RECHERCHES COMPLÉMENTAIRES

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. B. BAILLAUD.

1. Nous avons donné, dans un Mémoire inséré au Tome II des *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, pour le développement de la fonction perturbatrice, deux formules distinctes applicables, l'une au cas où les inclinaisons sont faibles, l'autre au cas d'inclinaisons quelconques. La seconde formule est le résultat de la combinaison de la méthode qui nous a conduit à la première avec les principes magistralement développés par M. Tisserand dans deux Mémoires insérés dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*.

Ayant entrepris d'appliquer la seconde formule à la théorie de Pallas, nous avons dû, avant d'effectuer le développement, rechercher *a priori* le nombre des termes de chaque ordre. Le résultat de ces études a été publié dans un court Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie des Sciences de Toulouse pour 1886. Il nous a paru depuis qu'il serait utile de généraliser les problèmes principaux qui se présentent à cet égard, et en particulier de chercher des formules faisant aussi bien connaître le nombre des termes que fournirait notre premier développement. Ces problèmes sont l'objet de la première Partie du présent travail. Leur étude nous a conduit à diverses formules hypergéométriques satisfaisant à une certaine équation récurrente, qui paraissent offrir quelque intérêt en elles-mêmes. L'application des résultats généraux à nos deux développements de la fonction perturbatrice montre bien nettement en quelle mesure chacun d'eux est praticable.

Dans la seconde Partie, nous rectifions une affirmation inexacte contenue dans notre premier Mémoire. Nous avions dit que la transformation fondamentale, qui nous permet, dans notre second développement, de réduire notablement le nombre des termes, pourrait, dans certains cas, cesser d'être applicable. Il n'en est rien. Nous montrons ci-après que cette transformation est toujours possible dans le système solaire.

PREMIÈRE PARTIE.

2. Désignant par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ des nombres entiers et positifs satisfaisant à la relation

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p+2(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_q)=m,$$

par $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$ des nombres entiers, positifs ou négatifs, respectivement de même parité que les précédents, et ne les dépassant pas en valeur absolue, nous nous proposons de trouver :

1° Le nombre A_m des groupes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$;

2° Le nombre B_m des groupes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$;

3° Le nombre C_m des groupes $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$.

Nous aurons besoin, dans la solution de ces problèmes, d'une transformation de la fonction hypergéométrique, due à Euler, que nous allons d'abord étudier en raison de ce que le troisième élément est entier et négatif.

3. Cette transformation est la suivante :

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Nous allons rechercher dans quelles circonstances elle est applicable au cas où γ est entier et négatif.

L'un des nombres α ou β doit être entier et négatif, sans quoi les deux fonctions n'auraient aucun sens. Si α n'était pas entier et négatif, la première fonction serait entière en x, la seconde ne le serait pas; les deux fonctions ne seraient donc pas identiques.

Soient donc

$$\gamma=-\gamma', \qquad \alpha=-\alpha'.$$

Si α' était moindre que γ', β devait être entier et négatif pour que la première fonction eût un sens, et, si l'on pose

$$\beta = -\beta',$$

β' devrait être moindre que γ'. Dans ces conditions, on reconnaît immédiatement que le second membre de l'identité (1) s'annulerait pour $x = 1$, et que cela n'aurait pas lieu pour le premier; les deux membres ne seraient donc pas identiques.

Soit maintenant

$$\alpha' < \gamma'.$$

Le second membre est entier en x; si on l'ordonne suivant les puissances de x, le coefficient de x^k est

$$\frac{\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k+1)}{1.2\ldots k} \mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1), \tag{2}$$

k ne dépassant pas α' et étant, par suite, moindre que γ', cette fonction a toujours un sens.

Or la dérivée d'ordre k de

$$(-1)^k x^{-(\gamma'-k+1)} x^{\gamma'+\beta}$$

pour $x = 1$ est égale à

$$\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-k+1)\, \mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1)$$

et à

$$(-1)^k (k+\beta-1)(k+\beta-2)\ldots\beta.$$

Donc

$$\mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1) = (-1)^k \frac{(k+\beta-1)(k+\beta-2)\ldots\beta}{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-k+1)};$$

d'où il suit que le coefficient (2) est le même que le coefficient de x^k dans le premier membre de (1). Les deux fonctions sont donc identiques, quels que soient β et x.

Si α' était égal à γ', la fonction $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aurait besoin d'être précisée. Que si l'on convenait de la limiter au terme en $x^{\alpha'}$, les conclusions précédentes s'appliqueraient encore. Ce sera le cas dans les applications que nous ferons plus loin; mais, au point de vue purement algébrique, cette convention est arbitraire.

4. Ce lemme nous servira à transformer très simplement les expressions que nous allons obtenir pour solutions des problèmes (1) et (2). Ces solu-

tions, ainsi que celle du problème (3), résultent sans effort de la considération suivante due à Euler, et sur laquelle mon attention a été attirée par M. Jules Tannery.

