5 et qui ont pour équations, lorsqu'on choisit C_1, C_2, C_3, C_4 comme cercles coordonnés,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0.$$

Le plan du premier cercle a pour équation, dans le système de coordonnées pentasphériques,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \lambda x_5 = 0,$$

où λ est une constante convenablement déterminée; donc a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être considérées comme les coordonnées tangentielles du plan du

(1) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 260.

cercle rapporté au tétraèdre des centres de S_1, S_2, S_3, S_4 ; une conclusion semblable existant à l'égard du second cercle, on voit que :

Les six quantités p_{ik} sont les coordonnées pluckériennes de la droite du double point d'intersection des deux cercles, le tétraèdre de référence ayant pour sommets les centres des sphères S_1, S_2, S_3, S_4.

L'étude des doubles points situés sur une sphère S_5 pourra être faite, soit comme conséquence de l'étude des systèmes de droites, soit d'une façon directe en appliquant des principes analogues à ceux utilisés par M. Kœnigs dans l'étude des systèmes de cercles.

On pourra calculer la distance des deux points et l'on aura cette conséquence que la distance est nulle lorsque la forme

$$\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2$$

est nulle.

Nous dirons qu'un cercle et un double point (a_1, a_2) sont orthogonaux lorsque le cercle sera orthogonal à tous les cercles passant par les deux points a_1, a_2. Étant donnés deux cercles, si par l'un d'eux on peut mener une sphère orthogonale à l'autre, réciproquement, on peut, par celui-ci, mener une sphère orthogonale au premier, et l'on dit alors que les deux cercles sont *en involution*.

De même, étant donnés deux doubles points, si par l'un d'eux on peut mener un cercle orthogonal à l'autre, réciproquement, on peut par celui-ci mener un cercle orthogonal au premier, et l'on dira alors que les doubles points sont *en involution*.

La condition d'involution sera d'ailleurs

$$\Xi(p, p') = 0,$$

en désignant par $\Xi(p, p')$ la forme polaire de $\Xi(p)$.

La position d'un double point sur S_5 dépend de quatre paramètres ; on peut concevoir des systèmes de doubles points définis par des équations homogènes entre les coordonnées p_{ik} ; les droites des doubles points formeront des systèmes correspondants. Si les équations sont linéaires, on a des *systèmes linéaires* que l'on peut représenter par les symboles K_3, K_2, K_1, K_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Système K_3.

Soit

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$$

l'équation qui définit ce système K_3.

Considérons d'abord l'étude de K_3 comme conséquence de celle du complexe linéaire de droites.

Si l'on cherche la distribution des doubles points du système sur un cercle C, on trouve que :

Toutes les droites des doubles points situés sur un cercle C *passent par un même point* O.

Le point O est le foyer du plan du cercle C par rapport au complexe linéaire formé par les droites des doubles points.

Si l'on considère le cercle C′ d'intersection de la sphère et du plan polaire du point O par rapport à cette sphère, on peut dire que :

Tous les doubles points d'un système K_3 qui sont situés sur un cercle sont orthogonaux à un second cercle C′ qui est lui-même orthogonal à C.

Aux propriétés des droites conjuguées, on pourra faire correspondre des propriétés des doubles points déterminés par ces droites.

Nous pouvons, en partant des propriétés du complexe linéaire, parvenir, par des considérations géométriques, à la réduction à la forme canonique

$$\mathcal{A}_{12} \mathcal{P}_{12} + \mathcal{A}_{34} \mathcal{P}_{34},$$

de la forme bilinéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik},$$

où

$$i = 1, 2, 3, 4, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \qquad \text{et} \qquad p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i,$$

au moyen d'une même substitution orthogonale effectuée sur les x et sur les y.

En effet, considérons sur la sphère S_5 un cercle ayant pour équation

$$\sum_1^4 a_i x_i = 0.$$

Si l'on rapporte les points de la sphère à de nouveaux cercles coordonnés, les formules qui lient les coordonnées x_i aux nouvelles coordonnées constituent une substitution orthogonale; les formules liant les coefficients a_i

aux nouveaux coefficients dans l'équation du cercle constitueront par conséquent une substitution orthogonale.

Cherchons donc une transformation de coordonnées telle que l'équation qui définit le système devienne

$$\mathcal{A}_{12}\mathcal{P}_{12} + \mathcal{A}_{34}\mathcal{P}_{34} = 0.$$

Tout revient manifestement à déterminer deux droites qui soient conjuguées à la fois par rapport à la sphère et par rapport au complexe linéaire. On peut se rendre compte de l'existence de ces deux droites CC_0, $C'C'_0$ de la façon suivante :

Considérons leurs points d'intersection C, C_0, C', C'_0 avec la sphère. Les côtés du quadrilatère $CC'C_0C'_0$ doivent être quatre génératrices de la sphère et quatre droites appartenant au complexe; l'existence des deux droites CC_0, $C'C'_0$ résultera donc de la démonstration de la proposition suivante :

Le nombre des génératrices d'une quadrique qui appartiennent à un complexe linéaire est égal à quatre; ces quatre droites forment un quadrilatère gauche.

Or, si l'on considère un système de génératrices de la quadrique, il est l'intersection de trois complexes linéaires; adjoignant le complexe considéré, on a deux génératrices du système faisant partie de ce complexe; le même raisonnement s'applique au second système de génératrices.

Remarquons en passant cette conséquence du théorème : si l'on envisage une quadrique et sa polaire réciproque par rapport à un complexe linéaire, ces deux quadriques se coupent suivant quatre droites.

Le théorème que nous avons établi n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème plus général.

M. Halphen a énoncé, à l'égard des surfaces réglées, le théorème suivant [1] :

Le nombre des génératrices rectilignes d'une surface réglée qui satisfont à une seule condition est égal au produit du degré de la surface par le *degré de la condition*.

On entend par *degré de la condition* le nombre des droites, satisfaisant à

---

[1] HALPHEN, *Sur les droites qui satisfont à des conditions données* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII, p. 1441).

cette condition, qui passent par un point donné et sont situées dans un plan contenant ce point.

La démonstration donnée par M. Halphen suppose essentiellement que par un point quelconque de la surface ne passe qu'une seule génératrice; elle ne s'applique donc pas aux quadriques. En se servant des principes qui ont guidé M. Halphen dans le cas général, on arrive facilement au théorème suivant :

Le nombre des génératrices rectilignes d'une quadrique qui satisfont à une seule condition est égal au produit du degré de la surface par le *double* du degré de la condition.

On a étudié le système K_3 en supposant connue la théorie des complexes linéaires de droites; mais on peut opérer directement, en répétant les raisonnements faits par M. Kœnigs dans le cas des systèmes de cercles.

Étudions la distribution sur le cercle C,

$$\Sigma l_i x_i = 0,$$

des doubles points du système K_3 défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0.$$

Posons

$$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k,$$

et considérons le cercle C′ orthogonal à C et défini par l'équation

$$\Sigma l'_i x_i = 0.$$

Soit un cercle Σ

$$\sum_i \lambda_i x_i = 0,$$

coupant C suivant un double point faisant partie du système K_3; on devra avoir la condition

$$\Sigma l'_i \lambda_i = 0,$$

qui exprime que les cercles C′ et Σ sont orthogonaux; donc :

Tous les doubles points d'un système K_3 *qui se trouvent sur un cercle* C *sont orthogonaux à un second cercle* C′ *qui est lui-même orthogonal à* C.

Cherchons les cercles C qui coïncident avec le cercle C′ qui leur correspond; les rayons de ces cercles seront nuls et l'on aura, pour l'un de ces cercles,

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = \frac{l'_4}{l_4} = -s,$$

s étant un paramètre à déterminer; d'ailleurs on a

$$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k.$$

L'inconnue s sera, par suite, déterminée par l'équation

$$\begin{vmatrix} s & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \Sigma a_{ij}^2, \\ \mathrm{J} &= (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2. \end{aligned}$$

Représentons par $\xi(a)$ la forme adjointe de $\Xi(p)$ et par $\omega(a)$ la forme adjointe de $\Omega(p)$; on voit que l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \xi(a), \\ \mathrm{J} &= [\omega(a)]^2. \end{aligned}$$

Les quantités I et J sont les invariants du système K_3.

Désignons par σ, $-\sigma$, σ', $-\sigma'$ les racines de l'équation

$$s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0.$$

A chacune répond un cercle de rayon nul, ce qui donne les quatre cercles $\Sigma, \Sigma_0, \Sigma', \Sigma'_0$, dont nous désignerons les centres par C, C_0, C', C'_0; ces quatre points sont les mêmes que ceux que nous avons considérés précédemment.

On aperçoit immédiatement que les cercles Σ et Σ_0 sont orthogonaux aux cercles Σ' et Σ'_0 : les droites CC', CC'_0, C_0C', $C_0C'_0$ sont donc quatre droites isotropes et les droites CC_0, $C'C'_0$ sont conjuguées par rapport à la sphère.

Prenons pour cercles coordonnés C_1 et C_2 deux cercles orthogonaux passant par les deux points C et C_0, pour cercles C_3 et C_4 deux cercles orthogonaux passant par C′ et C'_0; ce système de quatre cercles sera quadruplement orthogonal, et l'équation du système K_3 deviendra

$$\mathcal{A}_{12}\mathcal{P}_{12}+\mathcal{A}_{34}\mathcal{P}_{34}=0.$$

Nous retrouvons encore la réduction de la forme bilinéaire à la forme canonique.

A l'égard de cette dernière question, faisons en passant quelques remarques.

