SUR

LES LIGNES SINGULIÈRES

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

La première Partie de ce travail est consacrée à l'étude d'une fonction dans le voisinage d'une ligne singulière ou coupure. La notion de coupure se présente dans la discussion de l'intégrale de Cauchy; elle peut même s'introduire, ainsi que l'a montré M. Hermite, à l'aide d'intégrales définies où la variable d'intégration est réelle. La série de Taylor, convergente dans un certain cercle, offre aussi un exemple simple de coupure, et MM. Weierstrass, Tannery, Appell ont formé de nombreuses séries qui représentent deux fonctions distinctes dans deux aires différentes du plan. Nous énumérons, dans un premier Chapitre, les singularités diverses que peuvent présenter les symboles (et particulièrement les séries) qui définissent, dans un certain espace, une fonction analytique de z. Ceci nous conduit à quelques théorèmes sur les séries, dont le plus important est le suivant : Quand une série $F = \Sigma V_n(x, y)$ converge uniformément sur le contour s d'une aire fermée S, à l'intérieur de laquelle les fonctions $V_n(x, y)$ sont régulières et satisfont à l'équation $\Delta V_n = 0$: 1° *la série* F *converge uniformément dans* S; 2° *les séries, formées par les dérivées de ses termes, convergent uniformément dans toute aire* S' *intérieure à* S *et sans point commun avec* s, *et elles représentent les dérivées correspondantes de* F.

Soit une fonction $F(z)$ définie d'un côté d'une ligne L et présentant cette ligne comme coupure : il peut exister une seconde fonction $F_1(z)$ qui coïncide avec la première dans le voisinage de L et la *prolonge* au delà sans discontinuité. La coupure est alors *artificielle,* elle est *essentielle* au cas contraire : le cercle de convergence de la série de Maclaurin $F(z)$, qui développe la fonction $\frac{1}{1-z}$, est une coupure artificielle de $F(z)$; la série $F(z)$ qui représente dans le cercle fondamental C une fonction fuchsienne, holomorphe et définie seulement dans ce cercle, admet au contraire C comme coupure essentielle. Nous donnons d'abord une forme de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une coupure soit artificielle, qui s'applique à une coupure quelconque. De cette condition, on déduit plusieurs théorèmes, concernant les fonctions définies par une relation implicite ou par une équation différentielle du premier ordre : ces derniers sont utiles dans l'étude des intégrales uniformes d'une équation différentielle, ainsi que je le montre dans plusieurs applications, et notamment en recherchant *toutes les équations de la forme* $\frac{du}{dz}=f(z,u)$ [*où* $f(z,u)$ *est uniforme*], *dont l'intégrale générale peut être uniforme.*

Dans le cas où la coupure est une ligne analytique, la condition précédente prend une forme plus simple, indiquée dès l'année 1870 par M. Schwarz [1], et qui permet de discuter plusieurs classes de coupures. Des exemples des principales singularités d'une fonction dans le voisinage d'une coupure essentielle terminent cette première Partie.

Dans la seconde, nous étendons aux fonctions uniformes les plus générales les formes de décomposition en sommes et en produits, données dans la théorie des fonctions à points singuliers. En 1881, avant le théorème de M. Mittag-Leffler, M. Picard indiquait, dans le cas d'une coupure circulaire, une forme de développement en produit, applicable à une coupure quelconque, et, peu de temps après, décomposait une fonction $F(z)$, ayant pour coupures des segments de droites, en une somme de n fonctions n'ayant qu'une coupure, puis développait ces fonctions en séries [2]. Après la découverte du théorème de M. Mittag-Leffler, M. Goursat [3] a étendu ce théorème aux fonctions uniformes présentant des singularités quelconques. Enfin, M. Mittag-Leffler [4] a consacré lui-même un Mémoire à l'étude de

---

[1] *Monatsberichte der Academie zu Berlin,* octobre 1870.
[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 21 mars 1881, 22 mai 1882.
[3] *Id.,* 26 février 1883.
[4] *Acta mathematica,* t. IV; 1884.

ces propositions. Nous donnons, avec une démonstration un peu différente de ces théorèmes, plusieurs modes de développements en séries des fonctions présentant dans le plan une seule coupure, auxquelles on se trouve ramené. Un premier développement, analogue à la série de Taylor, repose sur la représentation conforme; les autres généralisent les développements, indiqués par M. Appell dans le cas d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour d'arcs de cercles. Ils découlent de ce théorème que toute fonction holomorphe dans une aire convexe *peut se développer dans cette aire en série de polynômes*.

Les notions de *résidu*, d'*ordre*, de *reste* (définis soit comme intégrales, soit comme coefficients) se généralisent dès lors facilement avec les propositions qui s'y rattachent. En particulier, le théorème des résidus et les théorèmes de Liouville subsistent pour les fonctions doublement périodiques à singularités quelconques.

Enfin, plusieurs des résultats énoncés ont été étendus aux fonctions V de deux ou trois variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE D'UNE FONCTION DANS LE VOISINAGE D'UNE COUPURE.

CHAPITRE I.

1. Avant d'aborder l'étude d'une fonction dans le voisinage d'une coupure, il convient d'énumérer brièvement les singularités que peuvent offrir les symboles qui représentent, dans une partie du plan, une fonction uniforme de la variable $z = x + iy$.

Soit une expression de la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$, les fonctions P et Q étant uniformes dans tout l'espace du plan xOy où elles sont définies. Nous supposons de plus qu'en chaque point d'une certaine aire S, $P + iQ$ admette une dérivée par rapport à z et, par suite, qu'elle représente dans S une fonction holomorphe de z.

Considérons dans le plan une aire fermée quelconque σ: $P + iQ$ sera dans σ fonction holomorphe de z, sauf peut-être en certains points. Ces points pourront être en nombre infini (comprendre par exemple tous les points de σ) et affecter des distributions diverses.

En premier lieu, si tous les points singuliers peuvent être enfermés à l'intérieur de cercles n'ayant pas de points communs et de rayon aussi petit qu'on veut, nous dirons que l'ensemble de ces points E est *ponctuel*. Les points forment alors des suites ayant pour limites d'autres points, formant eux-mêmes des suites analogues. La classification de ces ensembles a été faite par M. Cantor.

En second lieu, si tous les points ne satisfont pas à la condition précédente, mais peuvent être enfermés à l'intérieur de contours tels que l'aire totale enclose soit aussi petite qu'on veut, nous dirons que l'ensemble E est *linéaire*. Les points forment alors des suites ou des ensembles ponctuels, ayant pour limites des lignes : autrement dit, il existe des lignes telles que, si l'on décrit un cercle d'un quelconque de leurs points comme centre, ce cercle renferme un nombre infini de points E, si petit que soit son rayon.

Par exemple, l'ensemble E sera composé de points infiniment voisins (ou même de tous les points) de plusieurs lignes. Ces lignes peuvent être elles-mêmes en nombre infini et former des suites ayant pour limites des lignes ou des points. A ces ensembles de lignes, s'étend immédiatement la classification de M. Cantor sur les ensembles de points : le mot *ligne* remplace partout le mot *point,* une ligne pouvant parfois se réduire à un point.

En dernier lieu, il est possible que les points E soient distribués dans des aires finies σ', σ'', ..., c'est-à-dire qu'une portion de ces aires, si petite qu'elle soit, en renferme un nombre infini (l'ensemble E comprendra par exemple tous les points d'un certain espace). L'ensemble sera dit alors *superficiel.* Les aires σ', σ'', ... peuvent être en nombre infini et former des suites ayant pour limites des points ou des lignes.

Telles sont les dispositions possibles dans σ des points singuliers de l'expression $P(x, y) + i\,Q(x, y)$. En chacun de ces points, une au moins des fonctions P, Q est soit discontinue, soit indéterminée, ou n'admet pas à la fois de dérivée partielle par rapport à x et y, ou bien enfin ces dérivées partielles ne vérifient pas les deux égalités

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Supposons tout d'abord que les points E ne forment pas dans σ un ensemble superficiel. Si, dans ce cas, la fonction $P + iQ$ est continue dans σ, il sera démontré plus tard en toute rigueur qu'elle est nécessairement holomorphe dans le même espace. Les points E sont donc des points de discontinuité de $P + iQ$. Un premier genre de singularité qu'il convient de distinguer est le suivant : soit z_0 un point isolé de l'ensemble E, tel que, z tendant vers z_0 d'une façon quelconque, $P + iQ$ tende vers une certaine valeur a; pour $z = z_0$, $P + iQ$ est discontinue ou indéterminée. Appelons $f(z)$ la fonction de z, qui coïncide avec $P + iQ$ en dehors de z_0 et prend pour z_0 la valeur a. Cette fonction est holomorphe au point z_0. Une telle discontinuité est purement apparente. Un exemple très simple en est fourni par l'expression

$$P + iQ = \frac{4}{\pi}\left[f(z)\sin(x^2 + y^2) + \frac{f(z)\sin 3(x^2 + y^2)}{3} + \frac{f(z)\sin 5(x^2 + y^2)}{5} + \ldots\right],$$

où $f(z)$ est holomorphe et différent de zéro à l'origine : $P + iQ = f(z)$, quel que soit z, sauf pour le point $z = 0$ où $P + iQ$ est nulle. Nous supposerons désormais qu'en pareil cas on remplace $P + iQ$ par $f(z)$, et ainsi pour tous les points analogues : ces points peuvent former des suites ayant pour limites d'autres points z', z'', ... Si ces points z' sont pour $f(z)$ des discontinuités du même genre, on les supprime comme les z_0. Cela fait, l'ensemble E peut comprendre certaines lignes isolées L_0, telles que z, tendant d'une manière quelconque vers un point ζ de L_0, la valeur de $f(z)$ tende vers une limite $a(\zeta)$. La fonction $\varphi(z)$, qui coïncide avec $f(z)$ en dehors de L_0 et prend sur L_0 les valeurs $a(\zeta)$, est, comme nous le verrons, holomorphe dans le voisinage de L_0. On peut citer comme exemple l'expression

$$P + iQ = \frac{4}{\pi}\left[f(z)\sin x^2 + \frac{f(z)\sin 3x^2}{3} + \frac{f(z)\sin 5x^2}{5} + \ldots\right],$$

$f(z)$ étant holomorphe sur Ox. Nous remplacerons là encore $f(z)$ par $\varphi(z)$, et ainsi pour toutes les singularités analogues. En définitive, s'il existe une fonction $\varphi(z)$ coïncidant avec $P + iQ$ en dehors de l'ensemble E, continue et par suite holomorphe en certains points E' de cet ensemble, on substitue $\varphi(z)$ à $P + iQ$.

Ces singularités parasites éliminées, quelles sont les discontinuités que présente $P + iQ$?

Si l'ensemble E est ponctuel, les points singuliers de $P + iQ$ dans σ sont des pôles ou des points essentiels.

Si l'ensemble E est linéaire, la fonction $P + iQ$ est en outre affectée de coupures. Ces coupures sont isolées ou sont les limites de suites de points essentiels ou de coupures. Dans le second cas, $P + iQ$ est nécessairement discontinue ou indéterminée aux environs de la coupure. Dans le premier cas, soit L la ligne considérée : quand z tend vers un point quelconque ζ de L en restant du côté C de L, $P + iQ$ peut tendre vers une certaine valeur $f(\zeta)$; du côté opposé C' de L, $P + iQ$ peut prendre également sur L la suite de valeurs $f_1(\zeta)$, qui doit différer de $f(\zeta)$. Il est possible, au contraire, que d'un côté de L (ou des deux côtés), pour des points ζ infiniment voisins sur L, ou même pour tous les points de L, $P + iQ$ ne tende pas vers une limite quand z tend vers ζ sur un chemin l, ou que cette limite dépende du chemin l. Dans tous les cas, l'expression $P + iQ$ peut n'avoir aucun sens sur L, ou ses valeurs pour les points de cette ligne sont entièrement indépendantes des valeurs qu'elle prend aux points voisins.

Si l'ensemble E est superficiel, $P + iQ$ présente dans σ des espaces lacunaires σ', σ'', ... En tout point E de ces espaces, $P + iQ$ peut n'avoir pas de sens, ou être discontinue, ou ne pas admettre de dérivée par rapport à z (1). Le contour s' de l'aire σ' est une coupure de $P + iQ$, cette ligne peut être la limite de singularités extérieures à σ'; au cas contraire, $P + iQ$ peut tendre vers une suite de valeurs $f(\zeta)$, quand z tend vers un point ζ de s', extérieurement à σ'. Il arrive notamment que $P + iQ$ est continue sur s' et dans σ', et n'admet pas dans σ' de dérivée par rapport à z.

En dernier lieu, si $P + iQ$ est holomorphe dans σ et tend vers la valeur $f(\zeta)$, fonction continue de ζ, quand le point z de σ tend d'une manière quelconque vers le point ζ du contour s, nous dirons que la fonction $P + iQ$ est holomorphe dans σ et *continue sur son contour*.

2. Toutes ces remarques ont leurs analogues dans l'étude des fonctions V de deux ou trois variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Soit $P(x, y, z)$ une fonction de x, y, z, uniforme dans tout l'espace où elle est définie, et représentant dans un certain volume une fonction régulière $V(x, y, z)$, qui satisfait à l'équation $\Delta V = 0$. Les points singuliers de $P(x, y, z)$ seront les discontinuités de P et de ses dérivées premières, et les points où ses dérivées secondes ne vérifient pas l'équation $\Delta P = 0$. On voit, comme plus haut, qu'à l'intérieur σ d'une surface fermée s ces points peuvent former des ensembles *ponctuels, linéaires, superficiels,* ou être distribués dans des volumes finis, et former ainsi un *ensemble à trois dimensions*.

Ce dernier cas excepté, les points E sont nécessairement des discontinuités de P ou de ses dérivées premières, d'après ce théorème que, si une fonction V est régulière dans un espace, sauf peut-être sur une surface où elle est continue, ainsi que ses dérivées premières, elle est régulière dans tout cet espace. De plus, s'il existe une fonction $Q(x, y, z)$, coïncidant avec $P(x, y, z)$ en dehors des points E, et continue en des points ou sur des lignes et des surfaces E' qui sont des discontinuités de P, on supprime ces singularités apparentes en substituant Q à P. Mais les points E' peuvent être encore des discontinuités des dérivées premières de Q. Cette discussion s'achève comme la première. En particulier, si $P(x, y, z)$ est une fonction régulière dans σ, et si elle tend vers une valeur $f(\xi, \eta, \zeta)$, fonction continue de ξ, η, ζ, quand (x, y, z) tend vers le point (ξ, η, ζ) de s en restant intérieur à σ, on dira qu'elle est régulière dans σ et continue sur s; on dira de

(1) $P + iQ$ peut admettre une dérivée en certains points z_0 de σ', mais cette dérivée n'existe pas pour des points infiniment voisins.

même que ses dérivées premières sont continues dans σ et sur s, si les fonctions $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ vérifient la même condition.

3. Les diverses singularités que nous avons énumérées sont offertes par les symboles élémentaires qui définissent une fonction de z. Envisageons, par exemple, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t, z)\,dt = F(z)$, où t, α et β sont réels. Si à chaque valeur de t correspondent des points singuliers de $f(t, z)$ ne formant pas de suites linéaires, la fonction F ainsi définie présentera en général des lignes singulières; si à chaque valeur de t correspondent des lignes singulières de $f(t, z)$, la fonction F présentera des espaces singuliers. Il en serait de même si F était définie par l'intégrale double

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(z, t, \theta)\,dt\,d\theta,$$

$f(z)$ ayant des points singuliers pour chaque valeur réelle de t et de θ.

