SUR LA

TRANSFORMATION LINÉAIRE

DE LA DIFFÉRENTIELLE ELLIPTIQUE $\frac{dx}{\sqrt{X}}$;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. En introduisant dans la différentielle elliptique

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

une nouvelle variable y par la substitution linéaire

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},$$

on obtient un résultat de cette forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

$$\mathbf{X}=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4,$$

$$\mathbf{Y}=b_0y^4+4b_1y^3+6b_2y^2+4b_3y+b_4.$$

Cette transformation a été déjà traitée maintes fois : cependant il nous a paru qu'on ne l'avait pas encore envisagée sous un certain point de vue qui ne semble pas sans intérêt.

Nous préférons écrire la relation entre x et y sous la forme

$$p+qx+ry+sxy=0,$$

et il sera quelquefois plus commode d'écrire X et Y sous forme homogène

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 x' + 6 a_2 x^2 x'^2 + 4 a_3 x x'^3 + a_4 x'^4,\\
\mathrm{Y} &= b_0 y^4 + 4 b_1 y^3 y' + 6 b_2 y^2 y'^2 + 4 a_3 y y'^3 + b_4 y'_4,
\end{aligned}$$

et nous emploierons sans distinction ces formes non homogènes ou homogènes : il faudra toujours supposer dans ces dernières $x' = y' = 1$.

2. Voici deux remarques qui se présentent immédiatement. On constate d'abord que, si l'on considère les invariants de X

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,\\
\mathrm{T} &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,
\end{aligned}$$

et les invariants correspondants S′, T′ de Y, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \mathrm{S}',\\
\mathrm{T} &= \mathrm{T}'.
\end{aligned}$$

C'est là une conséquence immédiate de la propriété caractéristique des invariants. En effet, la valeur de Y se déduit de celle de X en remplaçant

$$\begin{aligned}
&x \quad \text{par} \quad \alpha y + \beta y',\\
&y \quad \text{par} \quad \gamma y + \delta y',
\end{aligned}$$

et en divisant ensuite par $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$.

Ainsi l'on a

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = b_0 b_4 - 4 b_1 b_3 + 3 b_2^2 = \mathrm{S},$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \mathrm{T}.$$

En second lieu, considérons les racines des équations $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$. En les désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 respectivement, il est clair que

$$p + q x_i + r y_i + s x_i y_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

et par conséquent le rapport anharmonique des racines de $\mathrm{X} = 0$ est égal au rapport anharmonique des racines correspondantes de $\mathrm{Y} = 0$.

Si nous désignons, pour abréger, un tel rapport

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4} \quad \text{par} \quad (1.2.3.4),$$

on a

$$(1.2.3.4)=(2.1.4.3)=(3.4.1.2)=(4.3.2.1)=\lambda,$$

$$(1.2.4.3)=(2.1.3.4)=(3.4.2.1)=(4.3.1.2)=\frac{1}{\lambda},$$

$$(1.3.2.4)=(2.4.1.3)=(3.1.4.2)=(4.2.3.1)=1-\lambda,$$

$$(1.3.4.2)=(2.4.3.1)=(3.1.2.4)=(4.2.1.3)=\frac{1}{1-\lambda},$$

$$(1.4.2.3)=(2.3.1.4)=(3.2.4.1)=(4.1.3.2)=\frac{\lambda-1}{\lambda},$$

$$(1.4.3.2)=(2.3.4.1)=(3.2.1.4)=(4.1.2.3)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ces six valeurs du rapport anharmonique sont différentes en général; il n'y a exception que dans les cas suivants.

A. $\lambda=-1$ (ou $=2$, ou $=\frac{1}{2}$); alors

$$\lambda=\frac{1}{\lambda}=-1,$$

$$1-\lambda=\frac{\lambda-1}{\lambda}=2,$$

$$\frac{1}{1-\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-1}=\frac{1}{2}.$$

B. $\lambda=1+\varepsilon$ (ou $=1+\varepsilon^2$), ε étant une racine cubique imaginaire de l'unité

$$\lambda=\frac{1}{1-\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda}=1+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{\lambda}=1-\lambda=\frac{\lambda}{\lambda-1}=1+\varepsilon^2.$$

Il faudrait ajouter le cas $\lambda=0, 1, \infty$, mais ce cas ne peut se présenter que lorsque les racines de l'équation $X=0$ ne sont pas toutes distinctes et nous en ferons abstraction. Dans ces cas exceptionnels le rapport anharmonique peut même devenir tout à fait indéterminé, par exemple, lorsque $x_1=x_2=x_3$.

3. Nous posons maintenant la question suivante : étant donnés deux polynômes du quatrième degré X, Y, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

par une relation de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0 ?$$

La réponse est presque immédiate. D'après ce qui précède, il est *nécessaire* certainement que les invariants de X soient égaux aux invariants de Y, mais il est facile à voir que cette condition est aussi suffisante.

En effet, on peut remarquer d'abord que cette égalité des invariants entraîne aussi l'égalité des rapports anharmoniques des racines de $X = 0$ et des racines de $Y = 0$.

Ce fait bien connu, nous allons le déduire ici des formules qui donnent la résolution de l'équation $X = 0$, dont nous aurons besoin encore dans la suite.

On a d'abord à calculer les racines u', u'', u''' de l'équation cubique

$$4u^3 - \mathbf{S}u - \mathbf{T} = 0. \tag{1}$$

Ensuite on a à calculer les racines carrées

$$\left\{\begin{aligned} m' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u'}, \\ m'' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u''}, \\ m''' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u'''}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

mais, à cause de la relation

$$m' m'' m''' = -\tfrac{1}{2}(2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3), \tag{3}$$

on voit qu'on peut exprimer par exemple m''' rationnellement au moyen de m' et m''.