MM. Jordan et Kronecker ont considéré le problème général suivant :

Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n;\ \beta=1,2,\ldots,n),$$

on propose de le ramener à la forme canonique

$$P=\lambda_1\xi_1\eta_1+\lambda_2\xi_2\eta_2+\ldots+\lambda_n\xi_n\eta_n$$

par des substitutions orthogonales opérées l'une sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, l'autre sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Le résultat de M. Jordan peut être présenté sous une forme qui en rend la démonstration presque intuitive et qui facilite l'étude des cas particuliers; c'est la suivante :

Le problème revient à déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux deux formes quadratiques

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2,$$

les réduisent à des sommes de carrés.

Dans le cas où l'on a, pour toutes les valeurs des indices i et j,

$$a_{ii}=0, \qquad a_{ij}=-a_{ji},$$

le polynôme bilinéaire considéré est de la forme

$$P=\tfrac{1}{2}\Sigma a_{ik}p_{ik},$$

en posant

$$p_{ik}=x_iy_k-x_ky_i.$$

Les formes quadratiques $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ et $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ sont identiques, et la réduction à la forme canonique peut être opérée au moyen d'une *même* substitution orthogonale effectuée sur les x et sur les y.

On peut, de plus, énoncer la proposition suivante :

Le premier membre de l'équation en s relative à la forme bilinéaire $\frac{1}{2}\Sigma a_{ik} p_{ik}$, *considérée comme forme quadratique des* $2n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, *est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en* $-s^2$ *est l'équation en s relative à la forme quadratique* $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ *des n variables* $x_1, \ldots, x_n$.

Considérons le cas où l'on a $n=4$. L'équation en s relative à la forme bilinéaire est alors

$$(s^4 - \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J})^2 = 0,$$

où I et J ont la même signification que précédemment.

L'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ sera

$$(s^2 + \mathrm{I}s + \mathrm{J})^2 = 0.$$

Revenons au système K_3 de doubles points : nous avons étudié jusqu'ici le cas général; supposons maintenant que l'on ait $\mathrm{J}=0$, c'est-à-dire que le complexe linéaire de droites soit spécial.

L'axe du complexe linéaire spécial sera ou ne sera pas une génératrice de la sphère.

Dans la première hypothèse, l'un des points du double point sera situé sur une droite isotrope déterminée.

Plaçons-nous maintenant dans la seconde hypothèse, et appelons *foyers* d'un double point situé sur une sphère les deux points cercles de cette sphère qui passent par le double point.

La condition $\mathrm{J}=0$ exprimera que tous les doubles points du système K_3 peuvent être réunis par un cercle à un double point fixe (a_1, a_2) ou, si l'on veut, que les doubles points sont en involution avec un double point fixe (b_1, b_2); b_1, b_2 sont les foyers de (a_1, a_2), et a_1, a_2 les foyers de (b_1, b_2).

Système K_2.

Les doubles points sont en involution avec deux doubles points fixes, ou encore les doubles points peuvent être réunis par des cercles à deux doubles points fixes.

Les foyers des doubles points du système forment également un système K_2.

Système K_1.

Les doubles points sont distribués sur une courbe; nous avons deux définitions de cette courbe : on peut considérer et d'une infinité de manières le système comme en involution avec trois doubles points fixes; on peut dire aussi : les doubles points peuvent être réunis par des cercles à trois doubles points fixes. La même conclusion a lieu pour les foyers des doubles points.

Si nous considérons maintenant les droites des doubles points, elles appartiennent à trois complexes linéaires et sont réparties sur une quadrique; la courbe est donc une cyclique.

La première définition de la courbe nous donne pour la cyclique une construction par points qui a été signalée par M. Saltel (1).

La génération de la cyclique apparaît comme l'analogue de la génération de l'hyperboloïde à une nappe; d'ailleurs, ce n'est qu'une confirmation de cette remarque de M. Darboux (2):

Puisque les cycliques sphériques sont l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, leurs propriétés pourront se déduire de celles des surfaces du second degré.

Établissons, en effet, cette génération des cycliques en partant de leur définition. Considérons une surface du second degré passant par la courbe; celle-ci est rencontrée par chacune des génératrices de la surface en deux points; soient trois génératrices de même système rencontrant la courbe respectivement en m', n'; m'', n''; m''', n''', et concevons la quadrique comme engendrée par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$. Les extrémités m, n de cette droite, situées sur la cyclique, seront sur un même cercle avec m', n'; de même, avec m'', n'' et m''', n'''; la génération de la cyclique apparaît clairement.

---

(1) Saltel, *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. III.

(2) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 33.

Pour déterminer la quadrique, il suffit de se donner une génératrice mn de cette surface; m et n seront deux points quelconques de la cyclique; le plan passant par le centre de la sphère et par une génératrice mn sera tangent à la quadrique et enveloppera un cône circonscrit à la surface; donc :

Dans un des modes de génération, tous les grands cercles mn sont tangents à une conique sphérique; tous les grands cercles m′n′, ... sont tangents à la même conique sphérique.

Considérons les foyers du double point (m, n); ils sont situés sur un même cercle avec les foyers de (m', n'); le lieu de ces foyers est donc une cyclique; de plus :

Les arcs de grand cercle, tels que celui qui est perpendiculaire à mn en son milieu, enveloppent une conique.

Ces derniers théorèmes sont dus à Laguerre ([1]).

Système K_0.

Les doubles points de ce système sont déterminés par l'intersection de deux cycliques; si l'on exclut les points étrangers à la question, au nombre de douze, il reste quatre points, c'est-à-dire deux doubles points; cette conclusion résulte, d'ailleurs, des formules algébriques.

Remarquons cette conséquence, qui nous sera utile :

Le nombre des doubles points qui peuvent être réunis par des cercles à quatre doubles points est égal à deux.

II. — Les dix coordonnées p_{ik} du cercle.

Soit un système de coordonnées pentasphériques déterminé par cinq sphères orthogonales deux à deux S_1, S_2, S_3, S_4, S_5; en désignant par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les coordonnées d'un point de l'espace, toute sphère est représentée par une équation linéaire

$$\Sigma a_i x_i = 0,$$

([1]) Laguerre, *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, 1872).

et un cercle sera défini comme l'intersection de deux sphères

$$\Sigma a_i x_i = 0, \qquad \Sigma b_i x_i = 0.$$

Posons

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

en sorte qu'on a

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ik} = -p_{ki}.$$

Les quantités p_{ik}, au nombre de dix seulement, si l'on tient compte de ces dernières relations, seront les coordonnées du cercle considéré. Ces quantités vérifient les relations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0,$$

en convenant de la notation suivante employée par M. Kœnigs. Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 *à partir* de l'un d'eux que nous appelons α; nous posons

$$\Omega_\alpha(p) = \Omega_\alpha = p_{\beta\gamma} p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta} p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon} p_{\gamma\delta}.$$

Réciproquement, si des quantités p_{ik} vérifient à la fois les relations $p_{ii} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki}$ et $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = 0$, $\Omega_5 = 0$, ces quantités sont les coordonnées d'un cercle dans l'espace.

Lorsque le cercle sera rapporté à un système de coordonnées cartésiennes, la formation des quantités p_{ik} n'offrira aucune difficulté, en tenant compte des formules qui permettent de passer des coordonnées pentasphériques aux coordonnées cartésiennes; on aura souvent avantage à employer le système bien connu (1) de coordonnées pentasphériques qu'on obtient en considérant les trois faces d'un trièdre trirectangle et deux sphères orthogonales entre elles et ayant pour centre commun le sommet du trièdre. Les formules de transformation sont alors

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z,$$
$$2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

et, si l'on considère un cercle défini par les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma - z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0,$$

(1) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 137.

on aura

$$\begin{array}{ll} p_{12}=\alpha b-\beta a, & p_{13}=a, \\ p_{14}=\alpha-(\alpha c-\gamma a), & p_{15}=i[\alpha+(\alpha c-\gamma a)], \\ p_{23}=b, & p_{24}=\beta-(\beta c-\gamma b), \\ p_{25}=i[\beta+(\beta c-\gamma b)], & p_{34}=c-1, \\ p_{35}=-i(c+1), & p_{45}=-2i\gamma. \end{array}$$

Si l'on envisage le Tableau

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

les quantités p_{ik} sont des combinaisons linéaires des éléments de ce Tableau et des déterminants que l'on peut en déduire.

Les dix quantités p_{ik} doivent satisfaire à trois relations distinctes; les cinq équations

$$\Omega_1=0, \qquad \Omega_2=0, \qquad \Omega_3=0, \qquad \Omega_4=0, \qquad \Omega_5=0$$

ne sont donc pas distinctes.

Étudions ce système d'équations.

