SUR LA

TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. HERMITE.

Extrait d'une Lettre adressée à M. MATYAS LERCH, dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême*, 7e série, t. II; 1888.

En modifiant un peu le procédé ordinaire de réduction des intégrales hyperelliptiques, j'ai considéré, dans mes Leçons (1), les expressions de la forme suivante

$$\int \frac{G\,dx}{A^{a+1}\sqrt{R}},$$

où G, A et R sont des polynômes entiers en x, A et R n'ayant que des facteurs simples et étant supposés premiers entre eux. J'ai montré qu'elles se ramènent facilement à un terme algébrique et à une expression semblable où l'exposant a est diminué d'une unité. Dans le cas, par exemple, de $a = 1$ que je vais employer, on détermine deux polynômes P et Q par la condition

$$G = AP - A'RQ,$$

et, en posant

$$Q_1 = P - RQ' - \tfrac{1}{2}R'Q,$$

on a cette égalité, qui se vérifie immédiatement par la différentiation,

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}}.$$

Je vais l'appliquer à la recherche de l'expression de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

(1) *Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris,* 3e édit., p. 28.

où $y = \frac{U}{V}$ est la formule de transformation de Jacobi qui satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Je remarque d'abord que l'on peut écrire

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 \, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \int \frac{\lambda^2 U^2 \, dx}{V^2 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

de sorte qu'en prenant

$$R = (1-x^2)(1-k^2x^2), \qquad G = \lambda^2 U^2, \qquad A = V,$$

la relation précédente nous donne

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 \, dx}{V^2 \sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1 \, dx}{V\sqrt{R}}.$$

Cela étant, je dis que Q_1 est divisible par V, c'est-à-dire que le second membre ne contient pas d'intégrales de troisième espèce qui admettent des infinis logarithmiques. M. Fuch obtient *a priori,* et sans calcul, ce résultat important que j'établirai ensuite algébriquement de la manière suivante. L'illustre géomètre m'a fait observer que, l'intégrale

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 \, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

n'ayant point d'infini logarithmique, il en est de même nécessairement de la transformée en x obtenue en faisant $y = \frac{U}{V}$, puisque la nouvelle variable est une fonction algébrique de y. Il ne nous reste plus, par conséquent, qu'à obtenir le polynôme Q et le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$. Pour cela, j'emploie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{R}};$$

après avoir substitué la valeur $y = \frac{U}{V}$, j'élève au carré, ce qui donne l'égalité

$$M^2 R (U'V - UV')^2 = V^4 - (1+\lambda^2) U^2 V^2 + \lambda^2 U^4,$$

ou, sous une autre forme,

$$U^2(M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2) = V^4 - (1+\lambda^2)U^2V^2 - M^2R(U'^2V^2 - 2UU'VV').$$

On montre ainsi que $M^2RV'^2 - \lambda^2U^2$ est divisible par V qui, étant premier avec U, et par conséquent avec U^2, entre dans le second membre comme facteur. Soit donc, en désignant par H un polynôme entier,

$$M^2RV'^2 - \lambda^2U^2 = VH,$$

nous aurons

$$\lambda^2U^2 = -VH + M^2RV'^2;$$

or la relation par laquelle se déterminent les quantités désignées plus haut par P et Q, étant maintenant

$$\lambda^2U^2 = VP - V'RQ,$$

on voit immédiatement qu'on peut prendre $P = -H$ et $Q = -M^2V'$.

Soit ensuite S le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$ que nous avons encore à obtenir, et qui donne l'égalité

$$\int \frac{\lambda^2U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = -\frac{M^2V'\sqrt{R}}{V} + \int \frac{S\,dx}{\sqrt{R}}.$$

On trouve, par la différentiation, l'expression suivante

$$S = \frac{\lambda^2U^2}{V^2} + M^2\sqrt{R}D_x\left(\frac{V'\sqrt{R}}{V}\right),$$

et il en résulte facilement que S est un simple binôme gx^2+h.

Je cherche, en effet, la limite de $\frac{S}{x^2}$ pour x infiniment grand; en faisant, avec Jacobi,

$$U = \frac{x}{M}[1 + A'x^2 + A''x^4 + \ldots + A^{(m)}x^{2m}],$$

$$V = 1 + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{(m)}x^{2m},$$

de sorte que l'ordre de la transformation soit $n = 2m+1$, on obtient la quantité finie

$$\left[\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}}\right]^2 + 2mk^2M^2,$$

qui représente, par conséquent, la constante g.