Les racines de $X = 0$ sont alors données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} a_0 x_1 &= -a_1 + m' + m'' + m''', \\ a_0 x_2 &= -a_1 + m' - m'' - m''', \\ a_0 x_3 &= -a_1 - m' + m'' - m''', \\ a_0 x_4 &= -a_1 - m' - m'' + m'''. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ces formules conduisent directement à cette conséquence que les rapports anharmoniques de x_1, x_2, x_3, x_4 s'expriment *rationnellement* par les racines u', u'', u'''. En effet, on trouve, par exemple,

$$(1.2.3.4) = \lambda = \frac{m'^2 - m'''^2}{m'^2 - m''^2}$$

ou bien

$$(5)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{u' - u'''}{u' - u''}, & \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{u' - u''}{u' - u'''}, \\[2ex] 1 - \lambda = \dfrac{u'' - u'''}{u'' - u'}, & \dfrac{1}{1 - \lambda} = \dfrac{u'' - u'}{u'' - u'''}, \\[2ex] \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} = \dfrac{u''' - u''}{u''' - u'}, & \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = \dfrac{u''' - u'}{u''' - u''}. \end{cases}$$

Or, comme l'équation $Y = 0$ donne lieu à la même équation résolvante en u, on voit bien que l'égalité des invariants entraîne l'égalité des rapports anharmoniques.

Ce point étant établi, supposons

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4},$$

et supposons qu'on détermine les coefficients p, q, r, s dans la relation

$$(6)\qquad p + qx + ry + sxy = 0,$$

par la condition que, pour

$$\begin{aligned} x &= x_1, & y &= y_1, \\ x &= x_2, & y &= y_2, \\ x &= x_3, & y &= y_3, \end{aligned}$$

on aura aussi nécessairement, pour $x = x_4$, $y = y_4$.

La substitution (6) donnera alors nécessairement un résultat de cette forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{cY}},$$

où c est une constante. Mais maintenant les invariants de cY doivent encore être égaux à ceux de X ou de Y, ce qui donne

$$(7)\qquad \begin{cases} c^2 S = S, \\ c^3 T = T; \end{cases}$$

d'où l'on conclut $c = +1$.

Nous venons de déterminer les coefficients p, q, r, s (ou plutôt leurs rapports) par la condition de la correspondance des valeurs suivantes de x et de y :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4; \end{cases}$$

mais, à cause de

$$(1.2.3.4) = (2.1.4.3) = (3.4.1.2) = (4.3.2.1),$$

il est clair qu'on aurait pu établir les correspondances suivantes :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_2, \ y_1, \ y_4, \ y_3; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_3, \ y_4, \ y_1, \ y_2; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_4, \ y_3, \ y_2, \ y_1. \end{cases}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

par une relation de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

il faut et il suffit que les invariants de X soient égaux aux invariants de Y; et, si cette condition est remplie, il existe toujours quatre relations de cette forme qui satisfont à l'équation différentielle.

On peut nommer ces relations des intégrales linéaires de l'équation différentielle, et notre but principal sera maintenant d'approfondir au point de vue algébrique la détermination de ces intégrales linéaires.

Il faut remarquer, en effet, que, d'après ce qui précède, on peut bien écrire directement ces intégrales linéaires, mais à condition d'avoir résolu d'abord les équations $X = 0$ et $Y = 0$. Les opérations non rationnelles nécessaires pour cela sont d'abord la détermination des trois racines u', u'', u''' de l'équation cubique en u, et ensuite on a à calculer encore quatre racines carrées.

Mais, comme on vient de reconnaître que le problème admet toujours quatre solutions, la solution doit dépendre d'une *seule* équation du quatrième degré, et ainsi il doit être possible d'obtenir rationnellement ces intégrales linéaires après avoir calculé les racines d'une équation cubique et *deux* racines carrées.

Ainsi, au point de vue algébrique, la méthode qui consiste à passer par les racines de $X = 0$, $Y = 0$ n'a pas toute la simplicité possible.

Mais, avant d'aborder le problème que nous venons de poser, il convient de compléter encore par quelques remarques ces considérations préliminaires.

4. Nous avons vu que les rapports anharmoniques des x_1, x_2, x_3, x_4 s'expriment rationnellement au moyen des racines u', u'', u'''. Or, dans les formules (4), les racines carrées doivent satisfaire à la relation (3) et par conséquent il est permis de changer à la fois le signe de deux de ces racines carrées. Il est clair qu'un tel changement de signes revient à une certaine permutation des racines x_1, x_2, x_3, x_4 et l'on conclut maintenant que ces permutations sont précisément celles qui laissent invariable le rapport anharmonique.

Il est facile à trouver directement l'équation du sixième degré qui détermine les rapports anharmoniques. Les coefficients de cette équation sont évidemment des fonctions symétriques de u', u'', u''' et s'expriment ainsi rationnellement par S et T.

Les équations (5) donnent facilement

$$\begin{aligned} 3u' &= (u' - u'')(1 + \lambda), \\ 3u'' &= (u' - u'')(-2 + \lambda), \\ 3u''' &= (u' - u'')(+1 - 2\lambda), \end{aligned}$$

et, en substituant ces expressions dans les relations

$$\begin{aligned} S &= -4(u'u'' + u''u''' + u'''u'), \\ T &= 4u'u''u''', \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} 9S &= +4(u' - u'')^2\, 3(1 - \lambda + \lambda^2), \\ 27T &= 4(u' - u'')^3(1 + \lambda)(-2 + \lambda)(1 - 2\lambda); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{S^3}{T^2} = 108\,\frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{(1 + \lambda)^2(2 - \lambda)^2(1 - 2\lambda)^2}. \tag{8}$$

On vérifie directement que le second membre ne change pas en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ ou par $1-\lambda$.

La résolution de cette équation du sixième degré, nous le savons, ne renferme pas de plus grandes difficultés que la résolution d'une équation cubique. En effet, ses racines s'expriment rationnellement au moyen de u', u'', u'''; mais, comme l'équation (8) ne renferme que le seul paramètre $\frac{S^3}{T^2}$ qui est un invariant absolu, il vaut mieux introduire aussi dans l'équation cubique ce seul paramètre.