Étant données dix quantités quelconques p_{ik} vérifiant les relations $p_{ii}=0$, $p_{ik}=-p_{ki}$, on a les identités qu'on obtient en faisant $i=1, 2, 3, 4, 5$ dans la suivante :

$$p_{i1}\Omega_1+p_{i2}\Omega_2+p_{i3}\Omega_3+p_{i4}\Omega_4+p_{i5}\Omega_5=0.$$

Cela posé, désignons par α_{11}, α_{22}, α_{33}, α_{44}, α_{55} cinq quantités arbitraires et considérons le système d'équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4+p_{15}x_5=0, \\ p_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+p_{23}x_3+p_{24}x_4+p_{25}x_5=0, \\ p_{31}x_1+p_{32}x_2+\alpha_{33}x_3+p_{34}x_4+p_{35}x_5=0, \\ p_{41}x_1+p_{42}x_2+p_{43}x_3+\alpha_{44}x_4+p_{45}x_5=0, \\ p_{51}x_1+p_{52}x_2+p_{53}x_3+p_{54}x_4+\alpha_{55}x_5=0. \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est égal à

$$\begin{array}{l} \Omega_1^2\alpha_{11}+\Omega_2^2\alpha_{22}+\Omega_3^2\alpha_{33}+\Omega_4^2\alpha_{44}+\Omega_5^2\alpha_{55} \\ \qquad +p_{45}^2\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\ldots \\ \qquad +\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}\alpha_{55}. \end{array}$$

Supposons $p_{45} \neq 0$ et établissons entre les p_{ik} les trois relations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0.$$

Envisageons le système d'équations que l'on déduit du système (1) en faisant les hypothèses suivantes :

$$\alpha_{44} = 0, \qquad \alpha_{55} = 0, \qquad \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \neq 0.$$

On a une solution de ce nouveau système en posant

$$x_1 = \Omega_1, \qquad x_2 = \Omega_2, \qquad x_3 = \Omega_3, \qquad x_4 = \Omega_4, \qquad x_5 = \Omega_5.$$

Le déterminant du système étant égal à

$$p_{45}^2 \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$$

n'est pas nul; donc on a nécessairement

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0.$$

Ainsi, si p_{45} n'est pas nul, on a

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0$$

comme conséquences de

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0.$$

Nous pouvons déduire de cette proposition la démonstration du théorème suivant, énoncé par M. Stéphanos (¹).

L'ordre du système d'équations qui relient entre eux les dix déterminants $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ du Tableau

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$$

est égal à cinq.

En effet, nous avons entre les dix quantités p_{ik} les cinq relations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0,$$

qui se réduisent à trois.

(¹) CYPARISSOS STÉPHANOS, *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, p. 578; 1881).

Adjoignons six relations linéaires homogènes

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_6 = 0.$$

Nous pouvons supposer que, pour chacun des systèmes de solutions, on ait $p_{45} \neq 0$. Les p_{ik} seront alors déterminés par les équations

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad \ldots, \quad P_6 = 0.$$

Le nombre des solutions de ce système d'équations est égal à huit. Parmi ces solutions, il en existe trois qui ne conviennent pas à la question; en effet, on a des solutions particulières de ce système données par les équations

$$p_{45} = 0, \quad p_{24}p_{53} + p_{25}p_{34} = 0, \quad p_{34}p_{51} + p_{35}p_{14} = 0, \quad p_{41}p_{25} + p_{42}p_{51} = 0,$$
$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad \ldots, \quad P_6 = 0.$$

Cela résulte de ce que la deuxième, la troisième et la quatrième de ces dernières équations ne sont pas distinctes.

Le nombre de ces solutions particulières est égal à trois; on a donc trois solutions étrangères : ce sont, d'ailleurs, les seules solutions étrangères et le théorème est démontré.

On connaît la propriété du système de coordonnées pentasphériques par rapport à l'inversion : on peut dire que les coordonnées pentasphériques x_i demeurent invariables, pourvu que l'on rapporte la nouvelle figure aux sphères orthogonales qui sont les figures inverses des sphères coordonnées primitives. Il est clair que le système de coordonnées p_{ik} jouira de la même propriété. Les formules permettant de passer des coordonnées d'un cercle aux coordonnées du cercle inverse, ou, plus généralement, les formules de transformation des coordonnées seront linéaires et constitueront une substitution orthogonale. On conçoit donc tout l'avantage qui s'attache à définir les systèmes de cercles par des équations homogènes entre les coordonnées p_{ik}.

Si toutes les équations sont linéaires, on aura des *systèmes linéaires* de cercles que nous pourrons représenter, avec M. Kœnigs, par les symboles Λ_5, Λ_4, Λ_3, Λ_2, Λ_1, Λ_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

La figure inverse d'un système linéaire Λ_i, par rapport à un point quelconque de l'espace, sera un nouveau système linéaire Λ_i.

Du théorème de M. Stéphanos, que nous venons de démontrer, résulte la proposition suivante :

Le système Λ_0 *se compose de cinq cercles :*

C'est le *pentacycle* de M. Stéphanos.

III. — Le rôle du complexe linéaire de droites dans l'étude des systèmes linéaires de cercles.

Système Λ_5.

Nous avons indiqué comment on pouvait, par une même substitution orthogonale effectuée sur les a_i et sur les b_k, ramener à une forme canonique le polynôme bilinéaire

$$\Sigma a_{ik}(a_i b_k - a_k b_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque le nombre n est impair, l'équation en s relative à la forme bilinéaire, considérée comme forme quadratique des variables a_i et b_k, admet la racine $s = 0$; cela résulte de ce que tout déterminant gauche de degré impair est nul. On peut donc déterminer, *a priori,* une substitution orthogonale telle que, pour le nouveau polynôme bilinéaire,

$$\Sigma \mathrm{A}_{ik}(\mathrm{A}_i \mathrm{B}_k - \mathrm{A}_k \mathrm{B}_i),$$

les indices i et k ne prennent que les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

Si nous donnons à n la valeur $n = 5$ pour toute substitution orthogonale telle que l'on ait

$$\mathrm{A}_5 = \sum_1^5 \Omega_i(a) a_i, \qquad \mathrm{B}_5 = \sum_1^5 \Omega_i(a) a_i,$$

la nouvelle forme bilinéaire ne contiendra pas les variables A_5 et B_5; cette propriété de la forme bilinéaire peut s'énoncer géométriquement.

Soit un système Λ_5, défini par l'équation linéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas général et considérons la sphère

$$\sum_1^5 \Omega_i(a) x_i = 0;$$

c'est la *sphère centrale* K de M. Kœnigs.

Rapportons la figure à un nouveau système de coordonnées dans lequel la sphère S_5 sera la sphère centrale. Le système Λ_5 sera défini par une nouvelle équation linéaire

$$\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0,$$

et l'on aura

$$A_{15} = 0, \qquad A_{25} = 0, \qquad A_{35} = 0, \qquad A_{45} = 0.$$

Interprétons géométriquement le fait algébrique de l'évanouissement des coefficients A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_{45}.

Considérons un cercle (p) dont les coordonnées sont p_{12}, p_{13}, $\ldots$, p_{45}, et le double point d'intersection de ce cercle avec l'une des sphères coordonnées, par exemple avec $x_5 = 0$. Si l'on rapporte les points de cette sphère S_5 aux quatre cercles coordonnés C_1, C_2, C_3, C_4, qui sont les cercles d'intersection de S_5 avec les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, les coordonnées du double point considéré sont

$$p_{12},\ p_{13},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{24},\ p_{34}.$$

L'équation $\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0$ ne contient pas P_{15}, P_{25}, P_{35}, P_{45}; c'est donc une relation linéaire et homogène entre les coordonnées du double point d'intersection du cercle (p) avec la sphère K, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant donné le système Λ_5 *le plus général, il existe une sphère* K *et un complexe linéaire de droites* L *qui jouissent de la propriété suivante : la droite du double point d'intersection d'un quelconque des cercles du système avec la sphère* K *engendre un complexe, et ce complexe est* L.

La réciproque est évidemment vraie :

Les cercles qui coupent une sphère fixe K *en un double point dont la droite engendre un complexe linéaire constituent un système* Λ_5 *de cercles.*

Afin d'étudier les cas particuliers qui peuvent se présenter, nous reprendrons la démonstration du théorème précédent en suivant une autre voie.

Déterminons un système de coordonnées pentasphériques en posant

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z, \qquad 2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$
$$2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

Soit une sphère K

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 = 0,$$

et supposons que l'on ait $k_4 - ik_5 \neq 0$, c'est-à-dire que la sphère que nous considérons ne soit pas un plan.

Envisageons un cercle déterminé par les équations

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 &= 0, \end{aligned}$$

et cherchons les équations de la droite qui joint les points d'intersection de ce cercle avec la sphère K; ce sont

$$\begin{aligned} &[(k_4 - ik_5) a_1 - k_1(a_4 - ia_5)] x + [(k_4 - ik_5) a_2 - k_2(a_4 - ia_5)] y \\ &\qquad + [(k_4 - ik_5) a_3 - k_3(a_4 - ia_5)] z + i(k_5 a_4 - k_4 a_5) = 0, \\ &[(k_4 - ik_5) b_1 - k_1(b_4 - ib_5)] x + \ldots + i(k_5 b_4 - k_4 b_5) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$, les coordonnées pluckériennes ϖ_{ik} de cette droite sont données par les formules

$$\begin{aligned} \xi\varpi_{12} &= (k_4 - ik_5) p_{12} - k_1(p_{42} - ip_{52}) - k_2(p_{14} - ip_{15}), \\ \xi\varpi_{13} &= (k_4 - ik_5) p_{13} - k_1(p_{43} - ip_{53}) - k_3(p_{14} - ip_{15}), \\ \xi\varpi_{23} &= (k_4 - ik_5) p_{23} - k_2(p_{43} - ip_{53}) - k_3(p_{24} - ip_{25}); \\ \xi\varpi_{14} &= i(k_5 p_{14} - k_4 p_{15} + k_1 p_{45}), \\ \xi\varpi_{24} &= i(k_5 p_{24} - k_4 p_{25} + k_2 p_{45}), \\ \xi\varpi_{34} &= i(k_5 p_{34} - k_4 p_{35} + k_3 p_{45}). \end{aligned}$$