En particulier, ces intégrales peuvent définir une fonction F continue dans une aire S, dont la dérivée par rapport à z existe dans une partie de cette aire et n'existe pas dans l'autre. Ainsi l'intégrale $\int_0^1 L\frac{z-it}{z-1-it}\,dt$ $\Big($où $L\frac{z-it}{z-1-it}$ représente une fonction uniforme de z ayant pour coupure le segment de droite $y = t$ compris entre $x = 0$ et $x = 1\Big)$ définit une fonction de z holomorphe dans le plan, sauf pour les points $x + iz$ dont l'x et l'y sont positifs et plus petits que l'unité; car, en ces points, F est égale à une fonction de $z + 2i\pi(1 - y)$. De plus, F est continue dans le plan, sauf pour les points des droites $x = 0$, $x = 1$ dont l'ordonnée est comprise entre 0 et 1.

Il est facile également de former des séries qui définissent dans une aire S une fonction uniforme de z, et qui présentent dans le plan des singularités quelconques, notamment celle dont nous venons de parler. Soit en effet $U(x,y) + iV(x,y)$ une fonction holomorphe de z, telle que, pour $x = 0$, $U = 0$. Développons en série de fonctions de Laplace, entre $x = -\pi$, $x = \pi$ et $y = 0$, $y = \pi$, les fonctions $V(x,y)$ et $U_1(x,y)$: $U_1(x,y)$ étant égale à U pour $x > 0$ et à $-U$ pour $x < 0$. La série $F = U_1 + iV$ sera continue pour les valeurs de x et de y comprises, les premières entre $-\pi$ et

$+\pi$, les secondes entre o et π; elle n'admettra pas de dérivée par rapport à z pour les valeurs négatives de x.

Si les termes d'une série sont des fonctions de z, la série n'aura pas de sens en tout point qui sera singulier pour un de ses termes, et l'on peut faire en sorte que ces points forment des ensembles quelconques. Si, dans une aire S, tous les termes sont holomorphes, la série peut représenter une fonction holomorphe dans une partie de S et diverger dans l'autre. Mais d'autres singularités sont-elles possibles? Pour étudier cette question, nous aurons recours à quelques propriétés bien connues des séries, que nous rappellerons tout d'abord.

4. Une série $\Sigma\varphi_n(t)$ converge *uniformément* dans un intervalle $t_0 t_1$, si à tout nombre positif ε correspond un entier ν tel que, n étant égal ou supérieur à ν, on ait

$$|\,R_n(t)\,| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de t égales à t_0, t_1, ou comprises entre t_0 et t_1 (la variable t est réelle). Ceci revient à dire qu'on peut trouver ν assez grand pour que, p étant quelconque, on ait dans le même intervalle

$$|\,S_{\nu+p}(t) - S_\nu(t)\,| < \varepsilon.$$

Les raisonnements qui vont suivre reposent sur ces deux théorèmes :

Lemme I. — Si tous les termes d'une série sont susceptibles d'intégration et si la série converge uniformément dans un intervalle, la fonction que représente la série est intégrable dans cet intervalle, et son intégrale est la somme des intégrales de tous les termes.

Lemme II. — Si tous les termes d'une série $f(t)$ admettent une dérivée susceptible d'intégration et si de plus la série de ces dérivées converge uniformément dans un intervalle, elle représente la dérivée de $f(t)$ dans cet intervalle.

Le lemme I peut s'étendre à une certaine classe de séries non uniformément convergentes. Soit une série $f(t) = \Sigma\varphi_n(t)$ qui converge uniformément dans tout intervalle, compris entre t_0 et t_1 et ne renfermant pas certains points t', t'', ... Nous convenons de dire alors, pour abréger, que la série converge *uniformément entre t_0 et t_1, sauf pour les valeurs t', t''*, ... Les points t', t'', ... peuvent former sur l'axe des t des suites ponctuelles. En ces points, la série peut être divergente. Si le module maximum de $S_n(t)$ entre t_0 et t_1 ne croît pas au delà de toute limite avec n, le lemme I s'applique encore à l'intervalle $t_0 t_1$.

Pour le voir, il suffit de décomposer l'intervalle $t_0 t_1$ en deux parties s et s' (formées d'ailleurs d'intervalles séparés), s' renfermant toutes les valeurs $t', t'', \ldots$. Soit M la limite supérieure de $|(S_n\, t)|$. On peut toujours prendre s' de telle sorte que $\left|\int_{s'} M\, dt\right|$ soit inférieur à un nombre positif ε aussi petit qu'on veut : cela fait, il existe un nombre n assez grand pour que, p étant un entier quelconque, on ait dans tout l'intervalle s

$$| \; S_{n+p}(t) - S_n(t) \; | < \varepsilon.$$

Si donc on désigne par S'_p la somme des n premiers termes de la série

$$\sum \int_{t_0}^{t_1} \varphi_n(t)\, dt,$$

le module de la différence $(S'_{n+p} - S'_n)$ sera, pour la même valeur de n, inférieur à $\sigma[\sigma = \varepsilon(l+2)]$, si l est la longueur du segment $t_0 t_1$. La nouvelle série converge donc, et il apparaît aussitôt qu'elle représente l'intégrale de $f(t)$. Il suffit, pour que le raisonnement s'applique, que $\int_{s'} S_n(t)\, dt$ tende vers o uniformément avec s' (quel que soit n).

Il convient d'ajouter qu'une série $\Sigma\varphi_n(t)$ peut converger dans un intervalle $t_0 t_1$, sans converger uniformément dans aucun intervalle fini, si petit qu'il soit. Soit par exemple une fonction $f(t)$, à variation limitée entre $-\pi$ et $+\pi$, et discontinue dans tout intervalle, ainsi que la suite de valeurs $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. La série

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\beta)\, d\beta \left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \cos n(\beta - t)\right]$$

converge dans l'intervalle $-\pi, +\pi$, et représente dans cet intervalle $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. Comme ses termes sont fonctions continues de t, elle ne converge uniformément dans aucun intervalle (sinon, sa somme serait fonction continue de t dans cet intervalle).

Ces remarques faites, considérons une série de la forme

$$\Sigma f_n(z),$$

ou de la forme

$$\Sigma \varphi_n(x, y).$$

Une pareille série converge *uniformément dans l'aire* S quand, à tout nombre positif ε, correspond un entier ν tel que, n étant supérieur ou égal à ν, on ait pour tout point z (ou x, y) de S et de son contour

$$| R_n(z) | \quad \text{ou} \quad R_n(x, y) | < \varepsilon.$$

Si une série converge uniformément dans tout espace σ intérieur à S et ne renfermant pas certains points z' ou certaines lignes l' de S, nous convenons de dire que la série converge *uniformément, sauf aux points z'* ou sur les lignes l'.

La série converge *uniformément sur une ligne* AB $[x = g(t), y = h(t)]$, si la série

$$\Sigma f_n[z(t)] \quad \text{ou} \quad \Sigma \varphi_n[x(t), y(t)]$$

converge uniformément entre t_0 et t_1 (t_0 et t_1 étant les valeurs de t qui correspondent aux points A et B).

5. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit une série $\Sigma f_n(z) = F(z)$ et une aire S à contour quelconque : si les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes dans S et continues sur s, et si la série $F(z)$ converge sur s uniformément :* 1° *la série $F(z)$ converge uniformément dans toute aire S′ intérieure à S et sans point commun avec s;* 2° *les séries formées par les dérivées successives des termes de $F(z)$ convergent uniformément dans S′ et représentent les dérivées successives de $F(z)$ dont l'existence est ainsi démontrée.*

Formons en effet la série

$$\sum \frac{f_n(z)}{(z-x)^{p+1}},$$

et appelons M le module maximum de $\frac{1}{(z-x)^{p+1}}$ quand z varie sur le contour s, et x dans l'aire S′. On peut, quel que soit ε, trouver un entier ν assez grand pour que, n étant supérieur à ν, $|MR_n(z)|$ soit inférieur à ε quand z

parcourt s. D'après le lemme I, la série

$$\sum \int_s \frac{f_n(z)}{(z-x)^{p+1}} dz$$

est convergente, et de plus, pour les valeurs de n qu'on vient de définir, le reste de cette série $R'_n(x)$ a un module inférieur à $l\varepsilon$ (l étant la longueur de s), quelle que soit la position de x dans S' et sur son contour. D'autre part,

$$\int_s \frac{f_n(z)\, dr}{(z-x)^{p+1}} = \frac{2 i \pi}{1.2\ldots p} f_n^p(x).$$

La série $\Sigma f_n^p(x)$ converge donc uniformément dans S'. On déduit sans peine du lemme II qu'elle représente la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction $F(x)$, définie par la série convergente $\Sigma f_n(x)$.

Le théorème est encore vrai, si chacun des termes $f_n(z)$ est discontinu sur s, en des points $a_n, a'_n, \ldots$, ne formant pas de suite linéaire, pourvu que $|f_n(z)|$ ne croisse pas dans S et sur s, au delà de toute limite. Il suffit de répéter le raisonnement précédent, en remarquant que l'intégrale $\int_s \frac{f_n(z)}{(z-x)^{p+1}}$ a un sens et représente encore $\frac{2 i \pi}{1.2\ldots p} f_n^p(x)$, ainsi qu'on le voit facilement.

Le théorème subsiste même si la série converge uniformément sur s, sauf en des points $a_1, a_2, \ldots$ (ne formant pas de suite linéaire), pourvu que le module maximum de $S_n(z)$ sur s ne croisse pas au delà de toute limite avec n. Il suffit de raisonner comme précédemment, en appliquant le lemme I généralisé.

6. Théorème II. — Soit un espace S, admettant la représentation conforme sur un cercle, et une série $\Sigma v_n(x, y)$: les fonctions $v_n(x, y)$, qui satisfont dans S à l'équation $\Delta v_n = 0$, sont uniformes et régulières dans cet espace, et continues sur son contour s. Si la série

$$V(x, y) = \Sigma v_n(x, y),$$

converge uniformément sur s : 1° *elle converge uniformément dans toute aire* S' *intérieure à* S, *et sans point commun avec* s; 2° *les séries formées par les dérivées partielles des termes de* $V(x, y)$ *convergent uniformément dans* S', *et représentent les dérivées partielles de* $V(x, y)$ *dont* *l'existence est ainsi démontrée. Ces dérivées satisfont à l'équation* $\Delta V = 0$.

Supposons d'abord que S soit un cercle C de rayon 1, ayant l'origine pour centre. On sait que

$$\frac{\partial^p v_n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{\partial^p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\left(\frac{1-a^2}{r^2}\right) v_n(\xi, \eta)\, ds;$$

(ξ, η) est un point de la circonférence c de C, (x, y) un point de C; $a^2 = x^2 + y^2$; $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

Si M est le module maximum de $\frac{\partial^p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\left(\frac{1-a^2}{r^2}\right)$ quand (ξ, η) parcourt c, et quand (x, y) varie dans S', on peut trouver un entier ν assez grand pour que, n étant supérieur à ν, $M\,|R_n(\xi, \eta)|$ soit inférieur à ε, quel que soit (ξ, η) sur c. Par suite, la série

$$\sum \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{\partial_p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\left(\frac{1-a^2}{r^2}\right) v_n(\xi, \eta)\, ds,$$

converge uniformément dans S'; car, pour les mêmes valeurs de n, le reste $R'_n(xy)$ est dans cet espace inférieur à ε.

La série $\sum \frac{\partial^p v_n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ représente, d'après le lemme II, $\frac{\partial^p V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$; la fonction V définie par la série $\Sigma v_n(x, y)$ satisfait donc dans C à l'équation $\Delta V = 0$ et est régulière dans ce cercle.

En partant de l'expression

$$v(x, y) + i\,u(x, y) = \int_c v(\xi, \eta)\,\frac{e^{is} + z}{e^{is} - z}\, ds,$$

on voit que la série

$$(\alpha) \qquad F(z) = \Sigma v_n(x, y) + i\,u_n(x, y)$$

converge uniformément dans S', ainsi que ses dérivées. Ceci résulte encore de l'intégration de la série $\sum \frac{\partial v_n}{\partial x} - i\frac{\partial v_n}{\partial y}$. Toutes les fonctions $f_n(z)$ dont la partie réelle est $v_n(x, y)$ sont de la forme $v_n(x, y) + iu_n(x, y) + iCn$. Si la série

$$(\beta) \qquad \Sigma v_n(x, y) + i\,u_n(x, y) + iCn$$

converge pour un point (x_0, y_0) de S, comme la série (α) converge pour $x_0 y_0$, la série $\Sigma C n$ est nécessairement convergente, et par suite (β) converge uniformément dans S′. Autrement dit, $u_n(x, y)$ désignant une quelconque des fonctions conjuguées de $v_n(x, y)$, la série

$$\Sigma v_n(x, y) + i[u_n(x, y) - u_n(x_0, y_0)]$$

converge uniformément dans S′.

Soit donc une série $\Sigma f_n(z) = \Sigma v_n(x, y) + i u_n(x, y)$, *si la série* $\Sigma v_n(x, y)$ *converge uniformément sur* c, *et si la série* $\Sigma u_n(x, y)$ *converge en un point* (x_0, y_0) *intérieur à* c, *la série et les séries formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans tout espace* S′ *intérieur à* c.

Remarquons de plus que, si une série $\Sigma v_n(x, y)$ converge uniformément dans une aire σ, les séries formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans toute aire σ' intérieure à σ ; il suffit, pour le voir, de décomposer σ' en parties $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ qui puissent être enfermées dans des cercles $c_1, c_2, \ldots$ intérieurs à σ, et l'on raisonne sur ces cercles comme sur c.

Revenons maintenant au cas où l'aire S est quelconque ; d'après la remarque précédente, tout revient à démontrer que la série $\Sigma v_n(x, y)$ converge uniformément dans toute aire S′ intérieure à s. Soit

$$z = f(z_1) = \varphi(x_1, y_1) + i\psi(x_1, y_1)$$

une fonction qui représente d'une manière conforme l'aire S sur le cercle C. Inversement, $z_1 = f_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$. Les fonctions f et f_1 sont holomorphes, la première dans C, la seconde dans S. Posons $x = \varphi(x_1, y_1)$, $y = \psi(x_1, y_1)$: les fonctions $v'_n(x_1, y_1)$ sont régulières dans C et satisfont à l'équation $\Delta v'_n = 0$. De plus, la série $\Sigma v'_n(x_1, y_1)$ converge uniformément sur c ; elle converge donc uniformément dans toute aire S'_1 intérieure à c ; si l'on remplace x_1 par $\varphi_1(x, y)$, y_1 par $\psi_1(x, y)$, le théorème est démontré. On généralise de la même manière la remarque relative à la série

$$\Sigma v_n(x, y) + i u_n(x, y).$$

Le théorème II est encore exact si la série $\Sigma v_n(x, y)$ *converge uniformément sur* s, *sauf en des points ne formant pas de suite linéaire*, pourvu que le module maximum de $S_n(x, y)$ sur s ne croisse pas au delà de toute limite.