Soit donc $Su = Tv$: il vient

$$4v^3 - \frac{S^3}{T^2}(v+1) = 0,$$

et, en désignant par v', v'', v''' les racines, on a

$$\lambda = \frac{v'-v'''}{v'-v''}, \qquad \cdots$$

Lorsque l'équation $X = 0$ admet une racine double, les valeurs du rapport anharmonique sont

$$\infty, \quad \infty, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0,$$

et ainsi l'équation (8) doit se réduire à

$$\lambda^2(\lambda-1)^2 = 0.$$

On voit que cela exige que $S^3 - 27T^2 = 0$, et l'on sait en effet que le discriminant de X est égal à $256(S^3 - 27T^2)$. Comme conséquence, on peut écrire, au lieu de (8),

$$\frac{4(1-\lambda+\lambda^2)^3}{S^3} = \frac{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2}{27T^2} = \frac{27\lambda^2(\lambda-1)^2}{S^3-27T^2}.$$

5. Considérons maintenant les cas particuliers que nous avons déjà énumérés dans le n° 2.

A. $\lambda = -1$ (ou $= 2$, ou $= \frac{1}{2}$) :

Dans ce cas on a $\lambda = \frac{1}{\lambda}$. Il semble donc que, pour transformer au moyen d'une substitution linéaire $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en $\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, on puisse employer non seulement les correspondances (I), (II), (III), (IV) du n° 3, mais encore les suivantes :

(I′) $$\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_1,\ y_2,\ y_4,\ y_3; \end{array}\right.$$

(II′) $$\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_2,\ y_1,\ y_3,\ y_4; \end{array}\right.$$

(III′) $$\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_3,\ y_4,\ y_2,\ y_1; \end{array}\right.$$

(IV′) $$\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_4,\ y_3,\ y_1,\ y_2. \end{array}\right.$$

Faut-il en conclure que dans ce cas exceptionnel il existe huit substitutions linéaires qui transforment $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en $\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}$? Il n'en est rien. En effet, l'équation (8) montre qu'on a dans le cas actuel $T = 0$. Mais alors les relations (7) se réduisent à

$$c^2 S = S,$$

et l'on peut en conclure seulement $c = \pm 1$.

Donc, dans le cas $T = 0$, il n'existe pas seulement quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{Y}};$$

mais il y en a autant qui donnent

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{-Y}}.$$

Les unes seront données par les correspondances (I), (II), (III), (IV) et les autres par les correspondances (I′), (II′), (III′), (IV′).

Le second cas :

B. $\lambda = 1 + \varepsilon$ (ou $= 1 + \varepsilon^2$), donne lieu à des remarques analogues. L'équation (8) montre que $S = 0$, et les relations (7) se réduisent à

$$c^3 T = T;$$

d'où l'on peut conclure seulement $c = 1$, $c = \varepsilon$, $c = \varepsilon^2$.

Chacune des trois équations

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{\varepsilon Y}},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{\varepsilon^2 Y}}$$

admettra quatre intégrales linéaires. Les unes sont déterminées par les correspondances (I), (II), (III), (IV) et les autres par celles-ci

$$\left(\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_1,\ y_3,\ y_4,\ y_2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_4, \\ y = y_2,\ y_4,\ y_3,\ y_1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_3,\ y_1,\ y_2,\ y_4; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_4,\ y_2,\ y_1,\ y_3; \end{array}\right. \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_1,\ y_4,\ y_2,\ y_3; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_2,\ y_3,\ y_1,\ y_4; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_3,\ y_2,\ y_4,\ y_1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_4,\ y_1,\ y_3,\ y_2. \end{array}\right. \end{array}\right)$$

6. Comme application des considérations précédentes, considérons la réduction à la forme normale

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

M étant une constante. Le rapport anharmonique de $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ étant $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$, il faudra déterminer k par la relation

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \lambda.$$

On trouve ainsi deux valeurs réciproques de k; à chacune d'elles correspondent quatre substitutions linéaires, et, si l'on se souvient que λ a six valeurs, il semble qu'on obtient ainsi 48 substitutions linéaires qui réduisent à la forme normale la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. Mais il faut remarquer que le changement de λ en $\frac{1}{\lambda}$ correspond au changement de k en $-k$; par suite, le nombre des substitutions linéaires se réduit à vingt-quatre, et le nombre des valeurs de k^2 est six, qui sont réciproques deux à deux. Si $\pm k$ est l'une des valeurs du module, les autres sont égales à

$$\pm\frac{1}{k},\quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2.$$

Une autre méthode, plus simple à beaucoup d'égards, consiste à poser d'abord

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{M\,dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k_1^2y)}}.$$

Les racines de $Y=0$ sont 1, $\frac{1}{k_1^2}$, 0, ∞. Leur rapport anharmonique est k_1^2 et l'on a ainsi

$$k_1^2=\lambda.$$

On voit qu'ici la signification de k_1^2 est beaucoup plus simple que dans le premier cas. On trouve encore six valeurs de k_1^2 et vingt-quatre substitutions linéaires. En posant $y=z^2$, on est ramené à la forme canonique ordinaire. Mais il faut remarquer que, si les coefficients de X sont réels et qu'on veuille avoir une valeur de k_1^2 qui soit réelle et comprise entre 0 et 1, cette seconde méthode n'est applicable que dans le cas où les racines de $X=0$ sont réelles. Mais il n'entre pas dans nos intentions de discuter ces substitutions en ayant égard aux limites entre lesquelles x et y sont variables; c'est une discussion qu'on trouve dans les Traités des fonctions elliptiques. Constatons seulement, en terminant ces considérations préliminaires, que les intégrales linéaires de

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\pm\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

sont

$$x-y=0,\qquad x+y=0,\qquad 1-kxy=0,\qquad 1+kxy=0.$$

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES LINÉAIRES DE L'ÉQUATION $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

