ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

ATTRACTION

D'UN ELLIPSOÏDE HOMOGÈNE

OU

COMPOSÉ DE COUCHES HOMOGÈNES SUR UN POINT EXTÉRIEUR;

PAR M. A. LEGOUX.

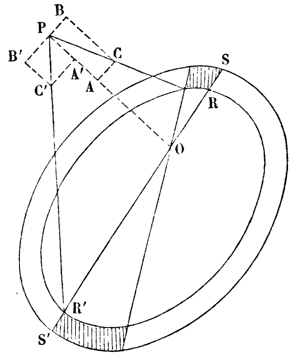
On connaît plusieurs méthodes pour calculer l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur.

La suivante, extraite en grande partie d'un article publié par M. Percival Frost, d'après les inspirations de MM. Cayley et Adams (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. XVII) et complétée par une démonstration de Chasles (*Comptes rendus*, t. VI, 1838), me paraît surpasser toutes les autres par son élégance et sa simplicité. Elle conduit sans effectuer aucune intégration aux quadratures qui expriment les composantes de l'attraction sur un point donné extérieur à l'ellipsoïde.

Attraction d'une couche infiniment mince. — Soit à calculer l'attraction exercée par une couche ellipsoïdale comprise entre les deux surfaces ellipsoïdales homothétiques et concentriques dont les axes sont, pour la première, a, b, c; pour la seconde, $a(1+\lambda)$, $b(1+\lambda)$, $c(1+\lambda)$. Soient $P(f, g, h)$ le point attiré, O un point situé à l'intérieur de la couche et dont les coordonnées sont f', g', h'. Imaginons un cône infiniment petit de sommet O et dont l'angle solide est ω. Ce cône découpe dans la couche deux éléments de masse dont l'expression sera $\omega r^2 \, \delta r$ et $\omega r'^2 \, \delta r'$, en supposant la densité égale à l'unité et appelant r et r' les longueurs OR et OR' des génératrices des deux cônes de sommet O.

On sait que les segments interceptés entre les deux couches sur une même

Fig. 1.



droite sont égaux; donc $\delta r = \delta r'$. L'attraction exercée par le premier élément sur le point P sera proportionnelle à $\frac{\omega r^2 \, \delta r}{\rho^2}$, celle exercée par le second sera proportionnelle à $\frac{\omega r'^2 \, \delta r'}{\rho'^2}$, en posant $\mathrm{PR} = \rho$, $\mathrm{PR}' = \rho'$. Soient PC et PC' les valeurs de ces attractions; décomposons chacune d'elles en deux parties, l'une dirigée suivant PO, l'autre suivant une parallèle à RR'. Soient PA et PA' les premières composantes, PB et PB' les secondes; on aura

$$\mathrm{PA} = \frac{\omega r^3 \, \delta r}{\rho^3} \, \frac{\mathrm{PO}}{r}, \qquad \mathrm{PA}' = \frac{\omega r'^3 \, \delta r'}{\rho'^3} \, \frac{\mathrm{PO}}{r'};$$

$$\mathrm{PB} = \frac{\omega r^3 \, \delta r}{\rho^3}, \qquad \mathrm{PB}' = \frac{\omega r'^3 \, \delta r'}{\rho'^3}.$$

Le point O étant assujetti à la seule condition d'être placé à l'intérieur de la couche, cherchons à déterminer sa position de manière que la résultante des deux forces attractives PC et PC' soit dirigée suivant PO, c'est-à-dire de telle sorte que l'on ait $\mathrm{PB} = \mathrm{PB}'$; ou bien, puisque $\delta r = \delta r'$, de telle façon que $\frac{r}{\rho} = \frac{r'}{\rho'}$.

Soient l, m, n les cosinus directeurs de OR, les coordonnées de R seront $f' + lr$, $g' + mr$, $h' + nr$; mais, le point R étant sur l'ellipsoïde a, b, c, on aura, cet ellipsoïde étant rapporté à ses axes principaux,

$$1 = \frac{(f' + lr)^2}{a^2} + \frac{(g' + mr)^2}{b^2} + \frac{(h' + nr)^2}{c^2}.$$

On a aussi

$$\rho^2 = (f - f' - lr)^2 + (g - g' - mr)^2 + (h - h' - nr)^2.$$

Multiplions la première équation par une indéterminée θ et ajoutons-les membre à membre,

$$\rho^2 + \theta = (f - f' - lr)^2 + (g - g' - mr)^2 + (h - h' - nr)^2 + \frac{(f' + lr)^2\theta}{a^2} + \frac{(g' + mr)^2\theta}{b^2} + \frac{(h' + nr)^2\theta}{c^2}.$$