Les théorèmes I et II ont été établis en supposant que S n'avait pas de points à l'infini : mais on ramène tous les cas à celui-là à l'aide de la transformation $z = \frac{1}{z_1 - a}$, le point a étant extérieur à S.

7. On peut donner du théorème II une démonstration qui s'applique au cas où l'aire S est à contour quelconque et au cas où les termes v_n de la série dépendent de trois variables.

Soit donc dans l'espace un volume quelconque S, n'ayant pas de point à l'infini, et limité par une surface s à connexité quelconque. *Si la série* $V(x, y, z) = \Sigma v_n(x, y, z)$ (*dont tous les termes sont des fonctions régulières dans* S, *continues sur* s, *et satisfont à l'équation* $\Delta v_n = 0$) *converge sur* s *uniformément :* 1° *elle converge uniformément dans* S; 2° *les séries* (α) *formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans tout espace* S′ *intérieur à* S *et sans point commun avec* s.

En premier lieu, si l'espace S est une sphère, on établit comme dans le plan, en partant de la formule

$$4\pi v_n(x, y, z) = \int\int_s \frac{R^2 - a^2}{R r^3} v_n(\xi, \eta, \zeta)\, ds,$$

que les séries (α) convergent uniformément dans l'espace S′. Il en résulte que, si la série V converge dans S uniformément (S étant quelconque), les séries (α) convergent dans S′ uniformément.

Tout revient donc à démontrer la première proposition. Considérons pour cela la somme

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{\nu}^{\nu+p} v_n(x, y, z).$$

Cette fonction φ est régulière dans S, continue sur s, et satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$. Elle ne présente dans S ni maximum ni minimum, et, par suite, pour tout point (x, y, z) de S, la valeur de φ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de φ sur s, ou égale à l'une de ces deux valeurs. Si μ désigne le module maximum de φ sur s, le module de φ dans S est au plus égal à μ. D'autre part, on peut, par hypothèse, trouver un entier ν assez grand pour que, quel que soit p, $|\varphi(x, y, z)|$ soit sur s inférieur à un nombre positif donné ε, autrement dit pour que μ soit inférieur à ε. Pour tout point de S et de s, l'expression $\sum_{\nu}^{\nu+p} v_n(x, y, z)$ a donc, quel que soit p, un module inférieur à ε : la série V converge dans S uniformément.

Remarque. — Si S comprend le point ∞, s ayant tous ses points à distance finie, chaque fonction v_n, holomorphe dans S, est holomorphe pour le point ∞ : $v_n(\infty) = a_n$. Quand la série Σa_n est convergente, le théorème II s'applique encore à l'espace S. Il suffit de prouver que la série

$$\Sigma[v_n(x, y, z) - a_n] = \Sigma u_n(x, y, z)$$

converge dans S uniformément : pour le voir, on pose

$$x = \frac{x'}{r'^2}, \qquad y = \frac{y'}{r'^2}, \qquad z = \frac{z'}{r'^2}, \qquad r'^2 = x'^2 + z^{2\prime} + z'^2$$

(l'origine est supposée extérieure à S) : la série $\sum \frac{u'_n(x', y', z')}{r'}$ a tous ses termes réguliers dans S′, continus sur s', et converge uniformément sur s', par suite dans S′ : on en conclut qu'il en est de même dans S de la série $\Sigma u_n(x, y, z)$.

Si la surface s a des points à l'infini et si les fonctions v_n, régulières dans S, sont régulières aussi au point $\infty[v_n(\infty) = a_n]$, on voit, en employant la même transformation, que la série Σv_n converge dans S uniformément, quand la série $\Sigma r u_n(x, y, z)$ converge uniformément sur s, la série Σa_n étant de plus convergente $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

8. La série $\Sigma v_n(x, y, z)$ convergeant dans S uniformément, la fonction $V(x, y, z)$ est continue dans S et sur s : quand (x, y, z) tend vers le point (ξ, η, ζ) de s, $V(x, y, z)$ tend vers la valeur $V(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma v_n(\xi, \eta, \zeta)$. Comme la remarque s'applique au cas de deux variables, on en déduit que, si la série $\Sigma f_n(z)$ converge sur s uniformément, *elle converge uniformément* dans S, et, par suite, quand z tend vers un point ζ de s, $\Sigma f_n(z)$ tend vers la valeur $\Sigma f_n(\zeta)$, ce qui ne résultait pas de la première démonstration.

Quand la série $\Sigma v_n(x, y, z)$ ne converge pas uniformément sur s, le théorème n'est plus démontré. Toutefois, en s'appuyant sur la formule

$$4\pi V(x, y, z) = \int\!\!\int_s \left[V(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dn}(\xi, \eta, \zeta) \right] ds,$$

on peut l'étendre à certains cas où les séries Σv_n, $\sum \frac{dv}{dn}$ convergent uniformément sur s, sauf sur des lignes de s.

10. Les théorèmes qui précèdent nous seront utiles dans la suite. Ils s'étendent facilement aux séries dont les termes sont des fonctions holomorphes dans un certain domaine de plusieurs variables complexes, $z, u, v, \ldots$. Leur application à la série de Taylor, dans le cas d'une ou de plusieurs variables, est immédiate et évidente. Une autre conséquence très simple est relative aux produits de la forme $\Pi f_n(z)$. Si les fonctions $\mathrm{L} f_n(z)$ sont holomorphes dans une aire S et continues sur son contour s, et si le produit converge uniformément sur s, il converge uniformément dans S, et représente une fonction holomorphe de z dans cet espace. Si le produit des modules R_n des $f_n(z)$ converge uniformément sur s, le théorème est encore vrai à condition de remplacer dans l'énoncé S par un espace quelconque S′ intérieur à S.

Revenons à la question qui nous a conduit à cette étude. Quand une série de la forme $\Sigma f_n(z)$ converge uniformément dans une aire S où les $f_n(z)$ sont holomorphes, elle représente dans S une fonction holomorphe de z. Il est impossible qu'une telle série converge uniformément dans une aire S, sauf en des points isolés, si ces points ne sont pas des points singuliers des $f_n(z)$. Supposons qu'elle converge uniformément dans une aire S, sauf aux points singuliers des $f_n(z)$, et sur une certaine ligne L : si cette ligne n'est pas singulière pour une ou plusieurs fonctions $f_n(z)$, elle rencontre le contour s de S, à moins que les fonctions f_n n'aient des points singuliers situés sur L ou tendant vers L, quand n croît indéfiniment. Autrement, en retranchant plusieurs termes de la série, on obtiendrait une série dont tous les termes seraient holomorphes à l'intérieur d'un contour fermé s' entourant L, et cette série, convergeant uniformément sur s', convergerait uniformément à l'intérieur. Ceci suppose les $f_n(z)$ uniformes dans S, sinon L peut être encore une ligne fermée entourant les points critiques d'une infinité de fonctions f_n.

Enfin, admettons qu'une série de fonctions analytiques $\Sigma f_n(z)$ convergente dans une aire S où les $f_n(z)$ sont holomorphes ne représente en aucune portion de cette aire une fonction analytique : cette série ne saurait converger uniformément dans aucune partie de S, ni sur aucun contour fermé de s' si petit qu'il soit. De plus, il existe une portion de s' pour laquelle la série ne converge uniformément dans aucun intervalle, ou bien le module maximum de $\mathrm{S}_n(z)$ sur s' croît avec n au delà de toute limite. En dernier lieu, si $f_n(z) = v_n(x, y) + i u_n(x, y)$, les deux séries Σv_n et Σu_n doivent présenter respectivement les mêmes singularités. Ces conditions étant supposées remplies, on ne saurait d'ailleurs en conclure que la série $\Sigma f_n(z)$ ne représente pas dans S une fonction analytique.

11. Pour terminer, nous déduirons des théorèmes I et II une conséquence relative au point à l'infini des fonctions holomorphes.

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe pour tout point du plan situé à distance finie dans l'intervalle AOB compris entre deux droites OA, OB. Si $[f(z)]$ ne croît pas au delà de toute limite quand z s'éloigne à l'infini entre deux droites quelconques OA_1, OB_1 comprises dans l'angle AOB, *$f'(z)$ et, par suite, toutes les dérivées successives tendent vers zéro.*

Soit S_1 l'espace A_1OB_1. Considérons la série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n}$ (les quantités a_n sont réelles et positives et la série $\sum \frac{1}{a_n}$ converge). La série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n}$ converge dans S_1 uniformément; car, si M désigne le module maximum de $f(z)$ dans S_1 et sur OA_1, OB_1, la série $\sum \frac{M}{a_n}$ est convergente. Il en résulte que la série $\Sigma f'(a_n z)$ converge uniformément dans toute aire S' intérieure à S_1, par exemple dans l'aire S' comprise entre deux droites OA', OB', et deux cercles de centre O et de rayon ρ et ρ' (ρ' est plus grand que ρ). On peut trouver un entier ν assez grand pour que, n étant égal ou supérieur à ν, $|f'(a_n z)|$ soit inférieur à ε, quel que soit z dans S'. Si l'on prend ρ et ρ' de telle manière que, pour les mêmes valeurs de n, $a_{n+1}\rho$ soit au plus égal à $a_n\rho'$, on voit aussitôt que l'affixe de tout point ζ compris entre OA', OB' et extérieur au cercle de centre O et de rayon $a_\nu\rho'$ est égal à $a_n z$, z étant un point de S' et n étant au moins égal à ν : par suite, $|f'(\zeta)|$ est inférieur à ε, quel que soit ζ. Il suffit de faire, par exemple, $a_n = n^2$ et $\rho' = 4\rho$. La fonction $f'(z)$ tend donc uniformément vers o, quand z s'éloigne à l'infini entre OA' et OB' (OA' et OB' étant deux droites quelconques comprises dans l'angle AOB).

Si le module de la fonction $\frac{f(z)}{z^p}$ ne croît pas au delà de toute limite quand z s'éloigne à l'infini OA_1 et OB_1, on voit de même, en considérant la série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n^{p+1}}$, que $f^{p+1}(z)$ et les dérivées suivantes tendent vers o.

Le théorème est encore vrai si la partie réelle (ou imaginaire) $v(x, y)$ de $f(z)$ est telle que $\left|\frac{v(x, y)}{z^p}\right|$ ne croisse pas indéfiniment quand z s'éloigne à l'infini entre OA_1 et OB_1.

Il peut arriver évidemment que $|f(z)|$ ne croisse pas indéfiniment dans une direction OA, sans que $f'(z)$ tende vers O dans cette direction. Mais, dans ce cas, $|f(z)|$ croît au delà de toute limite pour des directions infiniment voisines. La fonction $\sin(z)$ est un exemple de ce fait.

CHAPITRE II.

1. Soit $F(z)$ une fonction de z définie dans une aire S de contour s, où elle est uniforme : AB étant un fragment de s, la fonction $F(z)$ est dite *continuable* au delà de AB s'il existe une fonction $f(z)$ définie de part et d'autre de AB, coïncidant avec $F(z)$ dans une portion finie de S attenante à AB, et holomorphe pour tous les points ζ de AB, sauf pour des points ne formant pas sur AB de suite linéaire : autrement dit, pour chaque point ζ de AB (à l'exception peut-être des points α d'un ensemble ponctuel), il existe une fonction $f(z)$ représentée par une série de Taylor $f(z) = \sum a_n (z - \zeta)^n$, et qui coïncide avec $F(z)$ dans une portion de S. Il est clair que, pour chaque point ζ, il ne saurait exister qu'une seule série $f(z)$: c'est ce qu'on exprime en disant qu'une fonction continuable n'est continuable que d'une seule manière. La coupure AB est dite alors *coupure artificielle* de la fonction $F(z)$: c'est une coupure *essentielle,* si la fonction $F(z)$ n'est pas continuable au delà de AB.

Une condition nécessaire (mais évidemment insuffisante) pour que la coupure AB soit artificielle est que $F(z)$ tende vers une valeur $F_1(\zeta)$ quand le point z de S tend vers un point ζ de AB (à l'exception peut-être des points ζ d'un ensemble ponctuel). Pour trouver la condition suffisante, nous nous nous appuierons sur quelques lemmes très simples, qui ressortent de la théorie de la continuité et que nous énoncerons tout d'abord.

2. *Lemme I.* — Soit une fonction quelconque f des deux variables réelles x, y, uniforme et continue dans l'aire S. Si à tout point M de AB correspond un chemin MN variant avec M d'une manière continue, et tel que, le point (x, y) de S tendant vers M sur MN, $f(x, y)$ tende uniformément le long de AB vers la valeur $f_1(s)$ (s désignant l'arc AM) : 1° *$f_1(s)$ est une fonction continue de s*; 2° *$f(x, y)$ tend vers $f_1(s)$ quand (x, y) tend vers* M *d'une façon quelconque.*

Si petit que soit le nombre positif ε, il existe une longueur λ telle qu'en prenant sur chaque chemin MN la longueur $MP = \lambda$, pour tout point (x,y) de MP, $|f(x,y) - f_1(s)|$ soit inférieur à ε. Quand M parcourt AB, P décrit une ligne continue σ. Désignons par ξ, η les coordonnées de P, par M' un point de AB voisin de M et correspondant à l'arc $s+h$:

$$f_1(s+h) - f_1(s) = [f_1(s+h) - f(\xi', \eta')] + [f(\xi', \eta') - f(\xi, \eta)] + [f(\xi, \eta) - f(s)].$$

La fonction $f(\xi, \eta)$ étant continue, et le point (ξ, η) variant avec M d'une manière continue, on peut trouver sur AB deux points M_1, M_2 de part et d'autre de M, tels que, M' variant entre M_1 et M_2, $|f(\xi', \eta') - f(\xi, \eta)|$ soit inférieur à ε. Il existe donc un nombre k, tel que, $|h|$ étant compris entre $+k$ et $-k$, on ait

$$|f_1(s+h) - f_1(s)| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que $f_1(s)$ est continue. D'autre part, soit (x,y) un point intérieur au quadrilatère curviligne $M_1P_1M_2P_2$, formé par AB, σ, M_1P_1, M_2P_2 ; ce point est situé sur la ligne M'P', et

$$f(x,y) - f_1(s) = [f(x,y) - f_1(s+h)] + [f_1(s+h) - f(s)];$$

par suite, on a

$$|f(x,y) - f_1(s)| < 4\varepsilon.$$

On peut donc décrire du point M comme centre un cercle C de rayon assez petit pour que, (x,y) étant un point de S intérieur à C, cette condition soit réalisée. Il en résulte que $f(x,y)$ tend vers $f_1(s)$ quand (x,y) tend vers M d'une façon quelconque.

Lemme II. — Inversement, *si $f(x,y)$ tend vers $f_1(s)$, le point (x,y) de* S *tendant vers* M *sur un chemin quelconque, $f_1(s)$ est fonction continue de s, et $f(x,y)$ tend uniformément vers $f_1(s)$ le long de* AB.

En effet, à chaque point M (y compris les points A et B) correspond un cercle C de centre M et de rayon r, tel qu'on ait, pour tout point (x,y) de S intérieur à C,

$$|f(x,y) - f_1(s)| \leq \varepsilon.$$

[Autrement, il existerait, comme on le voit sans peine, des chemins MN tels que $|f(x,y) - f_1(s)|$ fût supérieur à ε pour des points (x,y) de MN aussi voisins de M que l'on voudrait, ce qui est contraire à l'hypothèse.]