7. La méthode la plus directe pour résoudre le problème proposé consisterait à effectuer la substitution

$$p+qx+ry+sxy=0$$

ou

$$x = -\frac{p + ry}{q + sy}.$$

On trouve ainsi par identification

$$(ps - qr)^2 b_0 = r^4 a_0 - 4r^3 s a_1 + 6r^2 s^2 a_2 - 4rs^3 a_3 + s^4 a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_1 = r^3 p a_0 - r^2(3ps + qr) a_1 + 3rs(ps + qr) a_2 \\ - s^2(ps + 3qr) a_3 + s^3 q a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_2 = r^2 p^2 a_0 - 2rp(ps + qr) a_1 + (p^2 s^2 + q^2 s^2 + 4pqrs) a_2 \\ - 2qs(ps + qr) a_3 + q^2 s^2 a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_3 = rp^3 a_0 - p^2(ps + 3qr) a_1 + 3pq(ps + qr) a_2 \\ - q^2(3ps + qr) a_3 + q^3 s a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_4 = p^4 a_0 - 4p^3 q a_1 + 6p^2 q^2 a_2 - 4pq^3 a_3 + q^4 a_4.$$

Ces cinq relations, à cause de l'égalité des invariants de X et de Y, se réduisent à trois relations distinctes seulement, et le problème qui consiste à déterminer les rapports des quantités p, q, r, s est déterminé.

Mais c'est une voie bien différente qui nous conduira à la solution du problème.

8. Nous aurons à nous appuyer dans ce qui suit sur certains résultats de la théorie algébrique des formes biquadratiques, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux Mémoires classiques de M. Hermite *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées,* dans le tome 52 du *Journal de Crelle.*

Désignons par H_x le hessien de X

$$H_x = \frac{1}{144} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x'} \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial x'\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x'^2} \end{vmatrix},$$

$$H_x = (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 \\ + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2) x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x + (a_2 a_4 - a_3^2),$$

et par J_x le covariant du sixième degré qui est le jacobien de X et de H_x

$$J_x = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial x} & \dfrac{\partial H_x}{\partial x'} \end{vmatrix},$$

$$J_x = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x^6 + \ldots.$$

Les covariants sont liés par la relation

$$4H_x^3 - SH_xX^2 + TX^3 = -J_x^2,$$

d'où M. Hermite a tiré cette conséquence importante, qu'en posant

$$u = -\frac{H_x}{X}$$

il vient

$$\frac{2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\pm\, du}{\sqrt{4u^3 - Su - T}}.$$

Désignons maintenant par H_y, J_y les covariants de Y; en posant

$$v = -\frac{H_y}{Y},$$

il viendra de la même manière

$$\frac{2\,dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\pm\, dv}{\sqrt{4v^3 - Sv - T}}.$$

Il est évident par là que la relation $u = v$, c'est-à-dire

$$XH_y - YH_x = 0,$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Cherchons à approfondir maintenant la nature de cette intégrale particulière.

Pour cela, considérons d'abord le cas particulier

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$
$$Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

On trouve par un calcul facile

$$\begin{aligned} XH_y - YH_x &= \tfrac{1}{4}(1 - k^2)^2(x - y)(x + y)(1 - kxy)(1 + kxy) \\ &= \tfrac{1}{4}(1 - k^2)^2(xy' - yx')(xy' + yx')(x'y' - kxy)(x'y' + kxy). \end{aligned}$$

L'intégrale

$$XH_y - YH_x = 0$$

a donc une nature toute particulière; on voit qu'elle se décompose ainsi

$$x-y=0, \qquad x+y=0, \qquad 1-kxy=0, \qquad 1+kxy=0,$$

et elle résume donc les quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle.

9. Il est facile maintenant d'étendre ce théorème au cas général et de montrer que

$$\mathbf{X}\mathbf{H}_y-\mathbf{Y}\mathbf{H}_x$$

est égal au produit de quatre expressions linéaires de cette forme

$$p+qx+ry+sxy,$$

et alors il est clair que notre problème revient simplement à décomposer XH_y-YH_x en quatre facteurs.

En effet, c'est là une conséquence de ce fait que H, H_x, Y, H_y sont des *covariants*.

Nous savons que, par une substitution

$$\frac{x}{x'}=\frac{\alpha x_1+\beta x'_1}{\gamma x_1+\delta x'_1},$$

on peut réduire

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \quad \text{à la forme canonique} \quad \frac{dx_1}{\sqrt{C(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}.$$

Par une substitution analogue, on réduira

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} \quad \text{à la forme canonique} \quad \frac{dy_1}{\sqrt{C'(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}$$

et, à cause de l'égalité des invariants de X et de Y, on peut faire en sorte qu'on ait la même valeur de k^2 dans les différentielles transformées, et alors on a aussi nécessairement $C=C'$. On est ramené ainsi au cas particulier que nous venons de considérer, et, si l'on écrit

$$C(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)=X_1,$$
$$C(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)=Y_1,$$

on a

$$X_1H_{y_1}-Y_1H_{x_1}$$
$$=\tfrac{1}{4}(1-k^2)^2C^3(x_1y'_1-y_1x'_1)(x_1y'_1+y_1x'_1)(x'_1y'_1-kx_1y_1)(x'_1y'_1+kx_1y_1).$$

Mais X_1 s'obtient en remplaçant dans X

$$\begin{aligned} &x \quad \text{par} \quad \alpha x_1 + \beta x'_1,\\ &x' \quad \text{par} \quad \gamma x_1 + \delta x'_1, \end{aligned}$$

et en divisant ensuite par $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. Ainsi l'on peut écrire

$$X = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 X_1,$$

et, en vertu de la propriété caractéristique des covariants, on trouve aussi

$$H_x = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 H_{x_1}.$$

On aura de même

$$\begin{aligned} Y &= (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2 Y_1,\\ H_y &= (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2 H_{y_1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour avoir $XH_y - YH_x$, il suffit de remplacer dans l'expression de $X_1 H_{y_1} - Y_1 H_{x_1}$, x_1, x'_1, y_1, y'_1 par leurs valeurs en x, x', y, y' tirées des relations