Cherchons à profiter de l'indétermination des quatre quantités f', g', h', θ de façon que l'équation précédente se réduise à la forme

$$\rho^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\theta\right].$$

Il suffit, pour cela, que l'on puisse déterminer f', g', h' et θ de façon que les équations de condition suivantes soient satisfaites simultanément :

$$\theta = (f - f')^2 + (g - g')^2 + (h - h')^2 + \left(\frac{f'^2}{a^2} + \frac{g'^2}{b^2} + \frac{h'^2}{c^2}\right)\theta,$$

$$\frac{f - f'}{\theta} = \frac{f'}{a^2}, \qquad \frac{g - g'}{\theta} = \frac{g'}{b^2}, \qquad \frac{h - h'}{\theta} = \frac{h'}{c^2}.$$

La dernière ligne peut être écrite

$$\frac{f - f'}{\theta} = \frac{f}{\theta + a^2}, \qquad \frac{g - g'}{\theta} = \frac{g}{\theta + b^2}, \qquad \frac{h - h'}{\theta} = \frac{h}{\theta + c^2}.$$

Substituons dans la première; il vient, toutes réductions faites,

$$(1) \qquad \frac{f^2}{a^2 + \theta} + \frac{g^2}{b^2 + \theta} + \frac{h^2}{c^2 + \theta} = 1.$$

Cette équation détermine θ, et, θ étant connu, les trois équations précédentes donnent f', g', h'.

On remarque que θ n'est autre chose que le paramètre définissant les trois surfaces du second degré homofocales à l'ellipsoïde (a, b, c) et passant par le point P.

Supposons $a < b < c$, l'équation (1) a une racine positive qui correspond à l'ellipsoïde homofocal et deux racines négatives. Nous prendrons la valeur positive de θ.

L'expression de $\frac{\rho}{r}$ ne dépend plus que des cosinus directeurs l, m, n, et, comme ces quantités n'y entrent que par leurs carrés, $\frac{\rho}{r}$ aura la même valeur que $\frac{\rho'}{r'}$.

On peut écrire la valeur de $\frac{\rho}{r}$ de la manière suivante :

$$(2) \qquad \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{l^2}{\frac{a^2}{a^2+\theta}} + \frac{m^2}{\frac{b^2}{b^2+\theta}} + \frac{n^2}{\frac{c^2}{c^2+\theta}}.$$

D'après la forme de cette expression, on voit que $\frac{r}{\rho}$ ou $\frac{r'}{\rho'}$ peut être considéré géométriquement comme le rayon central d'un ellipsoïde dont les demi-axes principaux seraient $\frac{a}{\sqrt{a^2+\theta}}, \frac{b}{\sqrt{b^2+\theta}}, \frac{c}{\sqrt{c^2+\theta}}$.

Un calcul très simple donne

$$(3) \qquad \mathrm{OP} = \frac{\theta}{p}, \qquad \text{en posant} \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{f^2}{(a^2+\theta)^2} + \frac{g^2}{(b^2+\theta)^2} + \frac{h^2}{(c^2+\theta)^2};$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{X}) = \dfrac{f-f'}{\mathrm{OP}} = \dfrac{fp}{a^2+\theta}, \\ \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{Y}) = \dfrac{gp}{b^2+\theta}, \\ \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{Z}) = \dfrac{hp}{c^2+\theta}; \end{cases}$$

$$(5) \qquad \frac{ff'}{a^2} + \frac{gg'}{b^2} + \frac{hh'}{c^2} = \frac{f^2}{a^2+\theta} + \frac{g^2}{b^2+\theta} + \frac{h^2}{c^2+\theta} = 1.$$

Les formules (4) montrent que PO est normale à l'ellipsoïde homofocal à (abc) passant par P et les formules (5) que le point O est situé dans le plan polaire de P relativement à l'ellipsoïde (abc).

Le point O étant ainsi déterminé, il nous reste à calculer la somme des attractions PA et PA′ dirigées suivant PO, et ensuite la somme de toutes les valeurs pareilles correspondant aux divers couples d'éléments que l'on obtient en faisant tourner autour de O le double cône infiniment petit, de façon à embrasser le volume tout entier de la couche ellipsoïdale.