Soient donc M_1 et M_2 les extrémités des deux arcs MM_1, MM_2, dont la longueur est r; M' étant compris entre M_1 et M_2, faisons tendre vers M' le point (x, y) de C; $f(x, y)$ tend vers $f_1(s+h)$ et, d'autre part, si l'on pose $f(x, y) - f_1(s) = \eta$, on a constamment $|\eta| \leq \varepsilon$; par suite, $\lim |\eta|$ ou $|f_1(s+h) - f_1(s)|$ est au plus égal à ε. La fonction $f_1(s)$ est donc continue.

De plus, M'_1 et M'_2 désignant les milieux des arcs M_1M, M_2M, à tout point M' de l'arc $M'_1M'_2$ correspond un cercle C' de centre M' et de rayon au moins égal à $\frac{r}{2}$, tel que, (x, y) étant un point de S intérieur à C,

$$|f(x, y) - f_1(s+h)|$$

soit au plus égal à 2ε. En raisonnant sur M'_1 et M'_2 comme sur M, et ainsi de suite, on atteindra les extrémités A, B de l'arc AB, à moins que le rayon r des cercles C ne tende vers o, quand leur centre M tend vers un certain point L; mais ceci est impossible, car à ce point L correspond un cercle C_1, de rayon r_1, tel que, (x, y) variant à l'intérieur de C_1, $|f(x, y) - f_1(s)|$ ne soit pas supérieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, et, par suite, aux points M voisins de L correspondent des cercles C de rayon au moins égal à $\frac{r_1}{2}$. En définitive, on peut trouver une certaine longueur ρ, telle que, (x, y) étant un point de S intérieur à un cercle C de centre M et de rayon r, on ait, quel que soit M sur AB,

$$|f(x, y) - f_1(s)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $f(x, y)$ tend uniformément vers $f_1(s)$ le long de AB.

On dit, dans ce cas, que la fonction $f(x, y)$ *prend sur* AB *les valeurs* $f_1(s)$: la fonction est *continue dans* S *et sur* s.

On peut compléter ces remarques par les suivantes : soit une fonction $f(x, y)$ définie de part et d'autre de AB dans des aires S et S′ où elle est uniforme et continue; si à chaque point M de AB correspond un chemin NMN_1 variant avec M d'une manière continue, et tel que, les points (x, y) et (x_1, y_1) de S et de S′ tendant vers M sur NMN_1, $f(x, y) - f_1(x_1, y_1)$ tende uniformément le long de AB vers la valeur $\varphi(s)$: 1° $\varphi(s)$ *est une fonction continue de* s; 2° *la fonction* $f(x, y)$ *définie dans* S *prend sur* AB *une suite continue de valeurs* $f_1(s)$, *et la fonction* $f_1(x_1, y_1)$ *définie dans* S′ *prend sur* AB *les valeurs* $f_1(s) + \varphi(s)$.

On part encore de ce fait qu'il existe une longueur l telle, qu'en prenant sur MNM_1 les arcs MP et MP_1 de longueur l, on ait, si (x, y) est un point de

MP, $x_1 y_1$ un point de MP_1, $|f(x, y) - f(x_1, y_1) - \varphi(s)| < \varepsilon$, quel que soit le point M sur AB. Le raisonnement s'achève comme précédemment.

De même, si la différence $f(x, y) - f(x_1, y_1)$ tend vers $\varphi(s)$ quand le point (x, y) de S et le point (x_1, y_1) de S′ tendent vers M d'une manière quelconque, la fonction $\varphi(s)$ est continue, et les fonctions $f(x, y)$ et $f(x_1, y_1)$ prennent sur AB une suite continue de valeurs.

De ce qui précède, il résulte qu'il est impossible que $f(x, y)$ prenne sur AB une suite discontinue de valeurs. Il arrive qu'à chaque point M de AB correspond un chemin MN, tel que $f(x, y)$ tende sur ce chemin vers $f_1(s)$, $f_1(s)$ étant discontinue; mais sur des chemins infiniment voisins de MN, la valeur de $f(x, y)$ ne tend vers aucune limite ou tend vers une limite différente de $f_1(s)$. On le voit directement, en remarquant qu'il existe des points M′ aussi voisins de M que l'on veut sur AB, pour lesquels $|f_1(s+h) - f_1(s)|$ est supérieur à un certain nombre α. Si l'on prend sur MN, M′N′ deux points (x, y), (x', y') très voisins de M et de M′, $f(x, y)$ et $f(x', y')$ diffèrent très peu de $f_1(s)$ et $f_1(s+h)$, et sur un chemin quelconque joignant ces deux points, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(x, y)$ et $f(x', y')$: pour des points (x, y) aussi voisins de M que l'on veut, $|f(x, y) - f_1(s)|$ est donc supérieur à une certaine valeur.

La même singularité peut se présenter, $f_1(s)$ étant continue. Supposons par exemple que la courbe s soit formée d'un segment de Ox et d'un demi-cercle ayant l'origine pour centre. La fonction $e^{-\frac{1}{z^4}}$, continue dans S, tend sur la normale en M à s vers une valeur $f_1(s) + i f_2(s)$, fonction continue de l'arc s. En particulier, quand z tend vers l'origine sur l'axe des y, $e^{-\frac{1}{z^4}}$ tend vers o; mais, pour d'autres directions OM, $\left|e^{-\frac{1}{z^4}}\right|$ croît au delà de toute limite [1].

Il importe aussi de faire la remarque suivante : soit $F(z)$ une fonction de

---

[1] Soit encore un cercle C de centre O et de rayon R. La fonction

$$f(z) = e^{-\frac{1}{[\alpha(z-\alpha)]^4}} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

(α désignant un point de la circonférence C) est holomorphe dans C, et quand z tend vers un point ζ de C sur un rayon OM, $f(z)$ tend vers la valeur $f_1(\zeta) = \varphi_1(s) + i\psi_1(s)$, fonction continue de l'arc s de C. Mais $|f(z)|$ croît au delà de toute limite quand z tend vers α sur certaines directions. Il existe une fonction $V(x, y)$ et une seule, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, régulière dans C, et *prenant* sur s les valeurs $V_1(s)$ (V_1 étant fonction con-

z holomorphe dans S, et continue sur s, si l'on trace dans S un chemin ANB quelconque,

$$\int_{\text{ANB}} F(z)\,dz = \int_{\text{AB}} F(z)\,dz.$$

Tout d'abord, si AN'B est un second chemin tracé dans S, on voit aussitôt que

$$\int_{\text{ANB}} F(z)\,dz = \int_{\text{AN'B}} F(z)\,dz.$$

Par chaque point M de AB menons une parallèle à Ox et prenons sur cette parallèle une longueur $\text{MP} = l$, telle que, z_1 désignant l'affixe de M, z l'affixe de P, on ait, quel que soit M sur AB,

$$|F(z_1) - F(z)| < \varepsilon.$$

Par suite, comme $dz_1 = dz$,

$$\int_{\text{AB}} F(z_1)\,dz_1 = \int_{\text{P}_1\text{P}_2} F(z)\,dz + \eta,$$

$|\eta|$ étant inférieur à εs_1, si s_1 est la longueur de l'arc AB. D'autre part,

$$\left|\int_{\text{AP}_1} F(z)\,dz\right| \quad \text{et} \quad \left|\int_{\text{BP}_2} F(z)\,dz\right|$$

---

tinue de s). Cette fonction est donnée par l'intégrale connue

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\text{C}} \frac{(1-a^2)V_1(s)\,ds}{r^2}.$$

[En s'appuyant sur ce que $V_1(s)$ est uniformément continue sur C, on démontre, en effet, que $V(x,y)$ tend *uniformément* vers $V_1(s)$ le long de C.] Cette fonction V peut se déduire également du développement de $V_1(s)$ en série de Fourier, comme on le voit sans peine en remarquant que cette série converge uniformément. Prenons en particulier $V_1(s) = \varphi_1(s)$: la fonction $V(x,y) - \varphi(x,y)$ est régulière dans C et tend vers o quand (x,y) tend vers C sur un rayon OM ; mais elle n'est pas identiquement nulle. Le point α considéré plus haut étant quelconque, on voit qu'il existe une infinité de fonctions V régulières dans C et tendant vers zéro quand le point (x,y) tend vers C sur la normale. Il existe en conséquence une *infinité* de fonctions $V(x,y)$ satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, régulières dans une aire S de contour s, et tendant vers la suite continue de valeurs $V_1(s)$ quand x, y tend vers s sur la normale à cette courbe. Si $V_1(s)$ est discontinue en certains points $a, b, c, \ldots$ de C, il existe encore une infinité de fonctions tendant vers $V_1(s)$ sur chaque normale à C (sauf pour les points $a, b, \ldots$) : pour ces points, la fonction $V(x,y)$ qu'on déduit de la série de Fourier tend sur la normale à C vers $\frac{V_1(s+0)+V_1(s-0)}{2}$, *mais ce n'est pas la seule.*

sont inférieurs respectivement à $M_1 l$ et $M_2 l$, M_1 et M_2 étant les modules maxima de $F(z)$ sur AP_1 et sur BP_2. Il en résulte qu'on peut prendre la longueur l assez petite pour que l'on ait

$$\left| \int_{AP_1P_2B} F(z)\,dz - \int_{AB} F(z)\,dz \right| < \sigma,$$

σ étant un nombre positif aussi petit qu'on veut; mais

$$\int_{AP_1P_2B} F(z)\,dz = \int_{ANB} F(z)\,dz.$$

Cette dernière intégrale est donc égale à $\int_{AB} F(z)\,dz$.

On en conclut immédiatement que, si s' désigne le contour formé par AB et une ligne ANB de S, x étant un point intérieur à ce contour,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{s'} \frac{F(z)\,dz}{z-x} = F(x).$$

Cette égalité est encore vraie quand $F(z)$ est *continue sur* AB, *sauf en certains points* $a, b, c, \ldots$ ne formant pas un ensemble linéaire, pourvu que, si l'on trace dans S une ligne σ (formée de plusieurs parties) et séparant les points $a, b, c, \ldots$ du reste de S, $\left|\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x}\right|$ tende vers o avec la longueur totale de σ. Cette condition est toujours remplie quand $|F(z)|$ ne croît pas dans le voisinage de AB au delà de toute limite. Au cas contraire, l'intégrale $\int_{s'} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ peut avoir un sens et ne pas représenter $F(x)$. Par exemple, supposons que s' soit formé d'un segment de Ox et d'un demi-cercle ayant son centre à l'origine, $\int_{s'} \frac{e^{-\frac{1}{z^4}}\,dz}{z-x}$ n'a pas pour valeur $e^{-\frac{1}{x^4}}$.

Lemme III. — Si une fonction $f(x,y)$ uniforme dans S admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues dans cet espace et prenant sur AB les valeurs $f_x(s)$, $f_y(s)$, *la fonction* $\frac{df}{dl}$ (*l désignant une direction quelconque*) *prend aussi sur* AB *une suite continue de valeurs* $f_l(s)$, *et la valeur du rapport* $\frac{f(x,y)-f_1(s)}{\Delta l}$ *tend vers* $f_l(s)$ *quand le point* (x, y) *de* S *tend vers* M *sur une parallèle* MN *à* l.

Soit α l'angle que fait avec Ox la direction l :

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{df}{dy}\sin\alpha;$$

donc $\frac{df}{dl}$ prend sur AB la suite continue de valeurs $f_x(s)\cos\alpha + f_y(s)\sin\alpha$. D'autre part, (x, y), (x_0, y_0) étant deux points de S,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

L'intégrale qui figure dans ce second membre est prise le long d'un chemin quelconque de S joignant les points (x_0, y_0) et (x, y). Si l'on fait tendre (x, y) vers le point M (ξ, η) de AB, on voit aussitôt que l'intégrale tend vers une valeur indépendante du chemin d'intégration ; la fonction $f(x, y)$ est donc continue sur la ligne AB, $f_1(s)$ est sa valeur au point M. Considérons un second point M′ de AB

$$f_1(s) - f_1(s') = \int_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne quelconque de S joignant (ξ', η') et (ξ, η). On démontre, comme pour l'intégrale $\int F(z)\,dz$, que

$$\int_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \int_{M'M} f_x(s)\,dx + f_y(s)\,dy.$$

Ceci posé, soit un point P ou (x, y) de S, situé sur une parallèle MP à l, et désignons par Δl la longueur MP précédée du signe + ou —, suivant que les deux directions l et MP sont de même sens ou de sens contraire.

$$f(x, y) - f_1(s) = \int_{\xi, \eta}^{x, y} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

(l'intégrale étant prise le long de MP) ; par suite

$$f(x, y) - f_1(s) = [f_x(s) + \varepsilon](x - \xi) + [f_y(s) + \varepsilon'](y - \eta),$$

ε et ε' tendant vers o avec Δl. On a donc

$$\lim \frac{f(x, y) - f_1(s)}{\Delta l} = f_x(s)\cos\alpha + f_y(s)\sin\alpha = f_l(s).$$

De plus, (ξ', η') étant un second point de AB,

$$f_1(s') - f_1(s) = \int_{\mathrm{MM'}} f_x(s)\,dx + f_y(s)\,dy.$$

On en conclut que $f_1(s)$ admet une dérivée $f'_1(s)$, égale à

$$f_x(s)\cos\beta + f_y(s)\sin\beta$$

(β désignant l'angle avec Ox de la tangente en M à l'arc AB menée dans le sens des arcs croissants).

Le raisonnement s'étend au cas où les axes Ox et Oy ne sont pas rectangulaires.

En particulier, si $u = f(z)$ est une fonction holomorphe dans S et si sa dérivée $f'(z)$ tend vers $f'(\zeta)$ quand z tend vers un point ζ de AB, $\lim \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = f'(\zeta)$; de plus, $\dfrac{f(\zeta_1) - f(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta}$ tend vers $f'(\zeta)$ quand ζ_1 tend vers ζ sur AB. On voit que la courbe A'B', que décrit le point u quand z décrit AB, a une tangente en chaque point, et qu'à toute courbe MN, décrite par z dans S et coupant AB sous un certain angle, correspond dans le plan des u une courbe M'N' coupant A'B' sous le même angle.

Une fonction $f(x, y)$ peut prendre sur AB les valeurs $f_1(s)$, $f_1(s)$ admettant une dérivée $f'_1(s)$, sans que les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, continues dans S, tendent vers une limite le long de AB. Il est facile de former des exemples de cette singularité qui *se présente nécessairement si* $f'_1(s)$ *est discontinue*, $\dfrac{dx}{ds}$ et $\dfrac{dy}{ds}$ étant continues le long de AB. Mais nous démontrerons dans la suite que, si une fonction $f(z)$ holomorphe dans S prend sur AB les valeurs $f_1(s)$, $f_1(s)$ admettant une dérivée continue $f'_1(s)$, *la dérivée* $f'(z)$ *prend nécessairement sur* AB *les valeurs* $f'(\zeta) = f'_1(s)\dfrac{ds}{d\zeta}$ (ceci suppose toutefois que, le long de AB, les dérivées $\dfrac{d\zeta}{ds}$, $\dfrac{d^2\zeta}{ds^2}$ existent et soient continues).