Cette valeur se simplifie au moyen des relations établies à la fin du § XII des *Fundamenta*. Si l'on emploie les suivantes

$$\frac{A^{(m)}}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\,k^m, \qquad \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\,\frac{B^{(m)}}{k^m},$$

on en tire aisément

$$\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}} = kM,$$

ce qui donne

$$g = k^2M^2 + 2mk^2M^2 \quad \text{ou bien} \quad g = nk^2M^2.$$

En supposant ensuite $x = 0$, dans l'expression de S, il vient $h = 2B'M^2$, et nous avons, en conséquence, le résultat important contenu dans la relation

$$\int \frac{\lambda^2 U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = -\frac{M^2V'\sqrt{R}}{V} + M^2\int\frac{(nk^2x^2+2B')\,dx}{\sqrt{R}},$$

ou encore, si l'on revient à la variable y, après avoir divisé les deux membres par M^2,

$$\frac{1}{M}\int\frac{\lambda^2y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = -\frac{V'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{V} + \int\frac{(nk^2x^2+2B')\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

C'est la relation qu'a donnée Jacobi, en remplaçant l'intégrale de seconde espèce de Legendre par celle de M. Weierstrass.

Je reviens maintenant au polynôme Q_1, afin d'établir, par une voie purement algébrique, qu'il est divisible par V. A cet effet, je reprends la formule générale de réduction, dans laquelle R est un polynôme de degré quelconque,

$$\int\frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int\frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}},$$

en me proposant d'exprimer, au moyen de G, A et R, la condition pour que Q_1 soit divisible par A. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, on a

$$Q_1 = P - RQ' - \tfrac{1}{2}R'Q,$$

et, par conséquent, si l'on fait $Q_1 = AS$, il vient

$$P = AS + RQ' + \tfrac{1}{2}R'Q.$$

Cela étant, en différentiant l'équation

$$G = AP - A'RQ,$$

nous obtenons

$$G' = AP' + A'(P - RQ' - R'Q) - A''RQ,$$

puis, au moyen de la valeur de P,

$$G' = A(P' + A'S) - Q(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A').$$

Prenons maintenant, suivant le module A, les valeurs de G et G'; on aura

$$G \equiv - A'RQ,$$
$$G' \equiv - Q(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A'),$$

et l'on en conclut immédiatement que le polynôme

$$RA'G' - G(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A')$$

est divisible par A; c'est le résultat auquel il s'agissait de parvenir et que je vais appliquer en supposant $R = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$, $G = U^2$ et $A = V$.

Nous obtenons alors l'expression suivante

$$U[2RU'V' - U(RV'' + \tfrac{1}{2}R'V')],$$

ou bien, en multipliant par 2,

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')],$$

et il s'agit de prouver qu'elle est divisible par V. C'est ce qu'on établit au moyen de l'équation

$$M^2R(U'V - UV')^2 = V^4 - (1 + \lambda^2)U^2V^2 + \lambda^2U^4$$

et de sa dérivée, dans lesquelles je ferai, pour un moment, $U'V - UV' = W$.

On a ainsi

$$M^2RW^2 = V^4 - (1+\lambda^2)U^2V^2 + \lambda^2U^4,$$
$$M^2W(2RW' + R'W) = 4V^3V' - 2(1+\lambda^2)UV(U'V + UV') + 4\lambda^2U^3U'.$$

Multiplions la première par $4U'$, la seconde par U, et retranchons membre à membre, après avoir supprimé le facteur W, nous aurons

$$M^2[4RU'W - U(2RW' + R'W)] = 4V^3 - 2(1+\lambda^2)U^2V.$$

Cela étant, on obtient facilement, au moyen de la valeur de W,

$$\begin{aligned}&4RU'W - U(2RW' + R'W)\\ &\quad = V[4RU'^2 - U(2RU'' + R'U')] - U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')];\end{aligned}$$

le premier membre de l'équation contenant en facteur V, il est donc démontré que la quantité considérée

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')]$$

est elle-même divisible par V, comme je l'ai annoncé. Je remarquerai en outre qu'on peut joindre les égalités suivantes à celles qui viennent d'être employées :

$$M^2[4RV'W - V(2RW' + R'W)] = 2(1+\lambda^2)UV^2 - 4\lambda^2U^3,$$

$$\begin{aligned}&4RV'W - V(2RW' + R'W)\\ &\quad = V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')] - U[4RV'^2 - V(2RV'' + R'V')];\end{aligned}$$

elles montrent que l'expression

$$V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')]$$

est divisible par U, et comme U et V sont premiers entre eux, on en conclut ces relations, qu'il ne m'a pas paru inutile d'indiquer :

$$4RU'V' - U(2RV'' + R'V') \equiv 0 \pmod{V},$$
$$4RU'V' - V(2RU'' + R'U') \equiv 0 \pmod{U},$$