SUR UN

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. ANDOYER.

Au § XI du VII[e] Livre des *Leçons sur la Géométrie,* intitulé : *Les systèmes de points d'intersection des courbes non adjointes avec la courbe fondamentale; extension du problème de l'inversion,* Clebsch s'occupe, en particulier, des systèmes de coniques qui touchent en quatre points une quartique à un seul point double. Le nombre de ces systèmes, qui est 32, se réduit, d'après Clebsch, à 31 si l'on considère seulement les systèmes de coniques proprement dites; le trente-deuxième système est composé de toutes les droites du plan, comptées chacune deux fois. Parmi ces trente et un systèmes, on en distingue aisément trente qui contiennent chacun quatre couples de tangentes doubles, chacune des seize tangentes appartenant à quinze de ces systèmes. Quant au trente et unième système, Clebsch dit simplement qu'il contient les six tangentes à la courbe issues du point double, comptées chacune deux fois.

Dans un Mémoire intitulé : *Recherches géométriques sur les quartiques, en particulier au point de vue des coniques de contact,* et inséré au tome LXXXVII des *Sitzungsberichte de l'Académie des Sciences de Vienne,* M. Ameseder, après avoir rappelé que M. Brill a obtenu, dans les *Mathematische Annalen,* le même résultat que Clebsch, et par la même voie, ajoute qu'il est impossible que le trente et unième système, dont il a été question plus haut, soit composé de coniques proprement dites, mais qu'il est, selon toute apparence, identique avec le trente-deuxième, c'est-à-dire qu'il comprend toutes les droites du plan, comptées chacune deux fois.

Je me propose de faire voir sommairement que ce système se compose non pas de toutes les droites du plan, comptées deux fois, mais des droites passant par le point double, comptées chacune deux fois.

Appelons, avec Clebsch, u_1 et u_2 les deux intégrales normales de première espèce appartenant à la courbe considérée; leurs périodes sont représentées par le Tableau

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & 2i\pi & a_{12} & a_{22}. \end{matrix}$$

Appelons aussi u_3 l'intégrale normale de troisième espèce, dont les deux points de discontinuité sont confondus avec le point double de la courbe; ses périodes correspondant aux précédentes seront o, o, A_1, A_2; elle a, en outre, la période $2i\pi$. Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les points de contact d'une conique de contact particulière, et x_1, x_2, x_3, x_4 ceux d'une conique de contact quelconque; on a, pour définir ces derniers points, les relations

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_1 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi m_1 + q_1 a_{11} + q_2 a_{21}),$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_2 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi m_2 + q_1 a_{12} + q_2 a_{22}),$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_3 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi g \;\; + q_1 A_1 \;\; + q_2 A_2\;),$$

m_1, m_2, q_1, q_2, g étant des entiers, auxquels il faut donner les valeurs o et 1. Il y a donc 2^5 ou 32 systèmes de coniques de contact. Le trente-deuxième système, composé des droites du plan comptées deux fois, correspond à $m_1 = m_2 = q_1 = q_2 = g = 0$. Le trente et unième correspond à $m_1 = m_2 = g_1 = g_2 = 0$ et $g = 1$, c'est-à-dire aux équations

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_1 \equiv 0,$$

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_2 \equiv 0,$$

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_3 \equiv i\pi.$$

Il est donc clair que, seules, les deux premières de ces équations sont vérifiées si l'on prend pour x_1, x_2, x_3, x_4 les points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque du plan; mais, si cette droite passe par le point double, en se rappelant que u_3 a ses points de discontinuité confondus au point double, on voit que le premier membre de la troisième équation devient indéterminé, et, par suite, on peut la considérer comme vérifiée. Le trente et unième système se compose donc des droites passant par le point double, comptées chacune deux fois.

Le nombre 31 des systèmes de coniques de contact doit donc être réduit à 30. Avec cette rectification, on met d'ailleurs d'accord les formules de Clebsch avec celles que M. Cayley a déduites de la théorie des caractéristiques, et qui sont reproduites dans l'Ouvrage de Salmon sur les courbes planes.

Il va sans dire que les considérations qui précèdent peuvent s'appliquer, avec les modifications convenables, au problème général des courbes de contact non adjointes, et qu'il faut apporter des rectifications analogues aux résultats énoncés par Clebsch à ce sujet dans les Mémoires sur l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie et sur les courbes planes dont les coordonnées sont fonctions rationnelles ou elliptiques d'un paramètre, insérés aux tomes 63 et 64 du *Journal de Crelle*.

Ainsi, en particulier, les nombres des systèmes de coniques de contact pour une quartique à deux points doubles est 13 et non pas 15; on en déduit facilement, comme l'indiquent aussi les formules de M. Cayley, qu'il y a 26 telles coniques passant par un point et 51 tangentes à une droite.