Une dernière conséquence est relative aux fonctions $V(x, y)$ régulières dans S et satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$. Si les dérivées $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ prennent sur le contour s une suite continue de valeurs, il en est de même de $V(x, y)$; de plus, on peut prendre sur chaque normale MN à s une longueur $\mathrm{MP} = l$ assez petite pour que, les points (x, y) et (x_1, y_1) étant compris entre M et P,

$\left| \frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV(x_1,y_1)}{dn} \right|$ soit inférieur à ε (n désigne la direction MN). Il en résulte aussitôt que

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \left[V_1(s)\frac{dLr}{dn} - \frac{dV_1}{dn}(s)Lr \right] ds = V(x,y)$$

$[r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, (x,y) est un point de S, (x_0,y_0) un point de $s]$. Cette égalité subsiste si $\frac{\partial V}{dx}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sont discontinues en certains points de s, ne formant pas un ensemble linéaire, pourvu que les modules de $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ ne croissent pas dans S au delà de toute limite. Pour qu'elle soit exacte, il suffit encore que V soit continue sur s, et qu'à tout nombre ε corresponde une longueur l, telle qu'en prenant sur chaque normale MN à s la longueur $MP = l$, on ait, pour deux points quelconques (x,y), (x_1,y_1) de MP,

$$\left| \frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV(x_1,y_1)}{dn} \right| < \varepsilon.$$

Les lemmes (I), (II) et (III) s'étendent évidemment, ainsi que les remarques qui s'y rattachent, aux fonctions $f(x,y,z)$ de trois variables réelles, et en particulier aux fonctions $V(x,y,z)$ qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

3. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire* S *de contour s, et prenant sur l'arc* AB *de s les valeurs $f_1(s)$. S'il existe une fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans un espace* S′ *extérieur à* S *et attenant à* AB, *qui prenne sur* AB *les valeurs $f_1(s)$, la fonction* $F(z)$ *égale à $f(z)$ dans* S, *à $\varphi(z)$ dans* S′, *est holomorphe dans l'aire totale* Σ *formée par les deux aires* S et S′.

En effet, traçons dans S et S′ les chemins ANB, AN′B. Si x désigne un point intérieur au contour ABNA, x' un point intérieur au contour ABN′A, on a (le sens AB étant le sens direct du premier contour)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{ABNA}\frac{f(z)\,dz}{z-x}, \qquad 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{BAN'B}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},$$

$$\varphi(x') = \frac{1}{2i\pi}\int_{BAN'B}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x'}, \qquad 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{ABNA}\frac{f(z)\,dz}{z-x'}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}2i\pi F(x) &= \int_{ABNA} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{BAN'B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} \\ &= \int_{BNA} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{AN'B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \int_{AB} \frac{f(z)-\varphi(z)\,dz}{z-x} \\ &= \int_{\sigma} \frac{F(z)\,dz}{z-x}\end{aligned}$$

(σ représentant le contour AN′BNA). La fonction $F(x)$ est donc holomorphe dans Σ.

On peut remarquer que le théorème subsiste, si à tout le nombre ε correspondent des longueurs l et l' et pour chaque point M de AB un chemin N′MN variant avec M d'une manière continue et tel qu'en prenant sur N′MN, de part et d'autre de M, les longueurs $MP = l$, $MP' = l$, on ait, quel que soit M, $|f(z) - \varphi(z')| \leq \varepsilon$, z et z' étant les affixes des points P et P′. Cette condition est remplie par exemple si, z et z' étant deux points situés sur la normale en M à AB à la même distance d de M, on peut prendre la longueur d assez petite pour que $|f(z) - \varphi(z')|$ soit inférieur à ε le long de AB.

D'après le théorème qui précède, on voit qu'une fonction $F(z)$ *uniforme et continue dans une aire* S *est holomorphe dans* S *ou y présente des espaces lacunaires;* car, si elle est holomorphe en chaque point de S, sauf peut-être sur certaines lignes, elle est aussi holomorphe en chaque point de ces lignes.

Ce théorème permet également d'énoncer la proposition suivante :

Pour qu'une fonction $f(z)$ définie du côté C *de* AB *et holomorphe dans le voisinage de* AB *soit continuable au delà de cette ligne, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de z, $\varphi(z)$ définie du côté opposé* C′ *de* AB, *uniforme dans le voisinage de* AB *et prenant la même valeur que $f(z)$ en chaque point de cette ligne* (à l'exception peut-être des points d'un ensemble ponctuel).

En particulier, si une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire S de contour s prend sur une portion quelconque AB de s une valeur constante, elle est une constante dans S. Par suite, si deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$, holomorphes dans S, prennent sur la coupure AB les mêmes valeurs, elles coïncident dans S ; car la différence $f(z) - f_1(z)$, nulle sur AB, est nulle dans S.

Les raisonnements qui précèdent supposent que la courbe AB admet en chaque point M (sauf aux points d'un ensemble ponctuel) *une tangente* *variant avec* M *d'une manière continue.* On peut donner de la dernière proposition une démonstration qui s'applique à une courbe *continue quelconque*.

Il suffit de prouver que, si la fonction $f(z)$ holomorphe dans S s'annule le long de AB, elle est nulle dans S. Soit z_0 et z_1 deux points de AB; posons $z' = (z - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; à la ligne AB et à l'aire S correspondent une ligne A′B′ et une aire S′ qu'on obtient en faisant tourner AB et S de l'angle α autour du point z_0. Posons de même $z'' = (z - z_1)(\cos\beta + i\sin\beta)$; à AB et à S correspondent A″B″ et S″. En prenant les points z_0, z_1 assez voisins, on peut choisir les angles α et β de telle sorte que les aires S, S′, S″ aient une partie commune Σ limitée par des fragments de AB, A′B′, A″B″. Considérons le produit $f(z)f(z')f(z'')$. C'est une fonction de z holomorphe dans Σ, car $f(z)$ est holomorphe dans S, $f(z')$ dans S′, $f(z'')$ dans S″. De plus, ce produit $P + iQ$ s'annule sur le contour σ de Σ. Les deux fonctions P, Q, régulières dans Σ, satisfont dans cette aire aux équations $\Delta P = 0$, $\Delta Q = 0$ et s'annulent sur σ; elles sont donc identiquement nulles. Il en résulte qu'un au moins des trois facteurs et, par suite, les trois facteurs du produit, sont nuls dans Σ. La fonction $f(z)$ est nulle dans l'aire S.

Ajoutons encore que, si la fonction $f(z)$ est continue le long de AB et s'annule en des points formant un ensemble linéaire ayant AB pour limite, $f(z)$ s'annule le long de AB; autrement, elle prendrait pour des points infiniment voisins des valeurs discontinues; elle est donc identiquement nulle dans S.

Nous allons appliquer immédiatement les remarques précédentes à l'étude de quelques propriétés des fonctions définies par une relation implicite ou une équation différentielle.

4. *Théorèmes sur les fonctions implicites.* — Soit $f(z, u)$ une fonction uniforme de deux variables z et u, holomorphe quel que soit u (sauf pour $u\infty$) quand z varie dans une aire simple S. Si l'équation en u, $f(z_0, u) = 0$, (z_0 étant un point de S), a une infinité de racines, *les points z pour lesquels l'équation n'a qu'un nombre donné, n, de racines forment au plus dans Σ une suite ponctuelle,* Σ étant un espace quelconque intérieur à S, sans points communs avec son contour s.

Supposons que la fonction $f(z, u)$ s'annule pour $z = z_0$, $u = u_0$. Quand $\frac{\partial f}{\partial u}(z_0, u_0)$ n'est pas nul, l'équation $f(z, u) = 0$ définit une fonction de u égale à u_0 pour $z = z_0$, et homolorphe dans le voisinage de $z = z_0$. Quand

$\frac{\partial f}{\partial u}(z_0, u_0) = 0$, une dérivée $\frac{\partial^p f}{\partial u^p}$ ne s'annule pas pour u_0, z_0 [autrement, $f(z_0, u)$ est nulle identiquement, et $f(z, u)$ contient en facteur une puissance de $(z - z_0)$ qu'on peut supprimer]. La relation $f = 0$ définit alors une fonction égale à u_0 au point z_0 et admettant ce point comme point critique algébrique : u est dans tous les cas développable suivant les puissances de $(z - z_0)^{\frac{1}{p+1}}$, à l'intérieur d'un certain cercle C. Ces propriétés rappelées, traçons dans S un chemin quelconque L de longueur finie joignant les points z_0, z. Prenons sur L un point z' intérieur à C. La fonction u est égale à u' en z' (si z_0 est un point critique de u, on choisit arbitrairement une des $p + 1$ valeurs de u). En raisonnant sur z' comme sur z_0, et ainsi de suite, on arrive à un cercle comprenant z à son intérieur, à moins que le chemin $z_0 z$ ne rencontre un point singulier de u. Soit ζ ce point, je dis que, *quand z tend vers ζ, u tend vers l'infini.* En effet, u ne peut tendre vers une valeur finie V; car le couple (ζ, v) serait analogue au couple (z_0, u_0). Supposons que u soit indéterminé; il existe alors un nombre R tel que $|u(z)|$ soit inférieur à R pour des points z de L compris entre z' et ζ, si voisin que z' soit de ζ, et un nombre ρ tel que pour des points z et z_1, compris entre z' et ζ, on ait $|u(z) - u(z_1)| > \rho$. A l'intérieur du cercle C_1 décrit dans le plan des u de l'origine comme centre avec R comme rayon, l'équation $f(\zeta, u) = 0$ a un nombre fini de racines $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, qui varient avec ζ d'une manière continue. (Quand un de ces points est sur C_1, on donne à R une valeur un peu plus grande.) Traçons dans le plan des z un cercle γ de centre ζ et de rayon assez petit pour que $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ quand z varie dans γ, restent compris dans des cercles $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ de rayon inférieur à $\frac{\rho}{2}$, sans points communs et intérieurs au cercle C_1. Soit enfin A le module minimum de $f(z, u)$ quand z varie dans γ, et u dans l'espace T intérieur à C_1 et extérieur aux cercles c. On peut toujours, ainsi qu'il sera démontré dans un instant, prendre γ assez petit pour que A ne soit pas nul, c'est-à-dire pour que $f(z, u) = 0$ n'ait pas dans C d'autres racines que les ν valeurs $u_1, \ldots, u_\nu$. Quand z tend vers ζ, u qui varie avec z d'une manière continue n'est ni constamment extérieur à C_1, ni constamment intérieur à un cercle c, sinon $|u(z) - u(z_1)|$ serait constamment inférieur à ρ. On voit donc que, pour des valeurs z' de z intérieures à γ, u prend des valeurs u' intérieures à T. Mais $|f(z', u')|$ est au moins égal à A, et, par hypothèse, $f(z', u') = 0$. La fonction $u(z)$ ne peut être indéterminée, et par suite tend vers l'infini quand z tend vers ζ.

Ce point établi, nous ferons encore les deux remarques suivantes, nécessaires à la démonstration : 1° *quand z_0 varie dans une aire Σ intérieure à* S, *l'équation $f(z_0, u) = 0$ n'admet qu'un nombre fini q de racines dont le module soit inférieur à un nombre donné* M. En effet, pour chaque point z_0 de Σ, l'équation n'admet qu'un nombre q_0 de racines répondant à la condition (en tenant compte des degrés de multiplicité). Il suffit de prendre pour valeur de q le plus grand des nombres q_0, quand z_0 varie dans Σ. Ce maximum existe, autrement q_0 croîtrait indéfiniment quand z_0 tendrait vers un certain point ζ. En ce point ζ, l'équation n'admet qu'un nombre fini p de racines (égales ou distinctes), de module égal ou inférieur à M; ces racines $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ sont développables dans un certain cercle, de centre ζ et de rayon r, suivant les puissances de $(z - \zeta)$ ou de $(z - \zeta)^{\frac{1}{k}}$ (k étant un certain entier), et ces développements représentent toutes les racines de l'équation $f = 0$ qui tendent vers une des valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ quand z_0 tend vers ζ. Mais pour des points z_0 infiniment voisins de ζ, l'équation devrait être satisfaite par des racines u_0 de module inférieur à M et distinctes des précédentes, par suite ne tendant vers aucune des valeurs $v_1, \ldots, v_p$, quand z_0 tend vers ζ. Autrement dit, pour des points z_0 aussi rapprochés de ζ qu'on voudrait, l'équation admettrait des racines u_0 telles que les modules des différences $u_0 - v_1$, $u_0 - v_2, \ldots, u_0 - v_p$ fussent supérieurs à un certain nombre h. Or, soit A le module minimum de $f(\zeta, u)$ quand u décrit l'espace T intérieur au cercle C_1 ayant M pour rayon et l'origine pour centre, et extérieur aux cercles c, de rayon h et de centres $v_1, v_2, \ldots, v_p$. On peut décrire de ζ comme centre un cercle γ de rayon assez petit pour que, z variant dans γ et u dans T, on ait constamment

$$|f(\zeta, u) - f(z, u)| < \frac{A}{2}.$$

Or, pour un point z' de γ et u' de T, on devrait avoir

$$f(z', u') = 0 \qquad \text{et par suite} \qquad |f(\zeta, u')| < \frac{A}{2},$$

ce qui est impossible, puisque $|f(\zeta, u')|$ est au moins égal à A.

2° Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction analytique de z. On sait que, si $f(z)$ est holomorphe au point $z_0 = x_0 + iy_0$, les deux fonctions P et Q ne peuvent présenter au point z_0 ni maximum ni minimum. Il en est de même *si*

z_0 est un point critique algébrique de $f(z)$. En effet, on peut développer $f(z)$ de la manière suivante :

$$f(z) = P + iQ = (P_0 + iQ_0) + a(z - z_0)^{\frac{1}{p}} + \ldots.$$

Si z décrit p fois un petit cercle de centre z_0, $P + iQ$ décrit un contour enfermant $P_0 + iQ_0$; par suite, P prend des valeurs inférieures et supérieures à P_0 dans le voisinage de $x_0 y_0$, et la même chose a lieu pour Q et Q_0.

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème énoncé. Pour $z = z_0$, l'équation a par hypothèse une infinité de racines. Considérons dans l'aire Σ intérieure à S et comprenant z_0 tous les points z' pour lesquels l'équation $f(z', u) = 0$ n'a pas plus de n racines, et supposons que ces points forment un ensemble superficiel. Ils comprennent alors *tous* les points d'une certaine aire S'; car, si pour un point z_0 l'équation $f(z_0, u) = 0$ a $n + 1$ racines, ces $(n + 1)$ racines peuvent se développer en série dans un certain cercle de centre z_0, et pour les points z_1 de ce cercle, l'équation a $(n + 1)$ racines. Cet espace S' est séparé du reste de Σ par une ligne continue L, et pour tout point z_0 de L, l'équation $f(z_0, u) = 0$ n'a pas plus de n racines; sinon il en serait de même pour les points de S' voisins de z_0.

De même, si les points z' forment un ensemble linéaire ayant pour limite une ligne L, pour tout point z_0 de L l'équation $f(z_0, u) = 0$ n'a pas plus de n racines. Soit donc ν le nombre maximum des racines de $f(z_0, u) = 0$ quand z_0 décrit un segment de L (ν est inférieur ou égal à n). Pour $z_0 = \zeta$, l'équation $f = 0$ a ν racines. Si ζ est un point critique algébrique de l'une d'elles, on le remplace par un point z_0 voisin; au point z_0 ainsi choisi, les ν racines sont holomorphes et développables en série de Taylor dans un certain cercle C de centre z_0.