Le nombre C_m est le coefficient de x^m dans le produit

$$(1+x+x^2+\ldots)^p(1+x^2+x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q}(1+x)^q}$$

en une série procédant suivant la puissance de x.

En observant qu'à une valeur β_h correspondent $\beta+1$ valeurs de β'_h, on voit de même que le nombre B_m est le coefficient de x^m dans le produit

$$(1+2x+3x^2+\ldots)^p(1+2x^2+3x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)^{2p+2q}(1+x)^{2q}},$$

de sorte que la solution du second problème s'obtiendra en remplaçant p par $2p$ et q par $2q$ dans le premier.

Enfin la solution du troisième problème est le coefficient de x^m dans

$$(1+2x+2x^2+\ldots)^p(1+2x^2+2x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^p\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^q,$$

développement qui a des formes diverses suivant que p est plus grand que q, égal ou inférieur à q, mais dont la recherche se ramène dans tous les cas aux précédents.

Nous nous occuperons d'abord du premier problème pour en donner la solution complète, d'où la solution des deux suivants résultera immédiatement.

5. Soit A_m le nombre cherché. On forme aisément une équation récurrente à laquelle A_m doit satisfaire. Si, en effet, on pose

$$y(1-x)^{p+q}(1+x)^q=1,$$

d'où

$$y'(1-x^2)-y[p+(p+2q)x]=0,$$

on obtient, en différentiant $m-1$ fois et faisant $x=0$,

$$y_0^{(m)}-py_0^{(m-1)}-(m-1)(m+p+2q-2)y_0^{m-2}=0.$$

Or

$$y_0^m=A_m.1.2.3\ldots m;$$

d'où

$$mA_m-pA_{m-1}-(m+p+2q-2)A_{m-2}=0. \tag{3}$$

Si l'on remplace m par $m+1$ et par $m+2$, et qu'on élimine entre les trois équations A_{m-1} et A_{m+1}, on trouve une équation qui peut s'écrire des quatre manières suivantes :

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&(m+1)(m+2)A_{m+2}\\
&\quad-[m(m+p+2q-1)+(m+1)(m+p+2q)]A_m\\
&\qquad+(m+p+2q-1)(m+p+2q-2)A_{m-2}=p^2A_m,\\
&(m+1)(m+2)A_{m+2}\\
&\quad-[(m-1)(m+p+2q-1)+(m+2)(m+p+2q)]A_m\\
&\qquad+(m+p+2q-1)(m+p+2q-2)A_{m-2}=(p^2-1^2)A_m,\\
&(m+1)(m+2)A_{m+2}\\
&\quad-[(m+2)(m+p+2q+1)+(m-1)(m+p+2q-2)]A_m\\
&\qquad+(m+p+2q-1)(m+p+2q-2)A_{m-2}=(p^2-2^2)A_m,\\
&(m+1)(m+2)A_{m+2}\\
&\quad-[(m+1)(m+p+2q+1)+m(m+p+2q-2)]A_m\\
&\qquad+(m+p+2q-1)(m+p+2q-2)A_{m-2}=(p^2-1^2)A_m.
\end{aligned}\right.$$

Ces quatre formules nous serviront à démontrer l'exactitude de l'expression qui représente la solution de notre problème; pour la recherche de ce résultat, il est plus simple de procéder comme il suit.

6. La décomposition en fractions simples permet d'écrire la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q}(1+x)^q}$$

sous la forme

$$\sum\frac{M_h}{(1-x)^h}+\sum\frac{N_k}{(1+x)^k}.$$

En appliquant ensuite la formule du binôme à chacun des termes, on trouve, pour le coefficient de x^m, l'expression

$$A_m = \frac{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+2q-2)}{1.2\ldots(q-1)} \frac{1}{2^{p+2q-1}} P_m,$$

où

$$\begin{aligned} P_m = & F[m+1, -(p+q-1), -(p+2q-2), 2] \\ & \pm F[m+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2], \end{aligned}$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désignant comme ci-dessus la fonction hypergéométrique de Gauss. Le signe supérieur convient au cas où m est pair, le signe inférieur au cas où m est impair. Nous allons appliquer à P_m les résultats obtenus au n° 3.