Exprimons que cette droite fait partie du complexe linéaire représenté par l'équation

$$\Sigma \alpha_{ik} \varpi_{ik} = 0;$$

on trouve que le cercle qui détermine cette droite fait partie du système Λ_5, défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$

où l'on pose

$$\begin{aligned} \lambda a_{12} &= \alpha_{12}(k_4 - ik_5), & \lambda a_{24} &= -\alpha_{23} k_3 + i\alpha_{24} k_5 + \alpha_{12} k_1, \\ \lambda a_{13} &= \alpha_{13}(k_4 - ik_5), & \lambda a_{25} &= i\alpha_{23} k_3 - i\alpha_{24} k_4 - i\alpha_{12} k_1, \\ \lambda a_{14} &= -\alpha_{12} k_2 - \alpha_{13} k_3 + i\alpha_{14} k_5, & \lambda a_{34} &= \alpha_{13} k_1 + \alpha_{23} k_2 + i\alpha_{34} k_5, \\ \lambda a_{15} &= i\alpha_{12} k_2 + i\alpha_{13} k_3 - i\alpha_{14} k_4, & \lambda a_{35} &= -i\alpha_{34} k_4 - i\alpha_{13} k_1 - i\alpha_{23} k_2, \\ \lambda a_{23} &= \alpha_{23}(k_4 - ik_5), & \lambda a_{45} &= i\alpha_{14} k_1 + i\alpha_{24} k_2 + i\alpha_{34} k_3. \end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire, puisque $k_4 - ik_5$ n'est pas nul,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + a_{14}k_4 + a_{15}k_5 = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{23}k_3 + a_{24}k_4 + a_{25}k_5 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{34}k_4 + a_{35}k_5 = 0, \\ a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3 + a_{45}k_5 = 0, \\ a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4 = 0; \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu\alpha_{12} = a_{12}, \\ \mu\alpha_{13} = a_{13}, \\ \mu\alpha_{23} = a_{23}; \\ \mu\alpha_{14} = -(a_{14} - ia_{15}), \\ \mu\alpha_{24} = -(a_{24} - ia_{25}), \\ \mu\alpha_{34} = -(a_{34} - ia_{35}). \end{array}\right.$$

Ceci posé, soit inversement un système Λ_5 de cercles défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik}p_{ik} = 0.$$

Distinguons deux cas suivant que l'un des $\Omega_i(a)$ n'est pas nul, ou suivant que tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls.

I. — *Un des $\Omega_i(a)$ n'est pas nul.*

Les équations (1) donnent une solution et une seule pour les quantités proportionnelles à $k_1, k_2, \ldots, k_5$,

$$k_1 = \nu\Omega_1, \qquad k_2 = \nu\Omega_2, \quad \ldots, \quad k_5 = \nu\Omega_5.$$

Supposons d'abord que l'on ait $\Omega_4 - i\Omega_5 \neq 0$; il existe une sphère K et un complexe linéaire de droites qui déterminent le système Λ_5 de cercles. L'invariant du complexe est $\frac{1}{i}(\Omega_4 - i\Omega_5)$; le complexe n'est donc jamais spécial.

Supposons maintenant que l'on ait $\Omega_4 - i\Omega_5 = 0$; les équations (1) donnent encore

$$k_1 = \nu\Omega_1, \qquad k_2 = \nu\Omega_2, \quad \ldots, \quad k_5 = \nu\Omega_5,$$

mais on a $k_4 - ik_5 = 0$ et l'équation $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_5x_5 = 0$ représente un plan; dans ce cas, la sphère centrale est un plan; ou bien ce plan est quelconque, ou bien c'est le plan de l'infini.

Si le plan est quelconque, il résulte de ce qui précède que les doubles points d'intersection des cercles avec ce plan forment un système linéaire K_3 de doubles points dans ce plan. Le complexe défini par les équations (2) est singulier et son axe est dans le plan.

Si le plan est le plan de l'infini, les axes des cercles forment un complexe linéaire de droites ; cela résultera d'un calcul que nous ferons plus loin.

Ces deux cas singuliers, qui correspondent à l'hypothèse $\Omega_4 - i\Omega_5 = 0$, peuvent être présentés de la façon suivante :

Prenons la figure inverse du système Λ_5 général, le pôle d'inversion étant un point de la sphère centrale ; le nouveau système est encore un système Λ_5 et la sphère centrale correspondante se réduit au plan qui est la figure inverse de la sphère centrale primitive.

Considérons maintenant un système Λ_5 pour lequel on a $\Sigma\Omega_i^2 = 0$, c'est-à-dire pour lequel la sphère centrale est de rayon nul ; si l'on prend la figure inverse de ce système, le pôle d'inversion étant le centre de la sphère centrale, on obtient le système pour lequel les axes des cercles forment un complexe linéaire.

II. — *Tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls.*

Les équations (1) donnent alors pour $k_1, k_2, \ldots, k_5$ un système triplement indéterminé de solutions ; il existera une infinité de sphères K pouvant servir à définir Λ_5, et ces sphères seront associées à un même complexe linéaire *spécial,* si l'une des quantités α_{ik}, qui sont déterminées par les formules (2), n'est pas nulle ; nous avons donc deux cas à distinguer :

1° *Un des α_{ik} n'est pas nul.*

Ou bien les cercles Λ_5 pourront être réunis à deux points fixes par des sphères, ou bien ils rencontreront une droite isotrope déterminée.

Ce résultat peut être établi directement ; M. Kœnigs a montré que, si deux cercles (p) et (p') sont en involution, on a

$$\Sigma p_{ij} p'_{ij} = 0.$$

Lorsque tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls, les coefficients a_{ik} sont les coordonnées d'un cercle.

Si ce cercle n'est pas une droite isotrope, tous les cercles du système Λ_5 sont en involution avec un cercle fixe ; F et F' étant les foyers de ce cercle fixe, chacun des cercles du système Λ_5 peut être relié par une sphère aux deux points fixes F et F'.

Si les quantités a_{ik} définissent une droite isotrope, les cercles du système Λ_5 rencontrent cette droite isotrope.

2° *Tous les* α_{ik} *sont nuls.*

Le système considéré contient toutes les droites de l'espace ; les plans de ces cercles passent tous par un point fixe.

La théorie des complexes linéaires de droites permet de déduire du théorème que nous avons établi diverses conséquences.

Remarquons tout d'abord la conclusion suivante :

Les cercles d'un système Λ_5 *qui sont des droites forment un complexe linéaire de droites.*

Cette proposition pourra être utilisée lorsqu'on considérera les cercles d'un système linéaire qui passent par un point fixe de l'espace ; car, si l'on effectue une inversion, en prenant le point pour pôle, les cercles considérés se transformeront dans les droites du système linéaire qui est l'inverse du système primitif.

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

Les cercles de Λ_5 *qui passent par deux points sont situés sur une sphère.*

Comme conséquence de la théorie des complexes linéaires, nous avons encore le théorème de M. Kœnigs, que nous énoncerons sous la forme suivante :

Les plans de tous les cercles du système Λ_5, *qui coupent en deux points un cercle* X *de la sphère centrale, passent par un même point* O *du plan de ce cercle* X.

Le point O est le foyer du plan du cercle X par rapport au complexe linéaire ; c'est le centre de la sphère que M. Kœnigs appelle *sphère conjuguée* des sphères passant par le cercle X.

Si le cercle X varie en passant par deux points fixes a, b, le point O qui lui correspond décrit une droite, conjuguée de ab par rapport au complexe linéaire.

Si le cercle X varie en passant par un point fixe a, le point O qui lui correspond décrit un plan qui a pour foyer le point a.

Considérons les sphères passant par un cercle quelconque C de l'espace ;

à chacune d'elles correspond un point O, centre de la sphère conjuguée. Le cercle C coupe la sphère centrale K en deux points a, b. Le lieu du point O est la droite conjuguée de ab par rapport au complexe linéaire. A chacune des sphères considérées correspond homographiquement un point O ; le rapport anharmonique de quatre des sphères est égal au rapport anharmonique des quatre points O correspondants. La droite, lieu du point O, coupe le plan du cercle en un point qui correspond à ce plan.

Il n'y a aucune difficulté à étudier la position du complexe linéaire par rapport à la sphère centrale ; ils auront, en général, quatre droites communes ; les cas particuliers sont manifestes ; ils correspondent à certaines relations entre les invariants I et J que M. Kœnigs a découverts dans la recherche des sphères qui coïncident avec leurs conjuguées. Ces invariants s'introduisent également dans le problème, identique au fond au précédent, de la réduction de la forme bilinéaire $\Sigma a_{ik}(a_i b_k - a_k b_i)$ à la forme canonique, au moyen d'une même substitution orthogonale effectuée sur les variables a_i et b_k. L'équation en s relative à cette forme bilinéaire, considérée comme forme quadratique des a_i et des b_k, est

$$s^2(s^4 - \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J})^2 = 0$$

en posant

$$\mathrm{I} = \xi(a),$$

$$\mathrm{J} = \sum_i [\omega_i(a)]^2.$$

$\xi(a)$ est la forme adjointe de la forme $\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2$ et $\omega_1(a)$, $\omega_2(a)$, $\omega_3(a)$, $\omega_4(a)$, $\omega_5(a)$ sont les formes adjointes de $\Omega_1(p)$, $\Omega_2(p)$, …, $\Omega_5(p)$.

La condition $\mathrm{J} = 0$ exprime, en général, que la sphère centrale est de rayon nul ; si de nouvelles relations sont adjointes, elle peut exprimer que la sphère centrale est le plan de l'infini.