Pour des points z de C voisins de L et extérieurs à S' (si S' existe), l'équation $f(z, u) = 0$ admet des racines u' distinctes des précédentes et ne se permutant pas avec elles à l'intérieur de C. Joignons z à un point z_0 de L par un chemin de longueur finie contenu dans C : si la fonction u' est définie le long de λ, elle tend vers l'infini quand z tend vers z_0 sur λ; sinon, le chemin λ renferme un point pour lequel u' devient infinie.

Tout d'abord, si l'on peut séparer un nombre fini de valeurs de u' qui ne se permutent qu'entre elles dans le voisinage de L, le produit $u'_1 \ldots u'_j$ est uniforme aux environs de L et doit tendre vers l'infini le long de cette ligne : le théorème établi dans le paragraphe précédent montre que c'est impossible.

Il faut donc supposer que les valeurs de u' présentent dans le voisinage de L un nombre infini de points de ramification formant une suite linéaire. Appelons C_1 la partie de C extérieure à S'. D'après la remarque (1), il n'existe qu'un nombre fini q de valeurs de u' dont le module soit inférieur à un nombre donné M pour un point de C'. De plus, on peut toujours prendre le rayon de C assez petit pour qu'aucune de ces valeurs ne s'annule dans C_1; [il suffit que C_1 ne renferme aucun des zéros de la fonction $f(z, 0)$, lesquels sont nécessairement isolés dans S, puisque $f(z, 0)$ est holomorphe dans cette aire]. Soit donc N le module minimum dans C_1 de ces q valeurs. Si nous posons $V = \frac{1}{u}$, la fonction $V(z)$ n'est indéterminée pour aucun point de C_1; tout point z pour lequel une de ses valeurs ne s'annule pas est un point ordinaire ou un point critique algébrique de cette valeur. De plus, son module dans C_1 ne peut dépasser $\frac{1}{N} = N_1$, et elle n'admet qu'un nombre fini q de déterminations dont le module pour un point de C_1 soit supérieur ou égal à un nombre donné M_1. Enfin, si l'on joint un point de C_1 à un point z_0 de L par un chemin λ, toutes les déterminations de $V(z)$ tendent vers zéro quand z tend vers z_0 sur λ, ou quand z rencontre des points intermédiaires. Ceci posé, employons le raisonnement qui nous a déjà servi à la fin du paragraphe précédent. Soient z_0 et z_1 deux points de L; on pose $z' = (z - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z'' = (z - z_1)(\cos\beta + i\sin\beta)$, z_0, z_1, α et β étant choisis de telle sorte que les aires C'_1 et C''_1 qui correspondent à C_1 aient avec C_1 une partie commune Σ_1 dont le contour σ_1 soit formé de fragments de L, L', L''. Considérons alors le produit $\varphi(z) = V(z)V(z')V(z'')$. Chacune des fonctions $V(z')$ et $V(z'')$ jouit dans C'_1 et C''_1, et par suite dans l'aire Σ_1, des propriétés énoncées pour $V(z)$. En conséquence, le produit $\varphi(z)$ ne peut être indéterminé en un point de Σ_1; si une valeur de $\varphi(z)$ ne s'annule pas en un point z, ce point est un point ordinaire ou algébrique de cette valeur. De plus, $|\varphi(z)|$ ne peut dépasser N_1^3 dans Σ_1; et, si z décrit un chemin λ joignant un point de Σ_1 à un point z_0 de σ_1, toutes les déterminations de $\varphi(z)$ s'annulent quand z tend vers z_0 sur λ, ou rencontre des points intermédiaires. Enfin, $\varphi(z)$ n'étant pas identiquement nulle dans Σ_1, pour un point z de cette aire, une valeur de $\varphi(z)$ a un certain module A.

D'autre part, chacune des trois fonctions V, V', V'' n'admet qu'un nombre fini q de déterminations dont le module prenne dans Σ_1 une valeur supérieure ou égale à $\frac{A}{N^2}$. Si l'on considère une détermination de V qui ne satisfasse pas à cette condition, le produit $VV'V''$ a un module inférieur, dans Σ_1, à $\frac{A}{N_1^2}|V'|\times|V''|$ ou, *a fortiori*, à A. Il en est de même pour les déterminations analogues de V' et V''. Pour tout point z de Σ_1, il ne saurait donc exister que q^3 valeurs de $\varphi(z)$ au plus, dont le module soit supérieur ou égal à A. Formons pour chaque point de Σ_1 les q^3 valeurs de $\varphi(z)$ de plus grand module. Ces modules, étant inférieurs à N_1^3, admettent une valeur maxima P, qui correspond à un point z' de Σ_1. Ce point z' ne peut être sur le contour σ_1; autrement dit, le module d'une valeur de $\varphi(z)$ ne peut tendre vers P quand z tend vers un point de L, puisque ce module doit tendre vers zéro. De plus, P n'étant pas nul, ce point z' est un point ordinaire ou algébrique pour la valeur $\varphi(z')$ dont le module est P, ainsi que pour la fonction $\log\varphi(z) = LP(x,y) + i\Theta$. Mais la valeur pour $z=z'$ de la fonction $LP(x,y)$ doit être supérieure ou égale aux valeurs qu'elle prend pour les points voisins, ce qui est impossible d'après la seconde remarque. Le théorème est donc démontré.

Nous avons supposé que pour toute valeur de z intérieure à S la fonction $f(z,u)$ était holomorphe dans le plan des u. Mais le raisonnement s'applique aussi bien si, pour les mêmes valeurs de z, $f(z,u)$ admet, dans le plan des u, m points essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et des pôles en nombre quelconque ($a_1, \ldots, a_m$ étant des constantes).

On démontre alors, comme plus haut, que, si un point z_0 est un point singulier (non critique algébrique) d'une racine $u(z)$, cette racine tend nécessairement vers une des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, quand z tend vers z_0; en outre, si z_0 varie dans une aire Σ intérieure à S, l'équation $f(z_0,u)=0$ admet au plus un nombre q de racines telles que le module du produit $(u-a_1)(u-a_2), \ldots, (u-a_m)$ soit supérieur à un nombre donné M. On pose $V(z) = (u-a_1), \ldots, (u-a_n)$; il suffit de répéter identiquement le raisonnement fait sur $V(z)$ dans le premier cas.

Le théorème subsiste encore si les affixes des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne sont pas des constantes, mais dépendent analytiquement de z. A chaque point z de S correspondent m valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$ fonctions analytiques de z. Les quantités Σa_i, $\Sigma a_i a_j$, ... sont dans S des fonctions uniformes de z, qui n'admettent que des pôles isolés; en conséquence, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont racines d'une relation algébrique

$$U^m \varphi_m(z) + U^{m-1}\varphi_{m-1}(z) + \ldots + \varphi_0(z) = 0,$$

où $\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots, \varphi_0$ sont holomorphes dans S. Il suffit de considérer le produit

$$V = \varphi_m \times (u - a_1) \ldots (u - a_n) = u^m \varphi_m(z) + u^{m-1} \varphi_{m-1}(z) + \ldots + \varphi_0(z),$$

et de raisonner sur V comme dans le premier cas. On voit que V devrait être identiquement nul, ce qui est impossible, puisque $f(z, u) = 0$ par hypothèse, et que $f(z, a_i)$ est indéterminée.

Nous pouvons, en définitive, énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — Soit $f(z, u)$ une fonction uniforme des deux variables z et u telle que, pour toute valeur z_0 de z intérieure à une aire S, la fonction $f(z_0, u)$ ne présente dans le plan des u que m points essentiels, dont les affixes sont des fonctions analytiques de z. *Si l'équation* $f(z, u) = 0$ *n'admet qu'un nombre n de racines pour des points z' formant dans une aire* Σ, *intérieure à* S, *une suite linéaire*, *il en est de même pour tous les points* z *de* S.

En effet, si L désigne une ligne limite de la suite des points z', la démonstration précédente prouve que l'équation ne peut avoir plus de n racines pour les points z, voisins de L. Considérons donc tous les points de S pour lesquels $f = 0$ n'a pas plus de n racines. Ces points forment une certaine aire S'; si S' est intérieure à S, elle est séparée du reste de S par une ligne L', et pour des points z voisins de L', intérieurs à S et extérieurs à S', l'équation $f = 0$ doit avoir plus de n racines, ce qui est impossible. La fonction $u(z)$, définie par $f = 0$, n'admet dans S que n valeurs au plus, et n'y est jamais indéterminée. On en conclut qu'elle vérifie une relation de la forme

$$\psi_n u^n + \psi_{n-1} u^{n-1} + \ldots + \psi_0 = 0,$$

$\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots, \psi_0$ étant holomorphes dans S.

En particulier, supposons que la fonction f satisfasse aux conditions précédentes pour tous les points z_0 du plan z, sauf pour les points z_0 d'une suite ponctuelle [ces points z_0 sont des points essentiels de la fonction $f(z, u_0)$, quel que soit u_0]. Si, pour un point z_1, l'équation en u, $f(z_1, u) = 0$, a une infinité de racines, les points z pour lesquels elle n'en a qu'un nombre donné n ne forment dans le plan qu'une suite ponctuelle. Les points z_0 sont les seuls où une racine u puisse être indéterminée. Soit, par exemple, l'équation $e^u = f(z)$, où $f(z)$ est uniforme dans le plan des z et admet des points essentiels z_0 et des zéros z' ayant ces points pour limites : pour tous les points z', l'équation n'a pas de racines, et pour les points z_0, u est indéterminée.

Considérons, pour terminer, une fonction $f(z, u)$ telle que, pour tout point z_0 de l'aire S, la fonction $f(z_0, u)$ présente dans le plan des u des points essentiels formant une suite ponctuelle, les affixes de ces points $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ dépendant analytiquement de z. Les valeurs $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ doivent donc être considérées comme les diverses déterminations d'une fonction analytique $A(z)$. Nous supposons qu'une quelconque de ces déterminations ne présente pas dans S une suite linéaire de points critiques. D'une manière plus précise, quand on part d'un point z_0 de S avec une détermination particulière $a_i(z_0)$ et qu'on fait varier z_0 de manière à le faire passer une fois et une seule par chaque point de S, en contournant tous les points critiques de la valeur $a_i(z)$ considérée, on définit une branche $a_i(z)$ pouvant présenter des coupures dans S et ne prenant qu'une valeur en tout point de S extérieur à ces coupures. Nous admettons que les points critiques de chacune de ces branches ne forment pas dans S une suite linéaire. Ces restrictions faites, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — Si, pour tout point z_0 d'une aire S, la fonction $f(z_0, u)$ n'admet dans le plan des u qu'une suite ponctuelle de points essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ (les affixes de ces points dépendant analytiquement de z_0), *toute racine* $u(z)$ *de l'équation* $f(z, u) = 0$ *uniforme (ou ne prenant que* n *valeurs) dans une aire* Σ *de contour* σ, *intérieure à* S, *est continuable au delà de* σ, *et ne présente dans* Σ *que des pôles isolés (ou des points critiques algébriques).*

On établit encore que, si ζ est un point singulier d'une racine $u(z)$, z tendant vers ζ sur un chemin λ de longueur finie, $u(z)$ tend nécessairement vers une des valeurs $a_m(\zeta)$ et ne peut être indéterminée. La démonstration est la même que celle qui sera donnée d'une proposition analogue concernant les équations différentielles, et d'où résulte d'ailleurs la précédente. Les points singuliers de la fonction $u(z)$ dans Σ ne peuvent donc être que des pôles (ou des points critiques algébriques). Admettons qu'elle soit uniforme dans Σ et qu'elle présente une ligne singulière L : quand z tend vers un point ζ de L sur un chemin λ, en restant du même côté de L, $u(z)$ tend vers une des valeurs $a_m(\zeta)$, qui est indépendante de λ et varie avec ζ d'une manière continue; autrement, d'après les lemmes établis au début de ce Chapitre, $u(z)$ serait indéterminée quand z tendrait vers L sur certains chemins. Les valeurs de $u(z)$ le long de L coïncident donc avec une détermination $a_m(z)$ de $A(z)$, qui, par hypothèse, ne présentant pas dans Σ de suite linéaire de points critiques, est uniforme le long d'un certain segment L′ de L. Les deux fonctions $u(z)$ et $a_m(z)$ uniformes d'un côté de L′ dans le voisinage de cette ligne, et coïncidant le long de cette ligne, coïncident identiquement, d'après le théorème fondamental, ce qui est impossible puisque $f[a_m(z), z]$ est constamment indéterminée.

Le raisonnement subsiste si $u(z)$ prend dans Σ les n valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$, à condition de considérer le produit

$$[u_1 - a_{m_1}(z)][u_2 - a_{m_2}(z)] \ldots [u_n - a_{m_n}(z)],$$

qui s'annule sur L.

Quand $f(z, u)$ satisfait aux conditions énoncées, sauf pour des points z_0 de S qui ne forment pas de suite linéaire [ces points sont des points essentiels de $f(z, u_0)$, quel que soit u_0], la fonction $u(z)$ peut admettre ces points z_0 comme points d'indétermination (points essentiels), et, par suite, comme points limites de pôles ou de points critiques algébriques.

Remarque. — Si la fonction $f(z, u)$ est une fonction multiforme, mais peut être considérée comme définie par une relation $G(f, z, u) = 0$, G étant uniforme, on remplace l'équation $f = 0$ par $G(0, z, u) = 0$. Mais quand $f(z, u)$ est une fonction multiforme quelconque, les théorèmes précédents cessent d'être exacts. Considérons, par exemple, une équation $z - g(u) = 0$, g étant une fonction multiforme qui n'admet dans le plan des u qu'une suite ponctuelle de points singuliers $a_0, \ldots a_m, \ldots$. Quand z tend vers un point singulier ζ, d'une racine $u(z)$, u tend vers une des valeurs a_m, *ou est indéterminée*. Mais, dans ce dernier cas, on ne peut trouver p déterminations de $g(u)$, telles que, pour des valeurs voisines de ζ, u satisfasse à la relation $F(z, u) = (z - g_1)(z - g_2) \ldots (z - g_p) = 0$. Sinon, en raisonnant sur l'équation $F = 0$, on verrait que u tend vers une limite quand z tend vers ζ. Il faut donc qu'on puisse former avec des valeurs de $g(u)$ une suite $\zeta - g_1(u), \zeta - g_2(u), \ldots, \zeta - g_q(u), \ldots$, telle que $|\zeta - g_q(u)|$ tende vers 0 avec $\frac{1}{q}$, quand u décrit un chemin fini dans le plan, et, par suite, quel que soit u. Une racine $u(z)$ ne saurait donc présenter une coupure L (dans le voisinage de laquelle elle ne prend que n valeurs), à moins que la condition précédente ne soit remplie pour tous les points ζ de L, ce qui exige que les valeurs z de $g(u)$, pour tout point u, *forment une suite linéaire ayant* L *pour limite*. Un exemple de ce fait est offert par la fonction modulaire $z = \omega(u)$. La fonction inverse $u = \varphi^8(\omega)$ est uniforme et présente l'axe des valeurs réelles pour coupure : les valeurs de ω qui correspondent à un point u forment une suite linéaire, ayant cet axe pour limite.

La même méthode va nous permettre de démontrer un théorème utile dans la théorie des équations différentielles du premier ordre.