Les deux autres systèmes indiqués par Clebsch sont les faisceaux de droites issues des points doubles et comptées deux fois. De même, pour une quartique à trois points doubles, le nombre des systèmes des coniques de contact sera 4 et non 7; les trois systèmes à supprimer sont les faisceaux de droites comptées deux fois, ayant pour sommets les points doubles. Ce dernier cas est susceptible d'être traité complètement d'une façon élémentaire : nous allons présenter les détails de la démonstration, afin de lever, par analogie, l'objection qu'on pourrait faire au raisonnement qui nous a servi ci-dessus, objection consistant en ce qu'on peut demander de faire l'inversion des équations qui définissent le problème, et de montrer qu'effectivement ces équations admettent pour solutions nécessaires les deux valeurs du paramètre qui correspondent au point double.

Considérons une quartique à trois points doubles, définie, pour plus de simplicité, par les équations

$$x = t, \qquad y = t^3, \qquad z = t^4 - 1,$$

et traitons le problème comme dans le cas général. Les trois intégrales de troisième espèce, dont les points de discontinuité sont confondus avec un point double, sont respectivement

$$\int \frac{dt}{t}, \qquad \int \frac{2\,dt}{t^2-1}, \qquad \int \frac{2\,i\,dt}{t^2+1},$$

et les équations du problème sont, en désignant par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les valeurs de t qui correspondent aux points de contact d'une conique particulière répondant à la question et t_1, t_2, t_3, t_4 celles qui répondent aux points de contact d'une quelconque des coniques cherchées,

$$\sum \int_{\theta_i}^{t_i} \frac{dt}{t} \equiv p i \pi,$$

$$\sum \int_{\theta_i}^{t_i} \frac{2\,dt}{t^2-1} \equiv q i \pi,$$

$$\sum \int_{\theta_i}^{t_i} \frac{2\,i\,dt}{t^2+1} \equiv r i \pi,$$

p, q, r ayant les valeurs 0 ou 1; on peut les écrire

$$\frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4} = \pm 1,$$

$$\frac{t_1-1}{t_1+1} \cdots \frac{t_4-1}{t_4+1} \, \frac{\theta_1+1}{\theta_1-1} \cdots \frac{\theta_4+1}{\theta_4-1} = \pm 1,$$

$$\frac{t_1-i}{t_1+i} \cdots \frac{t_4-i}{t_4+i} \, \frac{\theta_1+i}{\theta_1-i} \cdots \frac{\theta_4+i}{\theta_4-i} = \pm 1.$$

D'ailleurs, si $\theta_1, \ldots, \theta_4$ correspondent aux points d'intersection avec la courbe d'une droite quelconque, hypothèse que nous avons le droit de faire, on constate facilement, en mettant les valeurs de x, y, z dans l'équation de la droite, que l'on a

$$\theta_1\theta_2\ldots\theta_4 = -1,$$

$$\frac{\theta_1+1}{\theta_1-1}\cdots\frac{\theta_4+1}{\theta_4-1} = -1,$$

$$\frac{\theta_1+i}{\theta_1-i}\cdots\frac{\theta_4+i}{\theta_4-i} = -1.$$

Les équations deviennent donc, ce qu'on aurait d'ailleurs pu trouver directement sans aucune difficulté,

$$t_1\ldots t_4 = \mp 1,$$

$$\frac{t_1-1}{t_1+1}\cdots\frac{t_4-1}{t_4+1} = \mp 1,$$

$$\frac{t_1-i}{t_1+i}\cdots\frac{t_4-i}{t_4+i} = \mp 1.$$

La combinaison de signes $-$, $-$, $-$ répond aux droites quelconques du plan, comptées deux fois. Il faut montrer que, si l'on prend un signe $+$ et deux signes $-$, on obtient les faisceaux de droites passant par les points doubles.

Faisons

$$S_1 = \Sigma t_1, \qquad S_2 = \Sigma t_1 t_2, \qquad S_3 = \Sigma t_1 t_2 t_3, \qquad S_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

les équations s'écrivent

$$S_4 = \mp 1,$$

$$\frac{S_4 - S_3 + S_2 - S_1 + 1}{S_4 + S_3 + S_2 + S_1 + 1} = \mp 1,$$

$$\frac{S_4 - iS_3 - S_2 + iS_1 + 1}{S_4 + iS_3 - S_2 - iS_1 + 1} = \mp 1.$$

Soit, par exemple, la combinaison $-$, $-$, $+$; on a

$$S_4 = -1,$$

$$S_2 = 0,$$

$$S_1 - S_3 = 0.$$

L'équation dont les racines sont t_1, t_2, t_3, t_4 est donc

$$t^4+\lambda t^3+\lambda t-1=0=(t^2+1)(t^2+\lambda t-1),$$

équation qui admet les deux racines $\pm i$, qui correspondent à l'un des points doubles. Il reste à vérifier, ce qui n'offre aucune difficulté, que les deux points qui correspondent aux deux autres racines sont en ligne droite avec ce point double. Il en est de même évidemment pour les combinaisons analogues de signes.

Les systèmes de coniques proprement dites ne correspondent donc qu'aux combinaisons où figure au plus un signe $-$.