Cherchons une interprétation de la condition $\mathrm{I} = 0$; I étant un invariant, nous prendrons pour sphère S_5 la sphère centrale K ; l'équation du système Λ_5 est

$$\Sigma \mathrm{A}_{ik}\mathrm{P}_{ik} = 0$$

et l'on a

$$\mathrm{A}_{15} = \mathrm{A}_{25} = \mathrm{A}_{35} = \mathrm{A}_{45} = 0.$$

L'équation

$$\Sigma \mathrm{A}_{ik}\varpi_{ik} = \mathrm{A}_{12}p_{12} + \mathrm{A}_{13}p_{13} + \mathrm{A}_{14}p_{14} + \mathrm{A}_{23}p_{23} + \mathrm{A}_{42}p_{42} + \mathrm{A}_{34}p_{34} = 0,$$

où les ϖ_{ik} sont les coordonnées pluckériennes d'une droite, est celle du complexe linéaire L associé à la sphère k.

La sphère centrale ayant pour équation $x^2+y^2+z^2+1=0$, le complexe polaire réciproque de L, par rapport à cette sphère, a pour équation

$$A_{34}p_{12}+A_{42}p_{13}+A_{23}p_{14}+A_{14}p_{23}+A_{13}p_{42}+A_{12}p_{34}=0.$$

Écrivons que les deux complexes linéaires sont en involution ; il vient

$$\Sigma A_{ik}^2=0,$$

et l'on a cette conclusion :

La condition I $=0$ *exprime que le complexe linéaire* L *et son polaire réciproque par rapport à la sphère centrale* K *sont en involution.*

Arrivons à la recherche des cercles singuliers et de la surface de singularités du système Λ_5.

D'une façon générale, si l'on prend pour les six coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_6$ du cercle les coefficients α, β, γ, a, b, c dans les équations

$$\alpha x+\beta y+\gamma-z=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0,$$

les cercles singuliers et la surface de singularités d'un système quintuplement indéterminé, défini par l'équation

$$\theta(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c)=0,$$

seront déterminés par l'adjonction du système d'équations

$$\frac{\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}}{x}=\frac{\frac{\partial\theta}{\partial\beta}}{y}=\frac{\partial\theta}{\partial\gamma},$$
$$\frac{\frac{\partial\theta}{\partial a}}{x}=\frac{\frac{\partial\theta}{\partial b}}{y}=\frac{\partial\theta}{\partial c}.$$

Cela résulte d'un calcul fait dans la recherche du système adjoint de première espèce.

Si l'on se place dans le cas du système Λ_5 général et si l'on prend son équation sous la forme canonique, le système de coordonnées pentasphériques étant déterminé en posant

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z,$$
$$2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

on arrive immédiatement aux conclusions suivantes :

La surface de singularités d'un système Λ_3 est la sphère centrale.

Les cercles singuliers sont les cercles de la sphère centrale dont les plans ont pour pôle, par rapport au complexe linéaire L, *un point de la sphère centrale.*

Ou encore, si l'on considère la quadrique Σ polaire réciproque de la sphère K par rapport au complexe linéaire L :

Les cercles singuliers sont les cercles de la sphère centrale qui sont déterminés par les plans tangents à la quadrique Σ.

Signalons une interprétation géométrique de la forme quadratique

$$\sum \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y_i}\right)^2,$$

que l'on déduit de la forme bilinéaire $\mathrm{P} = \frac{1}{2}\Sigma a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$.

Les sphères qui passent par les cercles singuliers forment un complexe, et ce complexe est défini par l'équation

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} l_k\right)^2 = 0,$$

en prenant pour équation d'une sphère

$$\sum_1^5 l_i x_i = 0.$$

Si l'on considère un système Λ_3 satisfaisant aux conditions renfermées dans l'énoncé du théorème de M. Kœnigs, c'est-à-dire pour lequel les équations du système adjoint de première espèce sont vérifiées, on a la conclusion suivante :

Tous les cercles de ce système rencontrent une droite isotrope.

Système Λ_4.

Soit un système Λ_4, défini par deux équations linéaires

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$
$$P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0.$$

Les cercles situés sur une sphère passent tous par deux points A *et* B *de cette sphère.*

En effet, en vertu de $P_1 = 0$, les plans des cercles de Λ_4, situés sur la sphère S, passent par un même point O_1. En vertu de $P_2 = 0$, ils passent par un même point O_2; donc les cercles passent par les deux points d'intersection A et B de S avec la droite $O_1 O_2$.

Les cercles de Λ_4 *qui sont des droites forment une congruence linéaire de droites.*

Il en résulte que :

Tous les cercles de Λ_4 qui passent par un point P de l'espace rencontrent, chacun en un second point, deux cercles passant par le point P.

Il n'y a qu'un cercle de Λ_4 passant par deux points quelconques.

Soit un cercle quelconque C; établissons la proposition suivante :

Tous les cercles de Λ_4 *qui rencontrent* C *en deux points rencontrent également en deux points une cyclique qui passe par deux points de* C.

En effet, considérons une sphère quelconque S passant par le cercle C. A cette sphère correspondent, dans les deux systèmes $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$, deux sphères conjuguées. Soient O_1 et O_2 leurs centres. Si l'on fait varier la sphère S, O_1 et O_2 décrivent deux droites D_1 et D_2 et tracent sur ces deux droites des divisions homographiques; les droites O_1, O_2 sont donc les génératrices d'une même système d'une quadrique Σ. Il existe une des génératrices $\alpha\beta$ de ce système, qui est située dans le plan du cercle C.

Tous les cercles du système Λ_4 appartiennent au système Λ_5, défini par l'équation

$$P_1 + \lambda P_2 = 0,$$

où λ peut prendre une valeur quelconque. Le lieu des centres des sphères conjuguées des différentes sphères passant par C est une génératrice de la quadrique Σ de même système que D_1 et D_2. On peut déterminer une valeur de λ, telle que l'équation $P_1 + \lambda P_2 = 0$ soit vérifiée par les coordonnées du cercle C. A cette valeur de λ correspond la seconde génératrice de la quadrique Σ, située dans le plan du cercle C, et qui rencontre ce cercle en a_1 et a_2.

A chaque sphère S correspond homographiquement une droite $O_1 O_2$. Soient ω_1, ω_2 les points d'intersection de S et de $O_1 O_2$. Si l'on remarque qu'au plan du cercle correspond la droite $\alpha\beta$, on a immédiatement cette conclusion : le lieu des points ω_1, ω_2 est une cyclique qui passe par les points a_1, a_2, et le théorème est démontré.

De ce qui précède résulte également que :

L'enveloppe des plans des cercles de Λ_4 qui rencontrent C en deux points est la quadrique déterminée par la cyclique et la droite $a_1 a_2$.

Si l'on suppose que le cercle C varie en passant par deux points fixes, le lieu des cycliques que l'on associe à chaque cercle sera la surface de singularités du complexe de cercles défini par les équations $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, et par la condition que les cercles soient réunis par des sphères à deux points fixes.

Ce qui précède ne s'applique pas lorsque C est un cercle de Λ_4. Dans ce cas, toutes les droites, telles que D_1, D_2, sont situées dans le plan de ce cercle ; O_1 et O_2 tracent sur D_1 et D_2 des divisions homographiques et la droite $O_1 O_2$ enveloppe une conique tangente à toutes les droites, telles que D_1 et D_2.

Le système Λ_4 étant déterminé par l'intersection de deux systèmes Λ_5, considérons un système Λ_5 du faisceau

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = 0.$$

La sphère centrale correspondante a pour équation

$$(k) \qquad \sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b) x_i = 0.$$

Lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ varie, elle enveloppe la surface de singularités de Λ_4. L'équation de cette dernière s'obtient donc en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique des deux variables α et β, constituée par le premier membre de l'équation (k); il vient ainsi

$$[\Sigma\Omega_i(a, b)x_i]^2 - 4\left[\sum_1^5 \Omega_i(a)x_i\right]\left[\sum_1^5 \Omega_i(b)x_i\right] = 0,$$

en posant

$$\Omega_i(a, b) = \Omega_i(b, a) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\rho} \frac{\partial\Omega_i(a)}{\partial a_{\omega\rho}} b_{\omega\rho}.$$

C'est une cyclide à deux points doubles.

A chacune des sphères centrales correspond un complexe linéaire de droites. Il résulte des formules que nous avons établies que ces complexes forment un faisceau; cela résulte aussi, d'ailleurs, de cette considération que, si l'on envisage les cercles de Λ_4 qui sont des droites, ce sont des droites de la congruence linéaire commune à deux quelconques des complexes linéaires et réciproquement.

Il existe deux valeurs de λ pour lesquelles le complexe linéaire de droites est spécial; les systèmes Λ_5 de cercles qui leur correspondent sont des systèmes pour lesquels la sphère centrale est un plan; donc :

Tout système Λ_4 peut être défini comme l'ensemble des cercles qui rencontrent deux plans suivant des doubles points engendrant respectivement dans chacun des plans des systèmes linéaires K_3 de doubles points.

Les plans passent respectivement par les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires.

Système Λ_3.

Le complexe linéaire de cercles est défini par trois équations linéaires :

$$P_1 = \Sigma a_{ik}p_{ik} = 0, \qquad P_2 = \Sigma b_{ik}p_{ik} = 0, \qquad P_3 = \Sigma c_{ik}p_{ik} = 0.$$

Il n'y a qu'un cercle de Λ_3 sur une sphère quelconque de l'espace.

Les cercles du système Λ_3 qui sont des droites forment un système de génératrices d'une quadrique.

On en déduit la proposition suivante :

Les cercles du système Λ_3 qui passent par un point P *sont répartis sur une cyclide ayant pour point double le point* P.

Lorsque le point P varie, la cyclide correspondante, qui dépend de trois paramètres, a néanmoins une enveloppe qui est la surface de singularités du système Λ_3.