5. *Théorème sur les fonctions définies par une équation différentielle.* — Soit $\frac{du}{dz} = f(z, u)$ une équation différentielle du premier ordre, où $f(z, u)$ est une fonction uniforme de z et u quand z varie dans une aire S et u dans le plan des u. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés connues de l'intégrale d'une telle équation.

Si une intégrale $u(z)$ tend vers u_0 quand z tend vers z_0, $f(z_0, u_0)$ étant holomorphe, cette intégrale est elle-même holomorphe dans le voisinage de z_0, et développable par suite en série de Taylor dont on sait calculer les coefficients. Il n'existe pas d'autre intégrale prenant au point z_0 la valeur u_0, c'est-à-dire tendant vers u_0 quand z tend vers z_0 sur un chemin de longueur finie.

Si la valeur de $f(z_0, u_0)$ est infinie, il existe toujours une dérivée de $\frac{1}{f}$ par rapport à u d'un certain ordre $\left[\frac{\partial^p\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial u^p}\text{ par exemple}\right]$, qui ne s'annule pas pour (z_0, u_0), et le point z_0 est un point critique algébrique de $u(z)$ autour duquel se permutent $p + 1$ valeurs.

Quand, z tendant vers z_0, u tend vers l'infini, on pose $u = \frac{1}{u_1}$, et la fonction u_1 vérifie l'équation

$$\frac{du_1}{dz} = -u_1^2 f\left(z, \frac{1}{u_1}\right) = f_1(z, u_1).$$

Si $f_1(z_0, 0)$ est holomorphe, z_0 est un pôle de $u(z)$; si $f_1(z_0, 0)$ est infinie, z_0 est à la fois un pôle et un point critique algébrique de l'intégrale.

Ce qui précède s'étend au cas où le point z_0 est le point ∞ du plan des z;

on pose alors $z = \frac{1}{z_1}$; l'intégrale $u\left(\frac{1}{z_1}\right)$ vérifie l'équation

$$\frac{du}{dz_1} = -\frac{1}{z_1^2} f\left(\frac{1}{z_1}, u\right) = f_2(z_1, u),$$

et l'on étudie cette équation dans le voisinage de $z_1 = 0$.

Ajoutons que la valeur de $f(z_0, u_0)$ peut être indéterminée, soit parce que u_0 est un point essentiel de la fonction $f(z_0, u)$, soit parce que $f(z, u)$ est de la forme $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ et que $\mathrm{P}(z_0, u_0) = \mathrm{Q}(z_0, u_0) = 0$. Enfin, $f(z_0, u)$ est parfois infinie ou indéterminée, quel que soit u; dans ce cas, l'intégrale $u(z)$ peut elle-même être indéterminée quand z tend vers z_0.

Nous supposerons que, pour tout point z_0 de l'aire simple S, la fonction $f(z_0, u)$ n'admette dans le plan des u qu'une *suite ponctuelle* de points essentiels (ou d'indéterminations) dont les affixes $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ dépendent analytiquement de z_0, ainsi qu'il a été expliqué dans l'énoncé du théorème III (les points a_m comprennent le point ∞, si $f_1(z_0, 0)$ n'est ni holomorphe, ni infinie). Les pôles de $f(z_0, u)$, $b_1, b_2, b_m, \ldots$, ne forment eux-mêmes, en conséquence, qu'une suite ponctuelle [il n'existe pas dans S de points z_0 pour lesquels $f(z_0, u)$ est infinie ou indéterminée quel que soit u].

Dans ces conditions, soit u_0 la valeur d'une intégrale au point z_0, $f(z_0, u_0)$ étant holomorphe. Si z, partant de z_0, décrit un chemin λ de longueur finie, on peut prolonger $u(z)$ le long de λ à l'aide de la série de Taylor, à moins qu'on ne rencontre un point ζ qui soit un point singulier de $u(z)$. Si ce point n'est ni un pôle, ni un point critique algébrique de $u(z)$, je dis que $u(z)$ *tend nécessairement vers un des points* $a_1(\zeta), \ldots, a_m(\zeta), \ldots$ *quand* z *tend vers* ζ.

Tout d'abord, l'intégrale $u(z)$ ne peut tendre vers une valeur u' distincte des valeurs $a_m(\zeta)$; car, $f(\zeta, u')$ étant déterminée ou infinie, ζ serait un point ordinaire ou algébrique de $u(z)$; de même, u ne peut tendre vers l'infini [si le point ∞ n'est pas un des points $a_m(\zeta)$], car $f_1(\zeta, 0)$ étant déterminée ou infinie, ζ est un pôle ou un point critique algébrique de $u(z)$. D'autre part, l'intégrale peut-elle être indéterminée? Il existe alors un nombre R tel que $|u(z)|$ soit inférieur à R pour des points z de λ compris entre z' et ζ, si voisin que z' soit de ζ, et un nombre 2ρ tel que pour des points z et z_1, compris entre z' et ζ, on ait $|u(z_1) - u(z)| > 2\rho$. Traçons dans le plan des u un cercle C ayant l'origine pour centre et de rayon R, et un cercle C' concentrique à C, et de rayon R′ supérieur à R ; R′ = R + h. A l'intérieur de C′ les points singuliers a_m, b_m de $f(\zeta, u)$ ne forment qu'une suite ponctuelle. Nous admettons qu'aucun de ces points ne se trouve sur C ou C′ (sinon on augmenterait un peu R ou R′). On peut donc enfermer les points a_m, b_m dans p cercles c, dont les centres sont certains de ces points ($a'_1, \ldots, a_p$), de rayon r inférieur à $\frac{\rho}{4}$, et tels que, les p cercles c' concentriques et de rayon double $2r$, n'aient entre eux ou avec C et C′ aucun point commun. La distance minima de deux points situés respectivement sur les circonférences de deux cercles c', C ou C′ est donc un nombre fini k. Désignons par k' la plus grande des quantités $\frac{k}{8}$ et $\frac{\rho}{8}$. Pour des points z voisins de ζ, les points a_m, b_m sont compris dans p cercles de centres $a'_1(z), \ldots, a'_p(z)$ et de rayon r', r' différant peu de r. Traçons dans le plan des z un cercle γ de centre ζ et de rayon δ assez petit pour que $|a'_i(z) - a'_i(\zeta)|$ et $|r' - r|$ soient inférieurs à k' quand z varie dans γ. On voit qu'alors les points a_m, b_m restent compris dans p cercles c_1 de rayon ρ' inférieur à $\frac{\rho}{2}$ et tels que les p cercles concentriques c'_1, de rayon double, n'aient pas de points communs entre eux, ni avec C et C′. Ceci posé, appelons S_1 l'espace de C′ extérieur aux cercles c_1, S_2 l'espace de C extérieur aux cercles c'_1, M le module maximum de $f(z, u)$ quand z varie dans γ et u dans S_1. Pour tout point z_0 compris dans un cercle γ' concentrique à γ et de rayon $\delta' = \frac{\delta}{2}$, et pour tout point u_0 de S_2, la fonction $f(z, u)$ est holomorphe et de module au plus égal à M quand z varie dans un cercle de centre z_0 et de rayon δ', et u dans un cercle de centre u_0 et de rayon l, l désignant la plus petite des quantités h et ρ'. On en conclut que toute intégrale, égale à u_0 au point z_0, est holomorphe dans un cercle de centre z_0 et de rayon $d = \frac{\delta}{2}\left(1 - e^{-\frac{l}{M\delta}}\right)$.

Mais, si voisin que z' soit de ζ, z décrivant λ entre z' et ζ, $u(z)$ qui varie avec z d'une manière continue n'est ni constamment extérieur à C, ni constamment intérieur aux cercles c'_1 ; donc, pour des valeurs de z_0 telles que $|z_0 - \zeta|$ soit inférieur à d, u coïncide avec des points u_0 de S_2 ; mais il n'existe qu'une intégrale égale à u_0 au point z_0, et cette intégrale est holomorphe dans un cercle de centre z_0 et de rayon d, par suite au point ζ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit une équation différentielle du premier ordre,* $\frac{du}{dz}=f(z,u)$, *dont le coefficient* $f(z,u)$ *est uniforme quand* z *varie dans* S *et* u *dans le plan des* u. *Si, pour tout point* z_0 *de* S, *les points d'indétermination de* $f(z_0,u)$ *ne forment dans le plan des* u *qu'une suite ponctuelle (dont les affixes dépendent analytiquement de* z_0, *avec les restrictions indiquées), toute intégrale* $u(z)$ *uniforme (ou ne prenant que* n *valeurs) dans une aire* Σ *de contour* σ, *intérieure à* S, *est continuable au delà de* σ *et ne présente dans* Σ *que des pôles (ou des points critiques algébriques).*

La démonstration est identiquement la même que celle du théorème III. On voit que, si l'intégrale $u(z)$ présentait une ligne singulière, elle devrait coïncider avec une des fonctions $a_m(z)$, ce qui est impossible. Remarquons que, par la même raison, les points z, tels que $u(z)$ coïncide avec une des valeurs $a_m(z)$, ne peuvent former dans Σ, pour chaque intégrale $u(z)$, qu'une suite ponctuelle.

Quand les conditions précédentes sont remplies pour tous les points de S, sauf pour certains points z_0 [ces points sont des pôles ou des points essentiels de $f(z,u_0)$, quel que soit u_0], le théorème subsiste, à cela près, que les points z_0 peuvent être des points d'indétermination (points essentiels) de $u(z)$.

Le théorème subsiste également si la fonction $f(z,u)$ *admet* p *valeurs* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ quand z varie dans l'aire S et u dans le plan. Autrement dit, $\frac{du}{dz}$ est racine d'une équation algébrique

$$F(u',u,z)=\varphi_p(z,u)u'^p+\varphi_{p-1}(z,u)u'^{p-1}+\ldots+\varphi_0(z,u)=0,$$

les fonctions $\varphi_p, \ldots, \varphi_0$ vérifiant les mêmes conditions que la fonction $f(z,u)$ précédemment.

Pour chaque point z_0 de S, la fonction $f(z_0,u)$ admet des points d'indétermination $a_1, \ldots, a_m, \ldots$, formant une suite ponctuelle, des pôles b_1, $b_2, \ldots, b_m, \ldots$, et des points critiques $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ formant également une suite ponctuelle dont $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ sont des points limites. Les valeurs $c_1(z), \ldots, c_m(z), \ldots$ vérifient la relation obtenue en éliminant u' entre $F=0$ et $\frac{\partial F}{\partial u'}=0$.

Rappelons qu'il n'existe en général qu'un nombre fini d'intégrales prenant au point z_0 la valeur $c_m(z_0)$ et que z_0 est un point critique algébrique de ces intégrales; il n'y a d'exception que si la quantité $\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} u'$ est nulle pour $z = z_0$, $u = c_m(z_0)$, $u' = f(z_0, c_m)$. Ceci n'a lieu d'ordinaire que pour des points particuliers z' de S. Quand les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} u' = 0$$

sont compatibles pour toute valeur de z, z_0 n'est encore en général qu'un point algébrique des intégrales égales à $c_m(z_0)$ pour $z = z_0$; il n'y a d'exception que pour des points particuliers z' vérifiant une certaine relation distincte de $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$.

Ces remarques faites, on voit, comme plus haut, que (les points z' exceptés), si un point z_0 est un point singulier non algébrique de l'intégrale $u(z)$, *u tend nécessairement vers une des valeurs* $a_m(z_0)$ quand z tend vers z_0. Pour les points z', u peut tendre aussi vers une valeur $c_m(z')$. On tire de là les mêmes conclusions que plus haut : si $u(z)$ est uniforme, on ne prend que n valeurs dans Σ, u est continuable au delà de σ et ne présente dans Σ que des points singuliers algébriques.

Les seuls points où une intégrale $u(z)$ puisse être indéterminée sont, comme précédemment, les points z_0, pôles ou points d'indétermination de $f(z, u_0)$, quel que soit u_0. Il peut exister des points z_1 qui soient pour toute valeur de u_0 des points critiques (mais non de discontinuité) de $f(z, u_0)$; dans ce cas, $f(z, u_0)$ admet z_1 comme point critique algébrique d'ordre p au plus; et $f(z, u_0)$ se met sous la forme

$$f(z, u_0) = A(u_0)(z - z_1)^{\frac{m}{p}} + B(u_0)(z - z_1)^{\frac{m'}{p}} + \dots.$$

Si l'on pose $(z - z_1)^{\frac{1}{p}} = t$, on voit que l'équation

$$\frac{du}{dt} = p t^{p-1} f(z_1 + t^p, u)$$

ne présente plus pour $t = 0$ la même singularité; $u(t)$ ne pouvant être indéterminée pour $t = 0$, il en est de même de $u(z)$ pour $z = z_1$.

En particulier, supposons que le coefficient différentiel $f(z, u)$ soit uniforme ou ne prenne que n valeurs quand z et u varient respectivement dans tout le plan. De plus, pour toute valeur z_0 de z, *sauf pour les points* z_1 *d'une suite ponctuelle,* les points d'indétermination de $f(z_0, u)$ ne forment dans le plan des u qu'une *suite ponctuelle* dont les affixes dépendent *analytiquement* de z_0. Pour les points z_1, $f(z, u_0)$ est infinie ou indéterminée quel que soit u_0. $\Big[$Le point ∞ est un point z_1, si, pour $z' = 0$, $\frac{1}{z'^2}f\left(\frac{1}{z'}, u_0\right)$ est discontinue, quel que soit u_0.$\Big]$ Nous convenons de dire, pour abréger, que *le coefficient $f(z, u)$ ne présente que des singularités ordinaires, quand les conditions précédentes sont vérifiées.* Dans les applications qui vont suivre, nous admettrons toujours (à moins d'indication contraire) que les fonctions $f(z, u)$ considérées rentrent dans cette catégorie.

Cette hypothèse faite, si une intégrale $u(z)$ est uniforme dans tout l'espace du plan où l'on peut la prolonger, elle ne saurait présenter de coupure et *par suite existe dans tout le plan. De plus, elle ne peut admettre d'autres points essentiels que les points* z_1.

De même, si une intégrale $u(z)$ ne prend que n valeurs dans l'espace du plan où elle existe, elle existe dans tout le plan et *vérifie une équation algébrique*

$$u^n \varphi_n(z) + \ldots + \varphi_0(z),$$

où les fonctions $\varphi_n(z), \ldots, \varphi_0(z)$ sont uniformes et ne présentent pas dans le plan des z d'autres points essentiels que les points z_1 [ces points z_1 ne sont pas d'ailleurs nécessairement des points essentiels de $u(z)$].

Si les points z_1 n'existent pas $\Big[$c'est-à-dire si la fonction $f(z, u)$ n'est discontinue quel que soit u pour aucun point z_1 du plan et s'il en est de même de la fonction $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}, u\right)\Big]$, *toute intégrale uniforme de l'équation est nécessairement une fraction rationnelle de z; toute intégrale qui n'admet que n valeurs est nécessairement une fonction algébrique de z.*

Nous allons donner quelques applications des résultats précédents.

6. *Applications du théorème précédent.* — En premier lieu, j'envisage l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)},$$

où P et Q sont deux polynômes en z dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u (ou admettent p valeurs). Pour que la remarque précédente s'applique à cette équation, il faut et il suffit que *le dénominateur* Q *ne renferme aucun facteur de la forme* $z - a$, *a étant indépendant de* u, *et de plus que le degré en* z *du dénominateur surpasse d'au moins deux unités le degré correspondant du numérateur*. Ces conditions remplies, toute intégrale de l'équation, qui ne prend que n valeurs dans l'espace du plan où elle existe, est nécessairement *algébrique*.