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta x'_1,\\ x' &= \gamma x_1 + \delta x'_1;\\ y &= \alpha' y_1 + \beta' y'_1,\\ y' &= \gamma' y_1 + \delta' y'_1, \end{aligned}$$

et de multiplier par $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2$. On aurait même pu supposer égaux à l'unité les déterminants des substitutions. Il est clair que l'expression ainsi obtenue se présente bien sous la forme d'un produit de quatre expressions, telles que

$$px'y' + qxy' + ryx' + sxy = p + qx + ry + sxy.$$

Ainsi nous pouvons énoncer la propriété suivante :

Lorsque deux formes biquadratiques X, Y *ont leurs invariants égaux, alors l'expression*

$$XH_y - YH_x$$

est décomposable en un produit de quatre expressions de cette forme

$$p + qx + ry + sxy,$$

et, en annulant ces facteurs, on obtient précisément les quatre intégrales *linéaires de l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

10. Il faut donc étudier cette décomposition de

$$XH_y - YH_x.$$

Rappelons d'abord les relations identiques

$$4H_x^3 - SH_xX^2 + TX^3 = -J_x^2,$$
$$4H_y^3 - SH_yY^2 + TY^3 = -J_y^2.$$

En désignant par u', u'', u''' les racines de l'équation

$$4u^3 - Su - T = 0,$$

on voit par là qu'on a

$$4(H_x + u'X)(H_x + u''X)(H_x + u'''X) = -J_x^2,$$
$$4(H_y + u'Y)(H_y + u''Y)(H_y + u'''Y) = -J_y^2.$$

Or, H_x et X n'ayant pas de facteur commun en général, les facteurs $H_x + u'X$, $H_y + u'Y$, ... sont nécessairement des carrés parfaits (Hermite, *loc. cit.*, p. 15, 16). Posons donc

$$(9) \qquad \begin{cases} H_x + u'X = \varphi_x'^2, \\ H_x + u''X = \varphi_x''^2, \\ H_x + u'''X = \varphi_x'''^2; \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} H_y + u'Y = \varphi_y'^2, \\ H_y + u''Y = \varphi_y''^2, \\ H_y + u'''Y = \varphi_y'''^2, \end{cases}$$

φ_x', φ_x'', φ_x''' seront des polynômes du second degré.

Nous cherchons à résoudre l'équation $XH_y - YH_x = 0$ par rapport à x en y regardant y comme connu. On a donc

$$\frac{X}{Y} = \frac{H_x}{H_y} = \frac{H_x + u'X}{H_y + u'Y} = \frac{H_x + u''X}{H_y + u''Y} = \frac{H_x + u'''X}{H_y + u'''Y} = M^2,$$

et, par conséquent,

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi'_x = M\varphi'_y, \\ \varphi''_x = M\varphi''_y, \\ \varphi'''_x = M\varphi'''_y. \end{cases}$$

Si nous ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par $(u''-u''')\varphi'_y$, $(u'''-u')\varphi''_y$, $(u'-u'')\varphi'''_y$, il vient, eu égard aux formules (10),

$$(u''-u''')\varphi'_x\varphi'_y + (u'''-u')\varphi''_x\varphi''_y + (u'-u'')\varphi'''_x\varphi'''_y = 0.$$

C'est là une équation du second degré qui doit admettre au moins une racine de $XH_y - YH_x = 0$; mais on constate que cette équation du second degré a ses deux racines égales. En effet, la différentielle

$$(u''-u''')\varphi'_y\,d\varphi'_x + (u'''-u')\varphi''_y\,d\varphi''_x + (u'-u'')\varphi'''_y\,d\varphi'''_x$$

se trouve égale à

$$\frac{1}{M}\left[(u''-u''')\varphi'_x\,d\varphi'_x + (u'''-u')\varphi''_x\,d\varphi''_x + (u'-u'')\varphi'''_x\,d\varphi'''_x\right]$$

ou à

$$\frac{1}{2M}\left[(u''-u''')\,d(H_x+u'X) + (u'''-u')\,d(H_x+u''X) + (u'-u'')\,d(H_x+u'''X)\right]$$

et s'annule par conséquent.

Nous obtenons donc ce résultat, qui donne la solution du problème proposé :

L'expression

$$(u''-u''')\varphi'_x\varphi'_y + (u'''-u')\varphi''_x\varphi''_y + (u'-u'')\varphi'''_x\varphi'''_y$$

est, sauf un facteur constant, le carré d'un des facteurs de $XH_y - YH_x$.

Sous une forme légèrement modifiée, nous pouvons dire qu'on a d'abord à calculer les fonctions ψ', ψ'', ψ''' par les relations

$$\begin{aligned} \psi'^2 &= (H_x + u'\,X)(H_y + u'\,Y), \\ \psi''^2 &= (H_x + u''\,X)(H_y + u''\,Y), \\ \psi'''^2 &= (H_x + u'''X)(H_y + u'''Y); \end{aligned}$$

ensuite on aura les carrés des facteurs linéaires de $XH_y - YH_x$ (sauf des facteurs constants) sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \pm(u''-u''')\psi' \pm (u'''-u')\psi'' \pm (u'-u'')\psi'''.$$

Il est clair qu'on obtiendra bien ainsi les quatre facteurs de $XH_y - YH_x$; car, en changeant à la fois les signes de ψ', ψ'', ψ''', on obtient la même intégrale linéaire de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Quelles sont maintenant les opérations irrationnelles qu'exige cette détermination des intégrales linéaires? D'abord on a à calculer les trois racines de l'équation cubique

$$4u^3 - Su - T = 0,$$

et ensuite on voit que la détermination de chacune des fonctions ψ', ψ'', ψ''' exige le calcul d'une racine carrée. Mais il est à noter qu'on peut multiplier l'expression (A) par un facteur constant quelconque. En multipliant donc par une des racines carrées à calculer, on voit que le calcul de *deux* racines carrées suffit pour obtenir, sous forme explicite, les intégrales linéaires. On peut remarquer que le coefficient de x^4y^4, dans l'expression de ψ'^2, est

$$(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u'),$$

et ainsi les fonctions ψ', ψ'', ψ''' sont connues après avoir obtenu les racines carrées

$$r' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u')},$$
$$r'' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u'')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u'')},$$
$$r''' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u''')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u''')}.$$

Mais le produit de ces trois racines carrées est égal, au signe près, à

$$\tfrac{1}{4}(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)(b_0^2b_3 - 3b_0b_1b_2 + 2b_1^3),$$

et ainsi r''' sera connu dès qu'on connaît r' et r''. Toutefois, il peut arriver que le terme avec x^4y^4 manque dans ψ'^2, ψ''^2 ou ψ'''^2, mais, en tout cas, il est clair, par ce qui précède, que le calcul de *deux* racines carrées et la connaissance des racines u', u'', u''' permettent d'obtenir les intégrales linéaires cherchées. Cette solution jouit donc, au point de vue algébrique, de toute la simplicité compatible avec la nature du problème proposé.

EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER. ÉQUATION D'EULER.

11. On peut donner une autre forme à la solution du problème et la faire dépendre *directement* d'une équation du *quatrième degré*. Mais, pour reconnaître l'intérêt qui s'attache à cette seconde forme, il est utile d'étudier d'abord le cas particulier où l'on a

$$a_i = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 4),$$

en sorte qu'il s'agit de la détermination des intégrales linéaires de l'équation d'Euler

$$(12)\qquad \frac{dx^2}{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = \frac{dy^2}{a_0y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}.$$

Il est clair que, dans ce cas particulier, on obtient ψ', ψ'', ψ''' sans avoir à extraire aucune racine carrée, et la connaissance de u', u'', u'' suffit.

Prenons pour ψ', ψ'', ψ''' les valeurs

$$\psi' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')x^2y^2 + \ldots,$$
$$\psi'' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u'')x^2y^2 + \ldots,$$
$$\psi''' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u''')x^2y^2 + \ldots.$$

On peut d'abord mettre ces valeurs de ψ', ψ'', ψ''' sous une autre forme.

Il est clair que ψ', par exemple, est symétrique en x et y, et de plus, si l'on pose $y = x$, ψ' doit se réduire à $H_x + u'X$. Or, si deux polynômes doublement quadratiques et symétriques en x et y coïncident entre eux pour $x = y$, ils peuvent différer seulement par un terme $\lambda(x-y)^2$. Il suffit de les écrire explicitement pour reconnaître l'exactitude de cette proposition, qui est due à M. Halphen.

Mais la seconde polaire de $H_x + u'X$

$$\frac{1}{12}\left[y^2\frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x'^2}\right]$$

est d'abord symétrique en x et y et se réduit aussi à $H_x + u'X$ pour $x = y$. On a, par conséquent,

$$\psi' = \frac{1}{12}\left[y^2\frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x\,\partial x'^2} + \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x'^2}\right] + \lambda'(x-y)^2.$$

Il reste à déterminer λ'. Cette détermination pourrait se faire déjà ici en calculant directement le coefficient de xy dans ψ' : on trouverait ainsi

$$\lambda' = 2\,\frac{A_2 A_4 - A_3^2}{A_4},$$

où l'on a supposé

$$H_x + u' X = A_0 x^4 + 4 A_1 x^3 + 6 A_2 x^2 + 4 A_3 x + A_4.$$

Mais il existe une expression beaucoup plus simple pour λ' qui s'offrira d'elle-même dans la suite. Nous nous bornerons donc à observer que λ' doit être une fonction rationnelle de u', et peut dès lors se mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en u',

$$\lambda' = 2\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma.$$

Posons, pour abréger,

$$12 h = y^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 H_x}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x'^2},$$
$$12 f = y^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2},$$

en sorte que h et f sont les secondes polaires de H_x et de X, on aura, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
\psi' &= h + u' f + (2\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma)(x-y)^2,\\
\psi'' &= h + u'' f + (2\alpha u''^2 + \beta u'' + \gamma)(x-y)^2,\\
\psi''' &= h + u''' f + (2\alpha u'''^2 + \beta u''' + \gamma)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Les carrés des facteurs de $XH_y - YH_x$ sont, en général,

$$\begin{aligned}
&(u''-u''')\psi' + (u'''-u')\psi'' + (u'-u'')\psi''',\\
+&(u''-u''')\psi' - (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi''',\\
-&(u''-u''')\psi' + (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi''',\\
-&(u''-u''')\psi' - (u'''-u')\psi'' + (u'-u'')\psi'''.
\end{aligned}$$

La première expression se réduit évidemment à

$$2\alpha(u'-u'')(u'-u''')(u''-u''')(x-y)^2,$$

et donne ainsi la substitution linéaire $x - y = 0$. Cette solution était évidente *a priori*.

La seconde expression devient égale à

$$-2\alpha(u'-u'')(u'-u''')(u''-u''')(x-y)^2 + 2(u''-u''')\psi'$$

ou bien, en divisant par $2(u''-u''')$,

$$\psi'-\alpha(u'-u'')(u'-u''')(x-y)^2,$$

mais on a évidemment

$$(u'-u'')(u'-u''')=\frac{d}{du}(u^3-\tfrac{1}{4}\mathrm{S}u-\tfrac{1}{4}\mathrm{T})_{u=u'}=3u'^2-\tfrac{1}{4}\mathrm{S},$$

en sorte qu'on obtient

$$h+u'f+(-\alpha u'^2+\beta u'+\gamma+\tfrac{1}{4}\alpha\mathrm{S})(x-y)^2.$$

Ici se présente maintenant le moyen de déterminer les valeurs de α, β, γ par cette condition que l'expression précédente doit être un carré parfait.