En considérant cette surface de singularités comme l'enveloppe des sphères centrales des systèmes Λ_5 du réseau

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0,$$

on obtient immédiatement son équation : il suffit d'annuler le discriminant de la forme quadratique $\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c) x_i$ des trois variables α, β, γ, et il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma\Omega_i(a)x_i & \Sigma\Omega_i(a,b)x_i & \Sigma\Omega_i(a,c)x_i \\ \Sigma\Omega_i(b,a)x_i & 2\Sigma\Omega_i(b)x_i & \Sigma\Omega_i(b,c)x_i \\ \Sigma\Omega_i(c,a)x_i & \Sigma\Omega_i(c,b)x_i & 2\Sigma\Omega_i(c)x_i \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une surface du sixième degré, admettant le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple.

A chacune des sphères centrales du réseau correspond un complexe linéaire de droites; ces complexes linéaires forment une famille à trois termes et ont en commun les droites qui appartiennent au système Λ_3.

Système Λ_4.

La congruence linéaire de cercles est définie par les équations linéaires

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_3 = \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_4 = \Sigma d_{ik} p_{ik} = 0.$$

M. Stephanos a énoncé le théorème suivant :

Il y a dans l'espace cinq couples de points pouvant être réunis par des sphères à chacun des cercles C d'une congruence linéaire. Ces cinq couples de points sont les foyers de cinq cercles formant un pentacycle.

M. Kœnigs en a donné la démonstration qui suit :

Tout cercle de la congruence vérifie l'équation

$$\Sigma A_{ik} p_{ik} = 0,$$

en posant

$$A_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho d_{ik}$$

Les quantités A_{ik} sont assujetties simplement à six équations linéaires, par le fait de l'indétermination de λ, μ, ν, ρ. Si l'on veut que les A_{ik} soient les coordonnées d'un cercle, le problème sera déterminé, et l'on aura cinq solutions correspondant à cinq cercles formant un pentacycle; donc :

Les cercles d'une congruence linéaire sont en involution avec cinq cercles formant un pentacycle.

C'est un nouvel énoncé du théorème précédent.

Réciproquement, les cercles en involution avec quatre cercles forment une congruence linéaire et sont en involution avec un cinquième qui forme avec les premiers un pentacycle.

Sur une sphère quelconque de l'espace, il n'y a pas de cercle de la congruence. Les sphères qui passent par les cercles de la congruence forment ainsi un complexe U de sphères; cherchons l'équation qui détermine ce complexe.

Exprimons que le cercle d'intersection des deux sphères

$$\Sigma l_i x_i = 0, \qquad \Sigma \lambda_i x_i = 0$$

fait partie de la congruence.

Posons

$$l_i^1 = \sum_k a_{ik} l_k, \qquad l_i^2 = \sum_k b_{ik} l_k, \qquad l_i^3 = \sum_k c_{ik} l_{ik}, \qquad l_i^4 = \sum_k d_{ik} l_{ik},$$

il vient

$$\Sigma l_i^1 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^2 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^3 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^4 \lambda_i = 0.$$

Considérons dans ces dernières équations les λ_i comme des inconnues; elles admettent, en général, la solution unique

$$\lambda_i = l_i.$$

Pour qu'il y ait un cercle de la congruence sur la sphère $\Sigma l_i x_i = 0$, il faut donc que ce système d'équations soit indéterminé, c'est-à-dire qu'on puisse déterminer λ, μ, ν, ρ, tels que l'on ait

$$\lambda l_i^1 + \mu l_i^2 + \nu l_i^3 + \rho l_i^4 = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i.

Ceci exprime que la sphère $\Sigma l_i x_i = 0$ est la sphère centrale du système linéaire défini par l'équation

$$\Sigma(\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho d_{ik}) p_{ik} = 0.$$

Réciproquement, sur la sphère centrale d'un tel système, il y aura un cercle faisant partie de la congruence linéaire.

L'équation d'une sphère du complexe U est donc

$$\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) x_i = 0.$$

Il n'y a que deux sphères de ce complexe U *qui passent par un cercle arbitraire* C *de l'espace.*

En effet, soient O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des sphères conjuguées d'une sphère passant par le cercle C dans les quatre systèmes Λ_5 :

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad P_4 = 0.$$

Lorsque la sphère varie, les points O_1, O_2, O_3, O_4 décrivent quatre droites et tracent sur ces droites des divisions homographiques. Ces quatre points sont dans un même plan pour deux positions du point O_1 et, par suite, pour deux sphères.

On déduit de cette proposition la suivante :

Les plans des cercles de la congruence linéaire enveloppent une quadrique.

En effet, le nombre des plans passant par une droite est le même que celui des cercles qui rencontrent cette droite en deux points. Ce dernier nombre est égal à deux, comme on le voit en transformant par inversion.

Considérons les sphères de rayon nul du complexe U. Leurs centres sont les foyers des cercles de la congruence; le lieu de ces centres est la surface S_6 de M. Stephanos. On a pour les coordonnées x_i du centre d'une des sphères de rayon nul l'expression suivante

$$x_i = \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d);$$

les paramètres α, β, γ, δ sont liés par la relation

$$\Sigma[\Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d)]^2 = 0.$$

On a vu que les cercles de la congruence linéaire sont en involution avec cinq cercles formant un pentacycle. La surface S_6 pourra donc être définie comme le lieu des couples de points qui peuvent être réunis par des sphères à quatre des cercles de ce pentacycle. Il apparaît immédiatement que cette surface S_6 est du sixième degré et admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple.

La surface S_6 est définie par quatre quelconques des cinq cercles :

$$01 \qquad 02 \qquad 03 \qquad 04 \qquad 05$$

du pentacycle associé à la congruence linéaire.

Considérons quatre de ces cercles, par exemple 01, 02, 03, 04, et déterminons les quatre cercles 15, 25, 35, 45, dont chacun $i5$ rencontre, en deux points, trois oj, ok, ol des cercles donnés. Nous pourrons ainsi former le tableau :

01	02	03	04	05
21	12	13	14	15
31	32	23	24	25
41	42	43	34	35
51	52	53	54	45

qui comprend quinze cercles, en remarquant que ij est identique à ji.

Il est clair que ces quinze cercles sont situés sur la surface S_6.

La configuration (C) des quinze cercles de l'espace dont nous venons d'indiquer un mode de formation jouit de propriétés remarquables, énoncées par M. Stéphanos, et que nous allons établir :

Deux de ces cercles sont situés sur une même sphère toutes les fois que leurs symboles n'ont pas d'indice commun. Ainsi ils sont situés, trois à trois, sur quinze sphères.

Ces quinze cercles peuvent être groupés en six pentacycles 0, 1, 2, 3, 4, 5. *Les cercles appartenant à un même pentacycle ont des symboles ayant un indice commun.*

On peut former avec les cercles de la configuration (C) *vingt triples ijk renfermant trois cercles jk, ki, ij. Ces vingt triples se rangent à leur tour en dix couples (ijk, lmn). Les cercles de deux triples associés (ijk, lmn) sont orthogonaux à une même sphère* T. *Les plans des quinze* *cercles se coupent donc par groupes de six suivant les centres des dix sphères* T.

Faisons d'abord quelques remarques :

M. Darboux a montré qu'en général il existe un cercle (K) et un seul qui rencontre trois cercles (A), (B), (C) de l'espace, chacun en deux points [1]. Appelons *centre radical de deux cercles* le centre radical de toutes les sphères passant par ces deux cercles. Le plan du cercle (K) est le plan des centres radicaux des trois cercles (A), (B), (C) pris deux à deux. Le problème est indéterminé dans le cas où deux de ces centres radicaux, et par suite les trois, sont confondus, et inversement, si le problème admet plusieurs solutions, les centres radicaux des trois cercles (A), (B), (C), pris deux à deux, sont confondus; les trois cercles (A), (B), (C) sont alors orthogonaux à une même sphère. Il est manifeste que les cercles (K) engendrent une surface qui n'est autre qu'une cyclide, et qu'inversement toute cyclide peut être engendrée par le mouvement d'un cercle rencontrant, chacun en deux points, trois cercles orthogonaux à une même sphère. Nous retrouvons la génération des cyclides due à M. Casey [2].

Revenons à la configuration (C); la sphère qui passe par les deux cercles 05 et 12 coupe la surface S_6 suivant un cercle C; de la définition de S_6 résulte qu'on peut trouver sur ce cercle C une infinité de couples de deux points pouvant être réunis par des sphères à 01, 02, 03, 04; je dis qu'il en résulte que C n'est autre que le cercle 34.

En effet, C doit rencontrer en deux points deux des cercles 01, 02, 03, 04, et admettre avec les autres le même centre radical; car, s'il n'en était pas ainsi, on en conclurait que trois de ces quatre cercles ont même centre radical; démontrons que C doit rencontrer en deux points 01 et 02.

Car, s'il rencontrait en deux points 03 et 04, rencontrant 05 en deux points, ce serait 12.

Si C rencontrait 01, 03 en deux points, rencontrant également 05 en deux points, ce serait 24; cette conclusion est également inadmissible; car 12 rencontre en deux points 03, 05 et 04; le cercle 24 rencontre en deux

(1) DARBOUX, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XCII, p. 446-448).

(2) CASEY, *On cyclides and sphero-quartics* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* t. CLXI, p. 585-721).

points o3, o5 et o1 ; par suite, 12 et 24 devant se rencontrer, on en conclurait que o3 et o5 seraient sur la même sphère.

Donc C rencontre en deux points o1, o2, o5, et admet même centre radical avec o3, o4 ; C est identique à 34.

Ainsi les trois cercles o5, 12, 34 sont sur une même sphère, et les trois cercles o3, o4, 34 ont même centre radical.

Deux cercles sont, par conséquent, sur une même sphère si leurs symboles n'ont pas d'indice commun.