7. D'après ce numéro, si l'on remplace, dans les deux termes de P_m, m par un nombre entier et négatif μ dont la valeur absolue ne dépasse pas $p+2q-1$, on a

$$\begin{aligned} & F[\mu+1, -(p+q-1), -(p+2q-2), 2] \\ & \quad = (-1)^{\mu+1} F[\mu+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si μ est pair, les deux fonctions sont égales et de signes contraires, et P_m est nul si m est pair; si, au contraire, μ est impair, les deux fonctions sont égales, et P_m est nul si m est impair. En outre, dans le cas où m est pair, P_m est le double de chacune des fonctions pour les valeurs impaires de μ, et, si m est impair, P_m, pour les valeurs paires de μ, est double de la première ou égal au double de la seconde changée de signe; de sorte que, si m est pair, on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{ll} P_m = (m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)Q_m & \text{si } p \text{ est pair} \\ \quad \text{ou} & \\ P_m = (m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)Q_m & \text{si } p \text{ est impair,} \end{array} \right.$$

Q_m étant un polynôme du degré $\frac{p}{2}$ dans le premier cas, du degré $\frac{p-1}{2}$ dans le second cas; et, pour les valeurs suivantes de m

$$\begin{array}{ll} -1,\quad -3,\quad -5,\quad \ldots,\quad -(p+2q-1) & (p \text{ pair}) \\ \text{ou} & \\ -1,\quad -3,\quad -5,\quad \ldots,\quad -(p+2q-2) & (p \text{ impair}), \end{array}$$

P_m est égal à deux fois la fonction

$$(6)\qquad \Phi = F[m+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2].$$

Si, au contraire, m est impair,

$$(7)\quad \begin{cases} P_m = (m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)Q_m & (p \text{ pair}),\\ P_m = (m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)Q_m & (p \text{ impair}), \end{cases}$$

Q_m est du degré $\frac{p-2}{2}$ dans le premier cas, du degré $\frac{p-1}{2}$ dans le second, et, pour les valeurs suivantes de m

$$-2,\quad -4,\quad \ldots,\quad -(p+2q-2)\qquad (p \text{ pair}),$$
$$-2,\quad -4,\quad \ldots,\quad -(p+2q-1)\qquad (p \text{ impair}),$$

— P_m est égal à deux fois la fonction Φ.

Pour les valeurs les plus simples de p, ces considérations donnent sans effort l'expression de P_m. Nous ferons successivement $p=0$, $p=1$, $p=2$, $p=3$. Les résultats obtenus dans ces deux derniers cas nous mettront sur la voie du procédé qui donne le résultat dans le cas général.

8 (A). Soient $p=0$ et m pair. Q_m est une constante; si l'on fait $m=-1$, Φ est égale à 1, donc P_m doit être égal à 2; il s'ensuit que

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q-2)}{1.3\ldots 2q-3},$$

d'où

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q-2)}{2.4\ldots 2q-2};$$

si m est impair, P_m est nul.

(B). Soit $p=1$, Q_m est encore une constante. Il s'ensuit que, si m est pair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{1.3\ldots 2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{2.4\ldots 2q},$$

et, si m est impair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q-1)}{1.3\ldots 2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q-1)}{2.4\ldots 2q},$$

de sorte que, dans le cas de $p=1$, A_m est le même pour une valeur paire de m et pour le nombre impair immédiatement supérieur.

(C). Soit $p = 2$. Si m est pair, Q_m est du premier degré; la considération des valeurs que prend P_m pour $m = -1$ et pour $m = -3$ fait connaître Q_m. On trouve ainsi

$$P_m = \frac{2}{q} \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{1.3\ldots(2q-1)} (q+m+1),$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)(q+m+1)}{4.6\ldots(2q+2)}.$$

Si m est impair, Q_m est une constante; on trouve

$$P_m = \frac{2}{q} \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{1.3\ldots2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{4.6\ldots(2q+2)}.$$

L'introduction du facteur $q+m+1$ qui, dans le cas de m pair, vient prendre place exactement au milieu des autres facteurs du numérateur de P_m, résulte d'une relation simple entre des séries hypergéométriques; en effet, on a, pour $p = 2$ et $m = -(q+1)$,

$$P_m = F[-q, -(q+1), -2q, 2] + F[-q, -(q-1), -2q, 2].$$

Or la relation connue

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \gamma(1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma, x) = (\gamma - \alpha - \beta - 1) x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

donne ici

$$P_m = 0.$$

Mais ces considérations ne peuvent être généralisées.

(D). Soit $p = 3$. Si m est pair, Q_m est du premier degré, et l'on trouve par la méthode générale

$$P_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q+2)}{1.3.5\ldots(2q+1)} \frac{(4m+4+2q)}{q},$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q+2)}{2.4\ldots(2q+4)} (2q+4m+4).$$

Si m est impair, Q_m est encore du premier degré et l'on trouve

$$P_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{1.3\ldots(2q+1)} \frac{1}{q} (6q+4m+8),$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{2.4\ldots(2q+4)} (6q+4m+8).$$

L'examen attentif des valeurs de Q_m pour $p=2$ et $p=3$ suggère pour le cas général la marche suivante.