12. Considérons l'expression

$$\mathfrak{L}=h+u'f+\mathrm{C}(x-y)^2,$$

où C est une constante quelconque. On peut écrire

$$\mathfrak{L}=\mathrm{P}y^2+2\mathrm{Q}y+\mathrm{R}+\mathrm{C}(x-y)^2,$$

$$\mathrm{P}=\frac{1}{12}\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x+u'\mathrm{X})}{\partial x^2},$$

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{12}\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x+u'\mathrm{X})}{\partial x\,\partial x'},$$

$$\mathrm{R}=\frac{1}{12}\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x+u'\mathrm{X})}{\partial x'^2},$$

et le discriminant Δ de $\mathfrak{L}$ est

$$(\mathrm{Q}-\mathrm{C}x)^2-(\mathrm{P}+\mathrm{C})(\mathrm{R}+\mathrm{C}x^2),$$

c'est-à-dire

$$\Delta=\mathrm{Q}^2-\mathrm{PR}-(\mathrm{P}x^2+2\mathrm{Q}x+\mathrm{R})\mathrm{C}.$$

Or il est clair que

$$\mathrm{P}x^2+2\mathrm{Q}x+\mathrm{R}=\mathrm{H}_x+u'\mathrm{X}.$$

D'autre part, $\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2$ est le hessien de $\mathrm{H}_x+u'\mathrm{X}$ et l'on sait qu'en général le hessien de $a\mathrm{X}+b\mathrm{H}_x$ est égal à

$$(\tfrac{1}{6}ab\mathrm{S}+\tfrac{1}{4}b^2\mathrm{T})\mathrm{X}+(a^2-\tfrac{1}{12}b^2\mathrm{S})\mathrm{H}_x$$

(*voir* Hermite, *loc. cit.*, p. 33-35); donc

$$\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2=(\tfrac{1}{6}\mathrm{S}u'+\tfrac{1}{4}\mathrm{T})\mathrm{X}+(u'^2-\tfrac{1}{12}\mathrm{S})\mathrm{H}_x.$$

Mais $H_x + u'X$ est un carré : donc le hessien ne s'en distingue que par un facteur constant et

$$PR - Q^2 = (u'^2 - \tfrac{1}{12}S)(H_x + u'X).$$

Il vient donc

$$\Delta = (\tfrac{1}{12}S - u'^2 - C)(H_x + u'X).$$

On voit par là que l'expression $\mathfrak{L}$ n'est un carré parfait que pour la seule valeur

$$C = \tfrac{1}{12}S - u'^2,$$

et l'on doit avoir

$$-\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma + \tfrac{1}{4}\alpha S = -u'^2 + \tfrac{1}{12}S,$$

donc

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\tfrac{1}{6}S,$$
$$\lambda' = 2u'^2 - \tfrac{1}{6}S.$$

13. Voici un moyen plus direct pour déterminer λ'. Écrivons λ' au lieu de C, en sorte que

$$\psi' = (P + \lambda')y^2 + 2(Q - \lambda' x)y + R + \lambda' x^2,$$
$$\Delta = (\tfrac{1}{12}S - u'^2 - \lambda')\varphi_x'^2.$$

Mais nous savons que $\psi' = \varphi'_x \varphi'_y$: donc nécessairement

$$P + \lambda' = \alpha\varphi'_x, \qquad Q - \lambda' x = \beta\varphi'_x, \qquad R + \lambda' x^2 = \gamma\varphi'_x,$$

d'où

$$\varphi'_y = \alpha y^2 + 2\beta y + \gamma,$$
$$\Delta = (\beta^2 - \alpha\gamma)\varphi_x'^2.$$

La comparaison des deux valeurs de Δ donne

$$\tfrac{1}{12}S - u'^2 - \lambda' = \beta^2 - \alpha\gamma;$$

mais on sait que

$$\beta^2 - \alpha\gamma = -(u' - u'')(u' - u''') = -3u'^2 + \tfrac{1}{4}S \quad (^1),$$

ce qui fournit de nouveau la valeur de λ'.

---

(1) Cette valeur de l'invariant de φ'_x se trouve sous une forme légèrement différente dans le Mémoire de M. Hermite; *voir*, p. 13, la valeur de Δ et, p. 15, la relation entre φ et ψ. (*Voir* Clebsch, *Binäre Formen*, p. 153.)

14. Voici donc le résultat final auquel nous arrivons :

Les intégrales linéaires de l'équation différentielle

$$\frac{dx^2}{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4} = \frac{dy^2}{a_0 y^4 + 4a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_3 y + a_4}$$

sont d'abord $x - y = 0$, *et les trois autres s'obtiennent en posant*

$$h + uf + (\tfrac{1}{12}S - u^2)(x-y)^2 = 0,$$

où il faut déterminer u *par l'équation cubique*

$$4u^3 - Su - T = 0.$$

Sauf un facteur constant, le premier membre est alors un carré exact, et la relation entre x *et* y *se réduit donc à cette forme*

$$p + q(x+y) + rxy = 0.$$

On peut envisager ce résultat sous un autre point de vue. Quelle est, en effet, l'intégrale générale de l'équation différentielle (12). Cette intégrale a été obtenue déjà par Lagrange (*Œuvres*, t. II, p. 18); mais M. Cayley l'a mise sous cette forme élégante [1]

$$h + Cf + (\tfrac{1}{12}S - C^2)(x-y)^2 = 0, \tag{13}$$

C étant la constante arbitraire.

Cette expression se déduit de celle que nous venons d'écrire en remplaçant u par C. En général, le premier membre n'est pas un carré parfait : ainsi à une valeur donnée de x répondent deux valeurs de y, l'intégrale n'est pas linéaire. Mais, si l'on pose $C = u', u'', u'''$, on trouve trois intégrales linéaires; la quatrième, $x - y = 0$, répond à $C = \infty$.