Si l'on considère trois cercles ij, jk, ki, il y a plusieurs cercles rencontrant ces trois cercles en deux points ; il y en a donc une infinité, et ces trois cercles ont même centre radical.

Remarquons que 12 rencontre en deux points les trois cercles		o4, o5, o3
23	»	o4, o5, o1
31	»	o4, o5, o2

On en conclut que les six cercles o4, o5, 45, 12, 23, 31 ont même centre radical ; c'est le centre d'une sphère T.

Des résultats précédents résulte la construction donnée par M. Stéphanos du cinquième cercle o5 d'un pentacycle déterminé par quatre cercles o1, o2, o3, o4 de l'espace.

On construit d'abord les quatre cercles 15, 25, 35, 45, dont chacun ($i5$) rencontre en deux points trois (oj, ok, ol) des cercles donnés. Les sphères oi, $j5$ qui joignent les cercles oi aux cercles $j5$ sont au nombre de douze et se rangent en six couples :

o1, 25	o1, 35	o1, 45	o2, 35	o2, 45	o3, 45
o2, 15	o3, 15	o4, 15	o3, 25	o3, 25	o4, 35

Elles donnent ainsi six nouveaux cercles :

34 24 23 14 13 12

intersections des sphères des couples respectifs.

Ces nouveaux cercles sont situés, par couples de deux, sur trois sphères : 12.34, 13.24, 14.23.

Ces trois dernières sphères se coupent suivant un même cercle qui coïncide avec le cercle o5 cherché.

Revenons à la surface S_6 ; on l'a définie en partant d'un système de quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 ; considérons la section de S_6 par une sphère S passant par un de ces quatre cercles, C_1 par exemple; elle se compose de ce cercle C_1 et d'une cyclique; d'ailleurs, si un foyer f d'un cercle de la congruence est sur la sphère S, l'autre foyer f' est aussi sur S; les traces des cercles C_2, C_3, C_4 sur la sphère S constituent trois doubles points qui peuvent être réunis au double point (ff') par des cercles; nous retrouvons donc la génération de la cyclique que nous avons établie directement.

La considération de cette surface S_6 conduit également à une génération par points de la cyclide.

Supposons que, parmi les quatre cercles qui définissent la surface, deux se rencontrent en deux points; la sphère qui contient ces deux cercles fait partie de la surface, et l'on a cette génération de la cyclide :

Soient C_1, C_2 deux cercles arbitraires dans l'espace; si par deux points, P, Q, on mène un cercle arbitraire C, et que l'on considère les deux sphères passant respectivement par les cercles C_1, C_2, et coupant le cercle C aux deux mêmes points, M et N, ces deux derniers décrivent une cyclide contenant les cercles C_1, C_2, et passant par les points P et Q.

Cette génération de la cyclide a été indiquée par M. Saltel [1].

La réciproque est vraie, et l'on peut trouver une infinité de systèmes servant à la génération.

Arrivons à la surface focale de la congruence linéaire de cercles. Rappelons d'abord la voie suivie par M. Stéphanos pour déterminer cette surface :

On a défini la surface S_6 comme le lieu des couples de foyers des cercles de la congruence.

Une sphère arbitraire de l'espace ne contient que deux pareils couples de foyers.

En effet, ces couples de points sont définis par la condition de pouvoir être réunis par des sphères à quatre cercles. Si l'on considère les traces (a_1, b_1), (a_2, b_2),... des quatre cercles sur la sphère, les doubles points cherchés pourront être reliés aux quatre doubles points (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... par des cercles; il existe donc deux pareils doubles points, ainsi que nous l'avons démontré précédemment.

A l'égard de ces couples de foyers, M. Stéphanos énonce les propositions suivantes :

Considérons les sphères v, telles que les deux couples de foyers situés sur

---

(1) SALTEL, *Sur les cyclides* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. III).

ces sphères coïncident; elles forment un complexe V; par chaque cercle de l'espace passent quatre sphères de ce complexe V; la surface Σ_8, lieu des centres des sphères de rayon nul contenues dans le complexe V est du huitième ordre; elle est touchée par chacune des dix sphères T tout le long d'une biquadratique; elle a le cercle imaginaire à l'infini pour ligne quadruple et admet pour points doubles les foyers des quinze cercles de la configuration (C).

La surface Σ_8 est manifestement la surface focale de la congruence linéaire de cercles.

Les théorèmes généraux que nous avons établis à l'égard des surfaces de singularités permettent d'écrire immédiatement l'équation de cette surface focale ; il suffit d'égaler à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) x_i$$

des quatre variables α, β, γ, δ et l'on obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma\Omega_i(a)x_i & \Sigma\Omega_i(a,b)x_i & \Sigma\Omega_i(a,c)x_i & \Sigma\Omega_i(a,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(b,a)x_i & 2\Sigma\Omega_i(b)x_i, & \Sigma\Omega_i(b,c)x_i & \Sigma\Omega_i(b,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(c,a)x_i & \Sigma\Omega_i(c,b)x_i & 2\Sigma\Omega_i(c)x_i & \Sigma\Omega_i(c,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(d,a)x_i & \Sigma\Omega_i(d,b)x_i & \Sigma\Omega_t(d,c)x_i & 2\Sigma\Omega_i(x_i) \end{vmatrix} = 0.$$

Système Λ_1.

Les cercles de Λ_1 sont répartis sur une surface cerclée.

En général, cette surface est une surface du dixième degré, admettant le cercle imaginaire de l'infini comme ligne quintuple.

Plaçons-nous dans le cas le plus général. La surface est engendrée par un cercle dont le mouvement est défini en disant que ce cercle peut être relié par des sphères à cinq couples de points a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; ...; a_5, b_5. Si l'on considère la surface inverse de la surface considérée en prenant pour pôle d'inversion un point quelconque de l'espace, la nouvelle surface est du même degré que la première, car elle est définie d'une façon identique.

Le degré de la surface est donc un nombre pair $2n$ et elle admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne d'ordre de multiplicité égal à n.

Remarquons que le lieu des foyers des cercles de Λ_1 est une courbe du dixième degré, intersection de deux surfaces S_6 de M. Stephanos qui ont déjà en commun trois cercles et le cercle rencontrant ces trois cercles; d'autre part, les cercles du système A_1 sont en involution avec une infinité de cercles constituant eux-mêmes un système A_1; en sorte qu'il existe une infinité de couples de points, tels que a_1, b_1; a_2, b_2; ..., pouvant servir à la génération; tous ces points sont sur une courbe du dixième degré : nous verrons que cette courbe est une ligne double de la surface.

Ceci posé, nous établirons par des considérations géométriques que la surface est du dixième degré de la manière suivante :

Considérons la figure inverse en prenant pour pôle d'inversion le point b_1; on obtient une nouvelle surface cerclée définie de la façon suivante :

Les plans des cercles passent par un point fixe A_1, et les cercles peuvent être reliés par des sphères à quatre couples de points A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4; A_5, B_5.

Cherchons le degré de la section de cette nouvelle surface par le plan $A_1A_2B_2$; cette section comprend d'abord manifestement un cercle qu'on obtient en menant le cercle orthogonal à trois cercles du plan $A_1A_2B_2$; les points de la seconde branche de courbe peuvent être associés deux à deux; la droite les joignant passe par A_1. Soit une sécante issue de A_1 et cherchons le nombre des points d'intersection avec la courbe, c'est-à-dire cherchons les cercles qui rencontrent cette sécante en deux points; si O est le point d'intersection de la sécante avec A_2B_2, la puissance de ce point par rapport à l'un des cercles considérés est OA_2, OB_2. Par suite, si l'on détermine respectivement sur OA_3 et sur OB_3 des points A'_3 et B'_3 par les relations

$$OA'_3 . OA_3 = OB'_3 . OB_3 = OA_2 . OB_2,$$

les quatre points A_3, B_3, A'_3, B'_3 sont sur un cercle qui rencontre en deux points l'un des cercles considérés. Opérant de même sur A_4, B_4 et A_5, B_5, on voit que les cercles rencontrent en deux points trois cercles ayant même centre radical; d'après le théorème de M. Casey, ils sont situés sur une cyclide qui est rencontrée par la sécante A_1O en quatre points; donc le degré de la branche de courbe est égal au nombre quatre augmenté de l'ordre de multiplicité du point A_1.

Or il y a deux cercles passant par A_1 et faisant partie du système linéaire; donc la section par le plan considéré est une courbe du huitième degré qui se compose d'un cercle et d'une courbe du sixième degré; le point A_1 est un point double de cette dernière et de la surface.

Rappelons les formules qui sont relatives à l'inversion et qui ont été données par M. Moutard [1].

Soient m le degré d'une surface, p le degré de multiplicité du pôle, q le degré de multiplicité du cercle de l'infini et soient m', p', q' les nombres analogues pour la surface inverse ; on a

$$\begin{aligned} m' &= 2m - p - 2q, & m &= 2m' - p' - 2q', \\ p' &= m - 2q, & p &= m' - 2q', \\ q' &= m - p - q, & q &= m' - p' - q'. \end{aligned}$$

Dans le cas présent, nous avons

$$m = 2q, \qquad p = 2, \qquad m' = 8.$$

Par suite,

$$m = m' + p = 10,$$
$$q = 5.$$

La surface sur laquelle sont répartis les cercles du système Λ_1 *est donc du dixième degré ; le cercle imaginaire de l'infini est une ligne dont l'ordre de multiplicité est égal à cinq.*

Les points a_1, b_1, ... *sont situés sur une courbe du dixième degré qui est une ligne double de la surface.*

Le lieu des foyers des cercles, qui est également une courbe du dixième degré, est une focale de la surface.