9. Si m est pair, on posera

$$Q_m = \alpha + \beta(m+1) + \gamma(m+1)(m+3) + \delta(m+1)(m+3)(m+5) + \ldots,$$

et si m est impair

$$Q_m = \alpha + \beta(m+2) + \gamma(m+2)(m+4) + \delta(m+2)(m+4)(m+6) + \ldots.$$

Les considérations indiquées au n° 7 et appliquées au n° 8 donnent successivement les valeurs de α, β, γ, ... On trouve ainsi les résultats suivants :

1° m pair, p pair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)}{1.3\ldots(p+2q-3)}\,Q_m^{(1)},$$

où

$$Q_m^{(1)} = 1 + \frac{p^2}{p+2q-2}\,\frac{m+1}{1.2} + \frac{p^2(p^2-2^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)}\,\frac{(m+1)(m+3)}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{p^2(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)(p+2q-6)}\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

2° m pair, p impair

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)}{1.3\ldots(p+2q-2)}\,Q_m^{(2)},$$

où

$$Q_m^{(2)} = 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{m+1}{1.2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{(m+1)(m+3)}{1.2.3.4} + \ldots.$$

3° m impair, p pair,

$$P_m = \frac{2p}{p+2q-2}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)}{1.3\ldots(p+2q-3)}\,Q_m^{(3)},$$

où

$$Q_m^{(3)} = 1 + \frac{(m+2)(p^2-2^2)}{2.3(p+2q-4)} + \frac{(m+2)(m+4)(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{2.3.4.5(p+2q-4)(p+2q-6)} + \ldots.$$

4° m impair, p impair,

$$P_m = \frac{2p}{p+2q-2}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)}{1.3\ldots(p+2q-4)}\,Q_m^{(4)},$$

où

$$Q_m^{(4)} = 1 + \frac{(m+2)(p^2-1^2)}{2.3(p+2q-3)} + \frac{(m+2)(m+4)(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4.5(p+2q-3)(p+2q-5)} + \ldots.$$

10. On conclut de là, pour A_m, les valeurs suivantes :

$$A_m^1 = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^1,$$

$$A_m^2 = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q-1)(p+2q+1)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^{(2)},$$

$$A_m^3 = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^3 \frac{p}{(p+2q-2)},$$

$$A_m^4 = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)p}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q-1)(p+2q+1)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^4.$$

11. La démonstration complète de ces formules repose sur l'équation récurrente (3), ou sur les équations (4) auxquelles elles satisfont.

La vérification de l'équation (3) est immédiate; une simple soustraction montre que

$$m A_m - (m+p+2q-2) A_{m-2} = p A_{m-1},$$

si m et p sont pairs.

Si m est pair et p est impair, on a

$$m A_m^2 - (m+p+2q-2) A_{m-2}^2 = \frac{1}{N'}(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-3)$$
$$\times [(m+p+2q-1) Q_m^2 - (m+p+2q-2) Q_{m-2}^2].$$

Ce dernier crochet est

$$\sum \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots(p^2-\overline{2i-1}^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)\ldots(p+2q-2i-1)} \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-3)}{1.2.3\ldots 2i}$$
$$\times [(m+2i-1)(m+p+2q-1) - (m-1)(m+p+2q-2)].$$

La dernière parenthèse est

$$(2i+1)(m+2i-1) + 2i(p+2q-2i-1),$$

en dédoublant le terme et groupant la seconde partie de ce terme avec la première du précédent correspondant à $i-1$, on trouve

$$\frac{(p^2-1^2)\ldots(p^2-\overline{2i-3}^2)}{(p+2q-3)\ldots(p+2q-2i+1)}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(2i-3)}{1.2.3\ldots(2i-2)}\left[(2i-1)+\frac{p^2-\overline{2i-1}^2}{2i-1}\right],$$

ce qui est le terme général de A^4_{m-1}.

Soient m impair et p pair :

$$mA^3_m-(m+p+2q-2)A^3_{m-2}$$
$$=\frac{1}{N}(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-3)\frac{p}{p+2q-2}\times H,$$

où

$$H=Q^3_m\,m(m+p+2q-1)-(m-1)(m+p+2q-2)Q^3_{m-2}$$
$$=\sum\frac{(p^2-2^2)\ldots(p^2-2i^2)\,m(m+2)\ldots(m+2i-2)}{2.3.(2i+1)(p+2q-4)\ldots(p+2q-2i-2)}$$
$$\times[(m+2i)(m+p+2q-1)-(m-1)(m+p+2q-2)];$$

ce crochet est

$$(m+2i)(2i+2)+(2i+1)(p+2q-2i-2);$$

en groupant la deuxième partie de ce terme avec la première du précédent, on trouve

$$\frac{(p^2-2^2)\ldots(p^2-\overline{2i-2}^2)\,m(m+2)-(m+2i-2)}{2.3.(2i-1)(p+2q-4)\ldots(p+2q-2i)}\left[2i+\frac{(p^2-2i^2)}{2i}\right],$$

ce qui est le terme général de pA^1_{m-1}.