On a

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PA}' = \frac{\omega r^3 \delta r}{\rho^3} \frac{\mathrm{OP}}{r} + \frac{\omega r'^3 \delta r'}{\rho'^3} \frac{\mathrm{OP}}{r'} = \frac{\omega r^3 \theta}{\rho^3 p}\left(\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta r'}{r'}\right) = \frac{\omega r^3 \theta}{\rho^3 p} \delta \mathrm{L}(rr');$$

r et r' sont les racines de l'équation du second degré

$$\frac{(f'+lr)^2}{a^2}+\frac{(g'+mr)^2}{b^2}+\frac{(h'+nr)^2}{c^2}=1;$$

on a, par suite,

$$rr'=\frac{1-\dfrac{f'^2}{a^2}-\dfrac{g'^2}{b^2}-\dfrac{h'^2}{c^2}}{\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}+\dfrac{n^2}{c^2}}.$$

Le point (f', g', h') étant à l'intérieur de l'ellipsoïde (a, b, c), le second membre est positif et représente la valeur numérique du produit.

Désignons par δa, δb, δc les variations des demi-axes de l'ellipsoïde lorsqu'on passe de la surface interne à la surface externe, nous aurons

$$\delta a=\lambda a, \qquad \delta b=\lambda b, \qquad \delta c=\lambda c.$$

Remarquons que, si A, B, C sont trois quantités ne dépendant pas de a, b, c, on a

$$\delta\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}\right)=-2\lambda\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}\right).$$

Un calcul simple donne immédiatement

$$\delta L(rr')=\frac{2\lambda}{\dfrac{\theta f^2}{(\theta+a^2)^2}+\dfrac{\theta g^2}{(\theta+b^2)^2}+\dfrac{\theta h^2}{(\theta+c^2)^2}}=\frac{2\lambda p^2}{\theta}.$$

L'expression de la force attractive sera donc, suivant PO,

$$2\lambda p\,\omega R^3, \qquad \text{en posant} \qquad \frac{r}{\rho}=\frac{r'}{\rho'}=R.$$

Les composantes, suivant les axes de l'ellipsoïde, seront

Suivant OX...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, X)=\dfrac{\lambda p^2 f}{\theta+a^2}2\omega R^3$

Suivant OY...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, Y)=\dfrac{\lambda p^2 g}{\theta+b^2}2\omega R^3$

Suivant OZ...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, Z)=\dfrac{\lambda p^2 h}{\theta+c^2}2\omega R^3$

Ces valeurs des composantes de la force attractive élémentaire ont été trouvées par Chasles, sous cette forme, par une méthode purement géométrique, mais un peu plus compliquée que la précédente.

Le point O ayant été déterminé, si l'on fait tourner le double cône ayant pour sommet ce point de façon à comprendre toute la couche ellipsoïdale, les attractions correspondant à chaque couple d'éléments seront toutes dirigées suivant PO; les composantes de toutes ces attractions suivant les axes seront

$$\text{Suivant OX} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 f}{\theta + a^2}\Sigma 2\omega R^3$$

$$\text{Suivant OY} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 g}{\theta + b^2}\Sigma 2\omega R^3$$

$$\text{Suivant OZ} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 h}{\theta + c^2}\Sigma 2\omega R^3$$

le signe Σ s'étendant à toute la masse de la couche. Il est aisé d'évaluer cette somme, en se rappelant que R représente le rayon vecteur central d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont $\frac{a}{\sqrt{a^2+\theta}}$, $\frac{b}{\sqrt{b^2+\theta}}$, $\frac{c}{\sqrt{c^2+\theta}}$, d'après l'équation (2).

Le volume d'un pareil ellipsoïde est égal, d'une part, à

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\omega R^3$$

et, d'autre part, à

$$\frac{4}{3}\pi\frac{abc}{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}};$$

d'où l'on tire

$$2\Sigma\omega R^3 = \frac{4\pi abc}{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}}.$$

Les composantes de l'attraction de la couche ellipsoïdale sur le point extérieur P seront donc, en posant, pour abréger l'écriture, $\theta + a^2 = a_1^2$, $\theta + b^2 = b_1^2$, $\theta + c^2 = c_1^2$,

$$\text{Suivant OX} \ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 f}{a_1^2}\frac{4\pi abc}{a_1 b_1 c_1} \quad \text{ou} \quad 4\pi\frac{\lambda a}{a}\frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2 f}{a_1^2}$$

$$\text{Suivant OY} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ou} \quad 4\pi\frac{\lambda b}{b}\frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2 g}{b_1^2}$$

$$\text{Suivant OZ} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ou} \quad 4\pi\frac{\lambda c}{c}\frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2 h}{c_1^2}$$