La surface a été définie par le mouvement d'un cercle qui est en involution avec cinq cercles fixes ; il est facile de voir que les cercles d'une même série de la cyclide sont aussi en involution avec cinq cercles.

En effet, considérons une cyclide et cinq cercles d'une même série ; il existe une seconde série, telle que tous les cercles de cette série rencontrent les cinq cercles, chacun en deux points ; sur chacun des cinq cercles, prenons deux points ; on voit que les cercles de la seconde série sont en involution avec cinq cercles fixes ; mais les cercles fixes ne sont pas arbitraires, comme il est aisé de s'en rendre compte.

Ainsi les cercles d'une même série d'une cyclide font partie d'un système Λ_1 *particulier.*

[1] MOUTARD, *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864).

La théorie des surfaces de singularités permet d'écrire immédiatement l'équation de la surface sur laquelle sont répartis les cercles du système A_1 défini par les cinq équations linéaires

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_3 = \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0,$$
$$P_4 = \Sigma d_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_5 = \Sigma e_{ik} p_{ik} = 0;$$

il suffit d'égaler à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e) x_i$$

des cinq variables α, β, γ, δ, ε, et l'on obtient ainsi :

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma\Omega_i(a)x_i & \Sigma\Omega_i(a,b)x_i & \Sigma\Omega_i(a,c)x_i & \Sigma\Omega_i(a,d)x_i & \Sigma\Omega_i(a,e)x_i \\ \Sigma\Omega_i(b,a)x_i & 2\Sigma\Omega_i(b)x_i & \Sigma\Omega_i(b,c)x_i & \Sigma\Omega_i(b,d)x_i & \Sigma\Omega_i(b,e)x_i \\ \Sigma\Omega_i(c,a)x_i & \Sigma\Omega_i(c,b)x_i & 2\Sigma\Omega_i(c)x_i & \Sigma\Omega_i(c,d)x_i & \Sigma\Omega_i(c,e)x_i \\ \Sigma\Omega_i(d,a)x_i & \Sigma\Omega_i(d,b)x_i & \Sigma\Omega_i(d,c)x_i & 2\Sigma\Omega_i(d)x_i & \Sigma\Omega_i(d,e)x_i \\ \Sigma\Omega_i(e,a)x_i & \Sigma\Omega_i(e,b)x_i & \Sigma\Omega_i(e,c)x_i & \Sigma\Omega_i(e,d)x_i & 2\Sigma\Omega_i(e)x_i \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 + \varepsilon P_5 = 0,$$

qui représente un système A_5 passant par le système A_1 considéré, renferme quatre paramètres ; la sphère centrale correspondante peut donc coïncider avec une sphère arbitraire de l'espace ; étant donnée une sphère quelconque, on voit immédiatement, en la prenant pour une des sphères coordonnées, qu'il n'existe qu'un système A_5, passant par A_1, pour lequel la sphère centrale coïncide avec cette sphère ; le complexe linéaire associé est déterminé et l'on a la proposition suivante :

Les cercles répartis sur la surface du dixième degré coupent une sphère quelconque en des doubles points dont les droites appartiennent à un complexe linéaire.

Le système A_1 pourra être défini par cinq sphères arbitraires de l'espace, auxquelles on associera cinq complexes linéaires déterminés qui font partie d'une famille de complexes linéaires à cinq termes.

On peut, en particulier, choisir cinq sphères qui ne soient pas des plans et telles que les complexes associés soient spéciaux ; c'est de cette propriété que nous avons déduit, par des considérations géométriques, le degré de la surface.

Dans certains cas particuliers, on pourra considérer les cercles comme assujettis à rencontrer une ou plusieurs droites isotropes.

Nous terminerons en établissant le théorème suivant :

Les génératrices de la surface réglée, formée par les axes des cercles qui font partie d'un système Λ_1, *appartiennent à un complexe linéaire de droites.*

Considérons un cercle et ses deux foyers dont les coordonnées pentasphériques seront

$$x'_1,\quad x'_2,\quad x'_3,\quad x'_4,\quad x'_5$$

et

$$x''_1,\quad x''_2,\quad x''_3,\quad x''_4,\quad x''_5.$$

Les équations du cercle seront

$$x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + x'_3 x_3 + x'_4 x_4 + x'_5 x_5 = 0,$$
$$x''_1 x_1 + x''_2 x_2 + x''_3 x_3 + x''_4 x_4 + x''_5 x_5 = 0,$$

et l'on aura, pour déterminer les coordonnées du cercle,

$$\lambda p_{ik} = x'_i x''_k - x'_k x''_i.$$

Supposons que le système de coordonnées pentasphériques soit déterminé, en posant

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z,$$
$$2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées cartésiennes des deux foyers et posons

$$u' = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad u'' = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

puis

$$\varpi_{14} = x' - x'', \qquad \varpi_{24} = y' - y'', \qquad \varpi_{34} = z' - z'',$$
$$\varpi_{23} = y'z'' - y''z', \qquad \varpi_{31} = z'x'' - z''x', \qquad \varpi_{12} = x'y'' - x''y',$$
$$x'u'' - x''u' = \mathrm{X}, \qquad y'u'' - y''u' = \mathrm{Y}, \qquad z'u'' - z''u' = \mathrm{Z}, \qquad u' - u'' = \mathrm{U}.$$

On peut alors prendre pour les coordonnées p_{ik} du cercle les valeurs déterminées par les relations

$$
\begin{array}{llll}
p_{12} = \varpi_{12}, & & & \\
p_{13} = \varpi_{13}, & p_{23} = \varpi_{23}, & & \\
2\,p_{14} = X - \varpi_{14}, & 2\,p_{24} = Y - \varpi_{24}, & 2p_{34} = Z - p_{34}, & \\
2\,ip_{15} = X + \varpi_{14}, & 2\,ip_{25} = Y + \varpi_{24}, & 2p_{35} = Z + p_{34}, & 2\,ip_{45} = U.
\end{array}
$$

Une équation linéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$$

s'écrit, en vertu de ces relations,

$$
\begin{aligned}
2(a_{12}\varpi_{12} + a_{23}\varpi_{23} + a_{31}\varpi_{31}) - (a_{14} + ia_{15})\varpi_{14} - (a_{24} + ia_{25})\varpi_{24} - (a_{34} + ia_{35})\varpi_{34}& \\
+ (a_{14} - ia_{15})X + (a_{24} - ia_{25})Y + (a_{34} - ia_{35})Z - a_{45}iU = 0.&
\end{aligned}
$$

On peut remarquer, en passant, cette conséquence, que si la sphère centrale d'un système Λ_5 est le plan de l'infini, les axes des cercles forment un complexe linéaire de droites, et réciproquement.

Les six quantités ϖ_{12}, ϖ_{23}, ϖ_{31}, ϖ_{14}, ϖ_{24}, ϖ_{34} sont, en effet, les coordonnées pluckériennes de l'axe du cercle (p).

Supposons que l'on ait cinq relations linéaires entre les coordonnées p_{ik}; en transformant ces relations comme on vient de l'indiquer, puis éliminant X, Y, Z, U, il reste une relation linéaire et homogène entre les coordonnées pluckériennes de l'axe du cercle, et le théorème est démontré.

NOTE.

On a vu que le système A_5 jouit de la propriété fondamentale suivante :

Les cercles d'un système A_5, *qui sont des droites, forment un complexe linéaire de droites.*

Cette proposition devient intuitive, si l'on a égard aux considérations suivantes :

Considérons un cercle qui se réduit à une droite et cherchons les particularités qui affectent ses coordonnées. Si l'on se rappelle l'interprétation que nous avons donnée des six coordonnées p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}, dont les indices sont formés avec les seuls nombres 1, 2, 3, 4, on a immédiatement cette conclusion :

Les dix coordonnées p_{ik} *d'un cercle qui se réduit à une droite sont des fonctions linéaires des six coordonnées pluckériennes de cette droite.*

C'est sous une autre forme la propriété signalée du système A_5. Posons

$$P_j = \sum_{i=1}^{i=5} \frac{p_{ij}}{R_i},$$

R_i étant le rayon de la sphère $x_i = 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cercle (p) se réduise à une droite s'obtiennent en écrivant les cinq équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad P_4 = 0, \qquad P_5 = 0,$$

qui équivalent à deux relations entre les p_{ik}.

L'équation

$$P_j = 0$$

représente un système A_5, défini par cette condition que les plans de ses cercles passent par le centre de la sphère $x_j = 0$, et l'on a les propositions suivantes :

L'espace réglé est formé par les cercles communs aux cinq systèmes linéaires $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, $P_5 = 0$, *tous ces cercles se réduisant à des droites.*

L'espace réglé est une des parties constitutives d'un système A_4, *l'autre partie étant formée par les cercles dont les plans passent par une droite fixe.*

Faisons enfin la remarque suivante :

M. Kœnigs a donné, pour déterminer le rayon ρ du cercle (p), la formule suivante

$$\rho^2 = \frac{\sum p_{ij}^2}{\sum\limits_{j=1}^{j=5} P_j^2},$$

où P_j a la signification précédente.

Considérons le système quintuplement indéterminé de cercles, obtenu en écrivant que ρ est infini; son équation est

$$\sum_{j=1}^{j=5} P_j^2 = 0.$$

Ce système comprend toutes les droites de l'espace; les plans de ses cercles sont tangents au cercle imaginaire de l'infini.

Remarquons d'ailleurs que, d'une façon générale, si un système quintuplement indéterminé de cercles comprend toutes les droites de l'espace, il est défini par une propriété du plan de son cercle, et réciproquement.