Soient enfin m impair et p impair :

$$mA^4_m-(m+p+2q-2)A^4_{m-2}$$
$$=\frac{p}{N'}(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)[mQ^4_m-(m-1)Q^4_{m-2}].$$

Il suffit d'écrire ce dernier crochet ainsi :

$$m(Q^4_m-Q^4_{m-2})+Q^4_{m-2},$$

pour s'assurer de l'identité à démontrer.

Il n'est pas plus difficile de vérifier directement que les quatre fonctions A_m satisfont à l'équation récurrente (4); il suffit d'utiliser à cet effet, dans les quatre cas particuliers, les quatre formes de cette équation; si p est pair, A_m^1 et A_m^3 sont des solutions de cette équation (4); si p est impair, A_m^2 et A_m^4; on a donc l'intégration complète de l'équation (4), intégration qu'il ne paraît pas aisé d'obtenir directement.

12. Si l'on obtient directement A_m, on aura des identités algébriques intéressantes.

Soit, par exemple, $m = 0$, ce qui donne évidemment $A_m = 1$. On obtient alors :

Si p est pair,

$$\frac{(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-2)}$$
$$= 1 + \frac{p^2}{p+2q-2}\,\frac{1}{2} + \frac{p^2(p^2-2^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots;$$

Si p est impair,

$$\frac{(p+2q+1)(p+2q+3)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-3)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots.$$

Si l'on fait $m = 1$, ce qui donne aussi $A_m = p$, on trouve :

Si p est pair,

$$\frac{(p+2q+2)(p+2q+4)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-4)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-2^2}{p+2q-4}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{(p+2q-4)(p+2q-6)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots;$$

Si p est impair,

$$\frac{(p+2q+1)(p+2q+3)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-3)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots.$$

Les seconds membres sont des séries hypergéométriques de Gauss.

13. Les résultats obtenus au n° 10 donnent la solution complète de notre premier problème, et, en remplaçant dans la première et la troisième formule p par $2p$ et q par $2q$, celle du second.

A l'égard du troisième, il y a lieu d'examiner successivement les cas où p est plus grand que q, moindre que q ou égal à q.

Ce dernier cas est le plus simple : le nombre cherché est le coefficient de x^m dans le développement de

$$\frac{(1+x^2)^p}{(1-x)^{2p}}:$$

c'est

$$\frac{1}{1.2\ldots 2p-1}\Big[(m+1)(m+2)\ldots(m+2p-1)+\frac{p}{1}(m-1)m\ldots(m+2p-3)$$
$$+\frac{p(p-1)}{1.2}(m-3)\ldots(m+2p-5)+\ldots\Big].$$

C'est un polynôme entier en m, du degré $2p-1$.

Soit en second lieu $p>q$; il faut trouver le coefficient de x^m dans

$$\frac{(1+x)^{p-q}(1+x^2)^q}{(1-x)^{p+q}}.$$

Cherchons d'abord celui H_m de $\frac{(1+x)^{p-q}}{(1-x)^{p+q}}$,

$$H_m=\frac{1}{1.2\ldots p+q-1}\Big[(m+1)(m+2)\ldots(m+p+q-1)$$
$$+\frac{p-q}{1}m(m+1)\ldots(m+p+q-2)$$
$$+\frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}(m-1)m\ldots(m+p+q-3)+\ldots\Big].$$

Le nombre cherché est visiblement

$$H_m+\frac{q}{1}H_{m-2}+\frac{q(q-1)}{1.2}H_{m-4}+\ldots.$$

Soit enfin $p<q$; il faut trouver le coefficient de x^m dans

$$\frac{(1+x^2)^q}{(1-x)^{p+q}(1+x)^{q-p}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{(1-x)^{q+p}(1+x)^{q-p}}=\sum K_m x^m,$$

le nombre cherché sera

$$K_m+\frac{q}{1}K_{m-2}+\frac{q(q-1)}{1.2}K_{m-4}+\ldots.$$

Quant à K_m il est visiblement égal à la valeur que prend A_m si l'on y remplace q par $q-p$ et p par $2p$.

Nous donnons ci-après l'application des formules générales à nos deux développements de la fonction perturbatrice obtenus dans le Mémoire cité.

Le nombre des coefficients distincts est dans le premier ($p=2$, $q=4$),

$$A_m = \frac{m(m+2)\ldots(m+8)}{4.6.8.10} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+8)}{2.4.6.8} \qquad (m \text{ pair}),$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+q)}{4.6.8.10} \qquad (m \text{ impair}).$$

Désignant par $\mathcal{A}_m$ la somme $A_m + A_{m-2} + A_{m-4} + \ldots$, c'est-à-dire le nombre des coefficients dont l'ordre ne dépasse pas m en restant de même parité, on a immédiatement

$$\mathcal{A}_m = \frac{m(m+2)\ldots(m+10)}{4.6\ldots12} + \frac{(m+2)\ldots(m+10)}{2.4\ldots10} \qquad (m \text{ pair}).$$

$$\mathcal{A}_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+11)}{4.6\ldots12} \qquad (m \text{ impair}).$$