Attraction sur un point extérieur d'un ellipsoïde homogène. — Soit $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ l'équation d'un ellipsoïde homogène; soit $P(f, g, h)$ le point attiré extérieur à l'ellipsoïde. Conservons d'ailleurs les notations déjà adoptées. On partagera l'ellipsoïde proposé en couches infiniment minces limitées par des surfaces semblables à celle de l'ellipsoïde. Soient (a, b, c), $a(1+\lambda)$, $b(1+\lambda)$, $c(1+\lambda)$ les demi-axes de deux surfaces infiniment voisines qui limitent une couche, a_1, b_1, c_1 les demi-axes d'un ellipsoïde homofocal à a, b, c passant par P. La valeur de l'attraction exercée par cette couche sur P et estimée suivant OX sera, d'après ce qui précède,

$$4\pi \frac{\lambda a}{a} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 f}{a_1^2}.$$

Soient $\lambda a = da$ et X la valeur totale de l'attraction de l'ellipsoïde suivant OX, on aura

$$X = 4\pi \int \frac{da}{a} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 f}{a_1^2}.$$

Deux formules pareilles donneront les composantes suivant OY et suivant OZ. Occupons-nous seulement de X; on obtiendra ensuite Y et Z par des permutations circulaires.

On voit bien aisément qu'il n'y a sous le signe $\int$ qu'une seule variable a, par exemple, car les autres quantités peuvent toutes s'exprimer en fonction de a. On a, en effet,

$$b = a\frac{B}{A}, \qquad c = a\frac{C}{A},$$

$$b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2 = a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \qquad c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2 = a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right),$$

$$(6) \qquad b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \qquad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right),$$

et a_1 est déterminé par l'équation

$$(7) \qquad \frac{f^2}{a_1^2} + \frac{g^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{h^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = 1.$$

On a ainsi le moyen d'exprimer b, c, a_1, b_1, c_1 en fonction de a. On a, de plus,

$$(8) \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{f^2}{a_1^4} + \frac{g^2}{b_1^4} + \frac{h^2}{c_1^4}.$$

Prenons maintenant une nouvelle variable u définie par la relation $\dfrac{a}{a_1} = u$.

Introduisons cette variable dans les équations (7) et (8), on a

$$f^2u^2 + \frac{g^2}{\frac{1}{u^2} + \frac{B^2}{A^2} - 1} + \frac{h^2}{\frac{1}{u^2} + \frac{C^2}{A^2} - 1} = a^2,$$

$$\frac{a^4}{p^2} = f^2u^4 + \frac{g^2}{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{B^2}{A^2} - 1\right)^2} + \frac{h^2}{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{C^2}{A^2} - 1\right)^2};$$

différentions la première, il vient, en tenant compte de la seconde,

$$da = \frac{a^3\,du}{p^2u^3}.$$

Limites de l'intégrale. — La variable a varie de o à A. La variable u varie de o à $\frac{A}{A_1}$, A_1 étant ce que devient a_1 lorsque $a = A$, c'est-à-dire que A_1 est une racine de l'équation

$$\frac{f^2}{A_1^2} + \frac{g^2}{A_1^2 + B^2 - A^2} + \frac{h^2}{A_1^2 + C^2 - A^2} = 1.$$

Effectuons les substitutions, on trouve sans peine, toutes réductions faites,

$$X = 4\pi BCf \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

Nous n'écrivons pas les valeurs des composantes Y et Z qu'on obtient par de simples permutations de lettres.

Dans les formules précédentes, on a supposé que l'ellipsoïde était homogène. Le cas où il serait composé de couches homogènes de densité variable d'une couche à l'autre ne présente aucune difficulté. Les valeurs des composantes de l'attraction totale sur un point extérieur sont pareilles aux précédentes; il suffit d'introduire, sous le signe $\int$, un facteur δ qui représente la densité et qui est une fonction donnée de u.

Premier cas particulier. — Le point attiré est situé sur la surface externe de l'ellipsoïde; on a

$$A = A_1 \qquad \text{et} \qquad X = 4\pi BCf \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

Second cas particulier. — L'ellipsoïde est de révolution : on a, par exemple, $B = C$; l'intégration s'effectue immédiatement.