15. En partant de cette intégrale générale, on aurait pu trouver notre détermination des intégrales linéaires d'une manière beaucoup plus simple. En effet, cette intégrale générale peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &y^2(\mathrm{a}x^2 + 2\mathrm{h}x + \mathrm{g}) \\ &+ 2y\,(\mathrm{h}x^2 + 2\mathrm{b}x + \mathrm{f}) \\ &\quad + (\mathrm{g}x^2 + 2\mathrm{f}\,x + \mathrm{c}) = 0, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

---

[1] *Voir* aussi LAGUERRE, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 35.

où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} &= a_0 a_2 - a_1^2 + \mathrm{C} a_0,\\
\mathrm{b} &= \tfrac{1}{6}(a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) + \mathrm{C} a_2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12}\mathrm{S} - \mathrm{C}^2),\\
\mathrm{c} &= a_2 a_4 - a_3^2 + \mathrm{C} a_4,\\
\mathrm{f} &= \tfrac{1}{2}(a_1 a_4 - a_2 a_3) + \mathrm{C} a_3,\\
\mathrm{g} &= \tfrac{1}{6}(a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) + \mathrm{C} a_2 + \tfrac{1}{12}\mathrm{S} - \mathrm{C}^2,\\
\mathrm{h} &= \tfrac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2) + \mathrm{C} a_1.
\end{aligned}
$$

C'est une relation doublement quadratique et symétrique en x et y, que l'on peut écrire sous les deux formes

$$o = \mathrm{A}_x y^2 + 2\mathrm{B}_x y + \mathrm{C}_x = \mathrm{A}_y x^2 + 2\mathrm{B}_y x + \mathrm{C}_y.$$

Euler déjà a observé qu'on en tire

$$\frac{dx^2}{\mathrm{B}_x^2 - \mathrm{A}_x \mathrm{C}_x} = \frac{dy^2}{\mathrm{B}_y^2 - \mathrm{A}_y \mathrm{C}_y};$$

mais, comme notre relation est l'intégrale générale de $\dfrac{dx^2}{\mathrm{X}} = \dfrac{dy^2}{\mathrm{Y}}$, on doit avoir

$$\mathrm{B}_x^2 - \mathrm{A}_x \mathrm{C}_x = \Theta \mathrm{X}$$

et de même

$$\mathrm{B}_y^2 - \mathrm{A}_y \mathrm{C}_y = \Theta \mathrm{Y}.$$

C'est ce qu'on vérifie facilement, et la valeur de Θ est

$$\frac{h^2 - \mathrm{ag}}{a_0} = \Theta = \mathrm{C}^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{SC} - \tfrac{1}{4}\mathrm{T}.$$

On a les relations identiques

$$
\begin{aligned}
a_0 \Theta &= \mathrm{h}^2 - \mathrm{ag},\\
4 a_1 \Theta &= 4\mathrm{bh} - 2\mathrm{af} - 2\mathrm{gh},\\
6 a_2 \Theta &= 4\mathrm{b}^2 - 2\mathrm{hf} - \mathrm{ac} - \mathrm{g}^2,\\
4 a_3 \Theta &= 4\mathrm{bf} - 2\mathrm{ch} - 2\mathrm{fg},\\
a_4 \Theta &= \mathrm{f}^2 - \mathrm{cg};
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire facilement cette conclusion que, pour $\Theta = o$,

$$\mathrm{A}_x y^2 + 2\mathrm{B}_x y + \mathrm{C}_x$$

est un carré parfait, et l'intégrale générale se réduit alors à une intégrale linéaire qu'on peut écrire ainsi

$$\mathrm{f} + \mathrm{g}(x+y) + \mathrm{h}xy = 0.$$

16. On a retrouvé ainsi, d'une manière très simple, le résultat de tout à l'heure; mais, si cette méthode est simple, elle est, par contre, moins générale que notre première méthode; car on ne saurait l'appliquer dans le cas général, l'intégrale générale de

$$\frac{dx^2}{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4} = \frac{dy^2}{b_0y^4+4b_1y^3+6b_2y^2+4b_3y+b_4} \tag{15}$$

n'étant pas connue sous une forme analogue à (13). Cependant il y a un second cas qu'on peut traiter ici en s'appuyant sur une remarque de M. Cayley.

Désignons par $\mathfrak{M}$ le premier membre de la formule (13) et remarquons que $\mathfrak{M}$ est aussi quadratique en C. En considérant C comme variable aussi, on aura

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial \mathrm{C}}d\mathrm{C} = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu,

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x} = \pm\sqrt{4\Theta\mathbf{Y}},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} = \pm\sqrt{4\Theta\mathbf{X}},$$

et, comme l'a remarqué M. Cayley,

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial \mathrm{C}} = \pm\sqrt{\mathbf{XY}};$$

donc

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{\mathbf{X}}} \pm \frac{dy}{\sqrt{\mathbf{Y}}} \pm \frac{d\mathrm{C}}{\sqrt{4\Theta}} = 0.$$

En considérant donc C comme variable, y comme une constante arbitraire, la relation (13) ou (14) est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathbf{X}}} = \pm\frac{d\mathrm{C}}{\sqrt{4\mathrm{C}^3-\mathrm{SC}-\mathrm{T}}},$$

et, pour avoir les intégrales linéaires de cette équation, il suffit de résoudre l'équation $\mathbf{Y} = 0$ ou, ce qui est la même chose, l'équation $\mathrm{X} = 0$. Ce résultat était à prévoir, car la connaissance des racines de $X = 0$ entraîne celle de l'équation $4C^3 - SC - T = 0$. En déterminant y par l'équation $Y = 0$, $\mathfrak{M}$ deviendra un carré parfait.

17. Revenons maintenant au cas général, la détermination des intégrales linéaires de (15). D'après l'examen des cas particuliers que nous venons de faire, il est à prévoir qu'il doit exister une liaison intime entre cette détermination et l'intégration générale de cette équation; mais on ne connaît pas cette intégrale générale sous une forme analogue à (14) et il nous paraît assez difficile de l'obtenir sous cette forme.

Au contraire, la méthode inverse se présente ici.

Ayant obtenu la détermination des intégrales linéaires, si nous faisons dépendre cette solution directement d'une équation du quatrième degré, n'obtiendrons-nous pas en même temps l'intégrale générale sous une forme analogue à (14)?

C'est là une question qu'il nous reste à traiter.

Il faut le remarquer, on peut faire dépendre la détermination des intégrales linéaires d'une équation biquadratique, mais cela est possible d'une infinité de manières. Parmi les équations biquadratiques desquelles dépend ainsi la solution de notre problème, existe-t-il une classe particulièrement simple?

Ce sont là les questions qui se présentent : les diverses équations biquadratiques sont liées par des transformations de *Tschirnhausen*.