Dans l'application de la seconde formule ($p=2$, $q=2$), on trouve

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{24} \\ \mathcal{A}_m &= \frac{m(m+2)\ldots(m+6)}{4.6.8} + \frac{(m+2)(m+4)(m+6)}{2.4.6} \end{aligned}\right\} \quad (m \text{ pair}),$$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{24} \\ \mathcal{A}_m &= \frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}{4.6.8} \end{aligned}\right\} \quad (m \text{ impair}).$$

Le nombre total B_m des termes d'ordre m, et le nombre $\mathcal{B}_m$ des termes dont l'ordre, de même parité que m, ne dépasse pas m, sont pour la première formule

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+20)}{2.4\ldots22} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+18)}{2.4\ldots18} \\ \mathcal{B}_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+22)}{2.4\ldots24} + \frac{(m+2)\ldots(m+20)}{2.4\ldots20} \end{aligned}\right\} \quad (m \text{ pair}),$$

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{(m-1)(m+1)\ldots(m+19)}{2.4\ldots22} + 4\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+19)}{2.4\ldots20} \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{(m-1)\ldots(m+21)}{2.4\ldots24} + 4\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+21)}{2.4\ldots22} \end{aligned}\right\} (m \text{ impair}),$$

et pour la seconde formule

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+12)}{2.4\ldots14} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+10)}{2.4\ldots10}, \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+14)}{2.4\ldots16} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+12)}{2.4\ldots12} \end{aligned}\right\} (m \text{ pair});$$

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+6)(m+7)(m+9)(m+11)}{2.4\ldots14}, \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)^2(m+9)(m+11)(m+13)}{2.4\ldots16} \end{aligned}\right\} (m \text{ impair}).$$

Pour le nombre des arguments, dans le cas de la première formule, il est, à partir de $m = 8$,

$$C_m = K_m + 4K_{m-2} + 6K_{m-4} + 4K_{m-6} + K_{m-8},$$

K_m étant ce que devient C_m quand on y remplace p par 4 et q par 2.

On trouve, pour m pair,

$$K_m = 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+8)}{2.4\ldots10} + \frac{(m+2)(m+4)(m+6)}{2.4.6}.$$

Cette valeur de K_m s'annulant pour les valeurs -2, -4, -6, la valeur de C_m est encore exacte pour $m = 2, 4, 6$. On obtient

$$C_m = \frac{m(m^4 + 30m^2 + 104)}{30},$$

qui, pour $m = 0$, doit être remplacée par 1. La somme des valeurs de C_m pour $m = 0, 2, 4, \ldots, m$ est

$$\mathfrak{C}_m = 1 + \frac{m(m+2)(m^4 + 4m^3 + 47m^2 + 86m + 312)}{360}.$$

Dans le cas de m impair, on trouve

$$K_m = \frac{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+7)}{6.8.10}.$$

L'expression C_m donnée plus haut est encore valable pour $m = 7, 5, 3, 1$, en raison de ce que K_m s'annule pour $m = -1, -3, -5, -7$, et l'on a

$$C_m = \frac{m(m^4 + 30m^2 + 89)}{30},$$

et la somme totale pour $m = 1, 3, \ldots, m$ est

$$\mathcal{C}_m = \frac{(m+1)(m^5 + 5m^4 + 50m^3 + 130m^2 + 309m + 225)}{360}.$$

Pour la seconde formule, on a

$$C = \frac{1}{1.2.3}[(m+1)(m+2)(m+3)$$
$$+ 2(m-1)m(m+1) + (m-3)(m-2)(m-1)] = \frac{2m^3 + 10m}{3},$$

dont l'intégrale est

$$\mathcal{C}_m = \frac{m^4 + 2m^3 + 11m^2 + 10m}{6} + 1.$$

Le Tableau suivant donne les valeurs des nombres A_m, B_m, C_m, $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_m$ pour les valeurs paires et pour les valeurs impaires de m jusqu'à $m = 15$ et pour les deux formules :

Première formule.

m.	A_m.	$\mathcal{A}_m$.	B_m.	$\mathcal{B}_m$.	C_m.	$\mathcal{C}_m$.
0	1	1	1	1	1	1
2	7	8	18	19	16	17
4	27	35	151	170	112	129
6	77	112	844	1014	496	625
8	182	294	3627	4641	1632	2257
10	378	672	12922	17563	4368	6625
12	714	1386	39949	57512	10064	16689
14	1254	2640	110448	167960	20720	37409
1	2	2	4	4	4	4
3	12	14	52	56	44	48
5	42	56	360	416	244	292
7	112	168	1768	2184	924	1216
9	252	420	6916	9100	2724	3940
11	504	924	22932	32032	6732	10672
13	924	1848	66976	99008	14612	25284
15	1584	3432	176800	275808	28732	54016

La deuxième formule donne le Tableau suivant :

m.	C_m.	$\mathcal{C}_m$.	B_m.	$\mathcal{B}_m$.	A_m.	$\mathcal{A}_m$.
0	1	1	1	1	1	1
2	12	13	14	15	5	6
4	56	69	85	100	14	20
6	164	233	344	444	30	50
8	368	601	1086	1530	55	105
10	700	1301	2892	4422	91	196
12	1192	2493	6798	11220	140	336
14	1876	4369	14520	25740	204	540
1	4	4	4	4	2	2
3	28	32	36	40	8	10
5	100	132	176	216	20	30
7	252	384	624	840	40	70
9	516	900	1800	2640	70	140
11	924	1824	4488	7128	112	252
13	1508	3332	10032	17160	168	420
15	2300	5632	20592	37752	240	660

Pour les huit premiers ordres, on a, par la deuxième formule,

175 coefficients,
985 arguments,
2370 termes

et, par la première,

462 coefficients,
3472 arguments,
5395 termes.

Pour les quinze premiers ordres qu'il faudrait envisager si l'on voulait obtenir le développement de la grande inégalité de Pallas, on a, par la deuxième formule, 1200 coefficients, 10 001 arguments et 63492 termes et, par la première, 6072 coefficients, 91424 arguments et 443768 termes correspondant à la seule valeur $\gamma = 0$.

Ces résultats montrent bien l'importance de la transformation qui permet d'obtenir le second développement; nous allons montrer qu'elle est toujours possible dans le système solaire.

DEUXIÈME PARTIE.

2. La transformation indiquée au n° 14 de notre premier Mémoire consiste à poser

$$a'^2 + a_1'^2 = a^2 + a_1^2 + c, \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &2a'a'_1 \cos^2\frac{J'}{2}\cos(H'-H) = 2aa_1\cos^2\frac{J}{2} - d\cos(D+H),\\ &2a'a'_1 \cos^2\frac{J'}{2}\sin(H'-H) = d\sin(D+H),\\ &2a'a'_1 \sin^2\frac{J'}{2}\cos(K'-K) = 2aa_1\sin^2\frac{J}{2} - d_1\sin(D_1+K),\\ &2a'a'_1 \sin^2\frac{J'}{2}\sin(K'-K) = d_1\sin(D_1+K).\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nous rappelons d'ailleurs les définitions des quantités c, d, D, d_1, D_1. En posant, pour abréger,

$$1-\sqrt{1-e_1^2} = \gamma,$$

$$1-\sqrt{1-e_1^2} = \delta,$$

$$1-\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e_1^2} = \beta,$$

d'où

$$\beta = \gamma + \delta - \gamma\delta;$$

$$\mathcal{A} = \cos^2\frac{J}{2}\cos H + \sin^2\frac{J}{2}\cos K,$$

$$\mathcal{B} = \cos^2\frac{J}{2}\cos H - \sin^2\frac{J}{2}\cos K,$$

$$\mathcal{C} = \cos^2\frac{J}{2}\sin H + \sin^2\frac{J}{2}\sin K,$$

$$\mathcal{D} = \cos^2\frac{J}{2}\sin H - \sin^2\frac{J}{2}\sin K,$$

on a

$$\frac{d}{aa_1}\cos D = \beta \mathfrak{B},$$

$$\frac{d}{aa_1}\sin D = -\gamma \mathfrak{C} - \delta \mathfrak{D},$$

$$\frac{d_1}{aa_1}\cos D_1 = -\beta \mathfrak{B},$$

$$\frac{d_1}{aa_1}\sin D_1 = -\gamma \mathfrak{C} + \delta \mathfrak{D},$$

$$c = \frac{a^2 e^2}{2} + \frac{a_1^2 e_1^2}{2} - 2\mathfrak{A} aa_1 ee_1.$$

3. Les équations (2) déterminent toujours, comme on sait, des valeurs positives de

$$2a'a'_1\cos^2\frac{J'}{2}, \qquad 2a'a'_1\sin^2\frac{J'}{2}$$

et des valeurs réelles de

$$H' - H, \qquad K' - K.$$

On en conclura pour $2a'a'_1$ et J' des valeurs positives.

Ayant

$$2a'a'_1 = m,$$

on voit de suite que la condition nécessaire et suffisante, pour que l'on obtienne pour a' et a_1 des valeurs positives, est

$$a^2 + a_1^2 + c - m > 0. \tag{3}$$

4. On a, par les équations (2),

$$4a'^2 a_1'^2\cos^4\frac{J'}{2} = 4a^2a_1^2\cos^4\frac{J}{2} - 4aa_1\cos^2\frac{J}{2}\,d\cos(D + H) + d^2, \tag{4}$$

$$4a'^2 a_1'^2\sin^4\frac{J'}{2} = 4a^2a_1^2\sin^4\frac{J}{2} - 4aa_1\sin^2\frac{J}{2}\,d_1\cos(D_1 + K) + d_1^2; \tag{5}$$

nous allons y remplacer $d\cos D$, $d\sin D$, $d_1\cos D_1$, $d_1\sin D_1$ par leurs valeurs ; on voit aisément que l'équation (5) se déduira de l'équation (4) en remplaçant H par K et K par H, $\cos^2\frac{J}{2}$ par $\sin^2\frac{J}{2}$ et *vice versa* $\cos^2\frac{J'}{2}$ par $\sin^2\frac{J'}{2}$.

On obtient, par simple substitution,

$$4\frac{a'^2 a_1'^2}{a^2 a_1^2}\cos^4\frac{J'}{2} = \frac{(2-\beta)^2+(2-\gamma-\delta)^2}{2}\cos^4\frac{J}{2}+\frac{\beta^2+(\gamma-\delta)^2}{2}\sin^4\frac{J}{2}$$
$$+\frac{\gamma\delta}{2}(2-\gamma)(2-\delta)\left(\cos^4\frac{J}{2}\cos 2H+\sin^4\frac{J}{2}\cos 2K\right)$$
$$+\frac{\delta}{4}(2-\delta)[(1-\gamma)^2+1]\sin^2 J\cos(H-K)$$
$$+\frac{\gamma}{4}(2-\gamma)[(1-\delta)^2+1]\sin^2 J\cos(H+K)$$

et

$$4\frac{a'^2 a_1'^2}{a^2 a_1^2}\sin^4\frac{J'}{2} = \frac{(2-\beta)^2+(2-\gamma-\delta)^2}{2}\sin^4\frac{J}{2}+\frac{\beta^2+(\gamma-\delta)^2}{2}\cos^4\frac{J}{2}$$
$$+\frac{\gamma\delta}{2}(2-\gamma)(2-\delta)\left(\cos^4\frac{J}{2}\cos 2H+\sin^4\frac{J}{2}\cos 2K\right)$$
$$+\frac{\delta}{4}(2-\delta)[(1-\gamma)^2+1]\sin^2 J\cos(H-K)$$
$$+\frac{\gamma}{4}(2-\gamma)[(1-\delta)^2+1]\sin^2 J\cos(H+K).$$

5. On voit de suite que ces fonctions ont leurs plus grandes valeurs pour

$$H=0,\qquad K=0,$$

car tous les coefficients sont positifs. Le terme c a en même temps sa plus petite valeur. Il suffit et il est nécessaire que la condition (3) soit satisfaite pour ces valeurs de H et K.

On a alors

$$\mathcal{A}=1,\qquad \mathcal{B}=\cos J,\qquad \mathcal{C}=0,\qquad \mathcal{D}=0,$$
$$D=0,\qquad D_1=180^\circ,$$
$$H'=H,\qquad K'=K,$$
$$\frac{d}{aa_1}=\beta\cos J,\qquad \frac{d_1}{aa_1}=\beta\cos J,$$
$$2\frac{a'a_1'}{aa_1}\cos^2\frac{J'}{2}=1+(1-\beta)\cos J,$$
$$2\frac{a'a_1'}{aa_1}\sin^2\frac{J'}{2}=1-(1-\beta)\cos J,$$
$$2a'a_1'=2aa_1,$$

et la condition (3) devient

$$(a - a_1)^2 + \frac{a^2 e^2}{2} + \frac{a_1^2 e_1^2}{2} - 2 a a_1 e e_1 > 0.$$

6. On peut toujours supposer $a_1 < a$ et écrire l'expression précédente sous les deux formes

$$(a_1 e_1 - 2ae)^2 \quad - 3a^2 e^2 + 2(a - a_1)^2,$$
$$(ae \quad - 2a_1 e_1)^2 - 3a_1^2 e_1^2 + 2(a - a_1)^2,$$

qui montrent qu'elle ne peut être négative que si

$$e > \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{a_1}{a}\right), \qquad e_1 > \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{a_1} - 1\right).$$

On a, pour Mars, les petites planètes extrêmes et, pour Jupiter, les valeurs suivantes du demi grand axe :

Mars	1,52369
(149) Méduse	2,13275
(153) Hilda	3,95228
Jupiter	5,20280

Le minimum de $1 - \frac{a_1}{a}$ et celui de $\frac{a}{a_1} - 1$ ont lieu pour Hilda et Jupiter pour lesquels

$$1 - \frac{a_1}{a} = 0,24, \qquad \frac{a}{a_1} - 1 = 0,32.$$

Il s'ensuit que les excentricités devraient être toutes plus grandes que 0,19; or cela n'a lieu pour aucune des grosses planètes. Donc les valeurs de $a' a'_1$ seront toujours réelles et positives, et la transformation est toujours possible.