Quand P et Q sont deux polynômes en z et u, on peut trouver (ainsi que nous le montrerons dans un autre travail) toutes les fractions rationnelles qui vérifient l'équation différentielle. Si les conditions précédentes sont remplies, on est certain d'obtenir ainsi *toutes les intégrales uniformes*.

Au lieu de l'équation (α)

$$\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)},$$

on peut considérer une équation de la forme

$$F(u', u, z) = 0,$$

où F est un polynôme en u' et en z. *Si le coefficient* $\psi_p(z, u)$ *de la plus haute puissance* u'^p *de* u' *ne renferme aucun facteur de la forme* $(z - a)$ (*a étant indépendant de* u), *et si de plus le degré en* z *de* $\psi_p(z, u)$ *surpasse d'au moins* $2(p - q)$ *unités le degré correspondant du coefficient de* u'^q, $\psi_q(z, u)$, toute intégrale qui ne prend que n valeurs dans l'espace où elle existe est nécessairement une fonction algébrique de z. Mais je n'insiste pas davantage ici sur cette première application, qui nous entraînerait hors du sujet.

7. Comme seconde application, nous allons rechercher la forme de l'équation

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = f(z, u)$$

[où $f(z, u)$ est uniforme], quand l'intégrale générale de cette équation est elle-même uniforme.

Nous démontrerons d'abord que l'intégrale générale peut s'écrire dans ce cas

$$u = \frac{Af + \varphi}{Af_1 + \varphi_1},$$

f, f_1, φ_0, φ_1 étant des fonctions uniformes de z, et A une constante.

Soit u_0 la valeur au point z_0 d'une intégrale $u(z)$: désignons par C et C′ des cercles de rayon ρ et r, décrits respectivement de z_0 et de u_0 comme centres, à l'intérieur et sur le contour desquels $f(z, u)$ est holomorphe et de module inférieur à M.

On sait que l'intégrale u peut se développer ainsi :

$$u = u_0 + (z - z_0)u'(z_0, u_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{1.2\ldots n} u_n + \ldots, \tag{2}$$

la série (2) convergeant pour toute valeur de z intérieure à un cercle de centre z_0 et de rayon $\rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$. Donnons à u_0 une valeur quelconque v, intérieure à un cercle C'_1 de centre u_0 et de rayon $\frac{r}{2}$. La fonction $f(z, u)$ est holomorphe quand z varie dans C, et u dans un cercle de centre v et de rayon $\frac{r}{2}$, et son module est au plus égal à M. Par suite, la série (2)

$$u = v + (z - z_0)u'(v) + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{1.2\ldots n}\right)^n u_n(v) + \ldots$$

converge pour toute valeur de z telle que $|z - z_0|$ soit inférieur à $\rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$ et pour toute valeur de v telle que $|v - u_0|$ soit inférieur à $\frac{r}{2}$; elle converge en outre uniformément, comme il résulte aussitôt de la démonstration de Briot et Bouquet.

Les termes de la série étant des fonctions holomorphes de v dans C'_1, pour toute valeur de z intérieure à C, u est fonction holomorphe de v dans C'_1, d'après les théorèmes sur les séries établis dans le premier Chapitre.

Ceci posé, admettons que l'intégrale générale de l'équation (1) soit uniforme; une quelconque des intégrales particulières, $u(z)$, ne peut présenter dans le plan que des points singuliers ζ, *formant une suite ponctuelle*. Ces points sont des pôles ou des points essentiels; dans ce dernier cas, ils appartiennent à l'ensemble ponctuel des points z' pour lesquels $f(z, u)$ est discontinue, quel que soit u. De plus, les points z_1 du plan tels que la valeur $u(z_1)$ rende $f(u, z_1)$ discontinue ne forment également qu'une suite ponctuelle. Désignons par E l'ensemble de tous ces points singuliers [à chaque intégrale $u(z)$ correspond un ensemble E]. Soit enfin v la valeur de l'intégrale $u(z)$ au point z_0; pour toute valeur u_0 de v, distincte des points $a_1(z_0), \ldots, a_m(z_0), \ldots$ [tels que $f(z_0, a_m)$ soit discontinue], l'intégrale

$u(z) = F(z, v)$ a une valeur unique et déterminée en chaque point du plan z, sauf aux points de l'ensemble E. Je dis que $u(z)$ est une fonction *analytique de* v; la chose vient d'être démontrée pour les points Z voisins de z_0. Prenons dans le plan des z un point Z quelconque, qui ne coïncide avec aucun des points singuliers E de l'intégrale $u(z, u_0)$, et joignons $z_0 Z$ par un chemin L qui ne renferme également aucun des points E. Quand z décrit L, $u(z) = F(z, u_0)$ décrit un chemin L'. Soit Z' un point de L. On peut trouver deux nombres ρ et r, indépendants de la position de Z' sur L et tels qu'en décrivant deux cercles, le premier C de centre Z' et de rayon ρ, le second C' de centre $u(Z', u_0)$ et de rayon r, $f(z, u)$ soit holomorphe et ait un module inférieur à M, quand z varie dans C et u dans C' (en effet, pour chaque point Z', r et ρ existent; il suffit de prendre leurs valeurs minima quand Z' décrit L; ces minima existent, sinon r ou ρ tendrait vers zéro quand z tend vers un point Z', mais en ce point Z', r et ρ ont une valeur différente de zéro, et l'on en conclut qu'il en est de même pour les points voisins). Il suffit de prouver que $F(Z, v)$ est fonction holomorphe de v pour des valeurs de v voisines de u_0; décrivons du point z_0 comme centre un cercle C_0 de rayon $R = \rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$ et du point u_0 un cercle C'_0 de rayon $\frac{r}{2}$; si Z' est un point de L intérieur à C_0, la série

$$v' = F(Z', v) = v + (Z' - z_0)\, u'(v) + \ldots$$

est fonction holomorphe de v dans le cercle C'_0; pour des valeurs v voisines de u_0, v' prend des valeurs voisines de $U' = F(Z', u_0)$; décrivons alors un cercle C_1 du point Z' comme centre avec R comme rayon, du point U' un cercle C'_1 de rayon $\frac{r}{2}$; et soit Z'' un point de L intérieur à C_1 et compris entre Z' et Z. La série

$$v'' = F(Z'', v) = v' + (Z'' - Z')\, u'_1(v') + \ldots$$

est fonction holomorphe de v' dans C'_1, par suite fonction holomorphe de v dans le voisinage de u_0. En raisonnant sur Z'' comme sur Z' et ainsi de suite, on arrive à un cercle C renfermant Z, et l'on voit que $V = F(Z, v)$ est fonction holomorphe de v dans le voisinage de u_0; la proposition est établie.

La fonction $u = F(z, v)$ est donc une fonction *analytique* des deux variables z et v. Si l'on excepte les valeurs z' pour lesquelles $f(z, u)$ est discontinue, quel que soit u, $F(z, v)$ est pour tout système z et v déterminée ou infinie. Si, pour une valeur z_1, $F(z_1, v)$ est infinie en des points v formant une coupure, F est infinie dans tout le plan v; ceci ne peut avoir lieu que pour les points Z_1 d'une suite ponctuelle, sinon $F(z, v_0)$ serait infinie en tous les points Z_1 d'une suite linéaire, par suite dans tout le plan Z, quel que fût v_0. En conséquence, la fonction $u(z, v)$ pour toute valeur de z (sauf pour les points d'une suite ponctuelle) est *définie dans le plan des v et n'y présente que des pôles.*

Le raisonnement précédent démontre en toute rigueur que la fonction $F(z, v)$, où l'on donne à v une valeur quelconque différant des valeurs $a_1(z_0), \ldots, a_m(z_0), \ldots$, vérifie l'équation différentielle (1). A deux valeurs de v correspondent deux intégrales distinctes, puisqu'elles sont uniformes et prennent au point z_0 deux valeurs v différentes. On sait d'ailleurs qu'en un point Z du plan z il n'existe qu'une intégrale $u(z)$ prenant la valeur U, si $f(Z, U)$ est holomorphe. Posons donc

$$U = F(Z, v),$$

U étant une valeur quelconque, distincte des valeurs

$$F[Z, a_1(z_0)], \quad \ldots, \quad F[Z, a_m(z_0)], \quad \ldots$$

et telle que $F(Z, U)$ soit holomorphe. Cette équation en v ne peut avoir plus d'une racine, car si elle en avait deux, v_0 et v_1, les deux intégrales $F(z, v_0)$, $F(z_1, v_1)$ seraient distinctes et prendraient au point Z la même valeur U, ce qui est impossible. Il en résulte que la fonction $F(Z, v)$ est de la forme $\frac{Av + B}{Cv + D}$, A, B, C, D dépendant de Z, et, comme ceci a lieu quel que soit Z, l'équation (1) est vérifiée par une fonction $u(z) = \frac{v\,A(z) + B(z)}{v\,C(z) + D(z)}$, où l'on donne à v une valeur constante (A, B, C, D étant des fonctions uniformes de z qui ne présentent dans le plan que des points essentiels). Toute intégrale $u_1(z)$ de l'équation est donnée par $u(z)$; car on peut choisir des points Z qui soient des points ordinaires de A, B, C, D, et pour lesquels u_1 prenne une valeur U, $f(Z, U)$ étant holomorphe; si l'on donne à v la valeur $v_0 = \frac{B(z) - U\,D(Z)}{U\,C(CZ) - A(Z)}$, la fonction $u(z, v_0)$, égale à u_1 au point Z, coïncide avec $u_1(z)$; v_0 peut être infini, mais v_0 ne peut être indéterminé quel que soit Z; sinon on aurait $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ identiquement, et $u = \frac{A}{C}$; u serait indépendant de v, ce qui est impossible, puisque $u(z_0) = v$. *L'intégrale générale de l'équation* (1) *peut donc s'écrire*

$$u(z) = \frac{v\,A(z) + B(z)}{v\,C(z) + D(z)} \tag{3}$$

ou encore

$$v = \frac{-u\,D(z) + B(z)}{u\,C(z) - A(z)}. \tag{4}$$

On en conclut immédiatement que l'équation (1), qui s'obtient en décrivant l'équation (4) par rapport à z, est de la forme

$$\frac{du}{dz} = au^2 + bu + c, \tag{5}$$

a, b, c étant des fonctions uniformes de z. Ainsi, *toute équation dont le coefficient différentiel est uniforme dans le plan des z et des u, et dont l'intégrale générale est également uniforme, est une équation de Riccati.*

L'intégrale générale peut alors se mettre sous la forme (3); cette relation (3) exprime que le rapport anharmonique de quatre intégrales est constant. On sait que cette propriété appartient à toute équation de Riccati (alors même que son intégrale n'est pas uniforme).

Parmi les équations de la forme $\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)}$ où P et Q sont des polynômes en u, il était clair que l'équation de Riccati pouvait seule admettre une intégrale générale uniforme; car u ne peut figurer au dénominateur [sinon en un point z_0 une intégrale prend la valeur u_0 qui annule $Q(z_0, u)$ et admet z_0 comme point critique], et, de plus, la même condition doit être remplie pour l'équation transformée en $\frac{1}{u}$, ce qui exige que P soit du second degré en u.

Si l'intégrale générale de l'équation (1) *est une fonction entière, elle est de la forme*

$$u = v\,A(z) + B(z),$$

A et B étant holomorphes. En effet, quand le dénominateur de u dans l'expression (3) dépend de v, pour une valeur z_1 de z, on peut donner à v la valeur $v_1 = \frac{D(z_1)}{C(z_1)}$, et la fonction $u(z, v_1)$ est infinie au point z_1, à moins que l'on n'ait, pour toute valeur de z_1, $-\frac{D(z_1)}{C(z_1)} = -\frac{B(z_1)}{A(z_1)}$, ce qui est impossible. Il en résulte que l'équation (1) est, dans ce cas, *nécessairement linéaire :*

$$\frac{du}{dz} = au + b.$$

Il est facile alors de reconnaître si l'intégrale est uniforme : il faut notamment que $a(z)$ soit la dérivée logarithmique d'une fonction uniforme.

Si l'intégrale de l'équation (1) est une fraction rationnelle, cette équation est une équation de Riccati dont les coefficients a, b, c sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Supposons que ni a, ni c ne soient identiquement nuls (au cas contraire, on ramène l'équation à être linéaire). Nous allons chercher à quelles conditions l'intégrale est effectivement une fraction rationnelle. Remarquons que, si l'on sait d'avance que ces conditions sont remplies, *on obtient l'intégrale générale par des opérations purement algébriques.* Désignons en effet par A_n, B_n, C_n, D_n des polynômes en z de degré n, à coefficients indéterminés; pour une certaine valeur de n, on peut déterminer ces coefficients, en sorte que toute fonction $u(z) = \frac{A_n v + B_n}{C_n v + D_n}$ vérifie l'équation différentielle; si l'on ajoute de plus la condition que, pour $z = z_0$, on ait, quel que soit v, $v = \frac{A_n(z_0) v + B_n(z_0)}{C_n(z_0) v + D_n(z_0)}$, cette détermination n'est possible que d'une seule manière. On fait donc n égal successivement à 1, 2, 3, ..., et l'on finit par obtenir un système d'équations algébriques compatibles, et n'admettant qu'un système de solutions, qui dépendent par suite d'opérations purement algébriques. On peut encore exprimer que la fonction $u = \frac{A_n}{B_n}$ vérifie l'équation; le système de relations auxquelles on est conduit est indéterminé pour une certaine valeur de n; on peut y ajouter la condition $v = \frac{A_n(z_0)}{B_n(z_0)}$, et les coefficients de A_n, B_n dépendent linéairement de v.

Tout revient donc à trouver les conditions pour que l'intégrale de l'équation soit algébrique et rationnelle. Ramenons d'abord $\left(\text{en posant } u_1 = u + \frac{b}{2a}\right)$ l'équation à la forme

$$(7) \qquad \frac{du}{dz} = au^2 + c,$$

ou encore

$$\frac{du}{dz} = \frac{\alpha u^2 + \gamma}{\beta},$$

α, β, γ étant des polynômes qui n'admettent pas un facteur commun.

Les seules valeurs de z pour lesquelles une intégrale puisse être indéterminée sont les racines ζ du polynôme β, et la valeur $z = \infty$, si le degré de β ne dépasse pas d'au moins deux unités les degrés de α et γ. Ces points sont aussi les seuls points critiques possibles des intégrales, car, pour tout autre point z_0, une intégrale u prend une valeur finie u_0 ou devient infinie : dans le premier cas, u est holomorphe dans le domaine de z_0, dans le second cas $\frac{1}{u}$ est holomorphe. Pour que l'intégrale soit une fraction rationnelle, il faut donc et il suffit que les points ζ ne soient, pour aucune des intégrales, des points de ramification ou d'indétermination. On peut ramener l'équation de Riccati à une équation linéaire et appliquer les conditions données par M. Fuchs pour que les points singuliers possibles des intégrales soient algébriques ; on peut aussi faire la discussion de la manière suivante, en s'appuyant sur les résultats de MM. Briot et Bouquet.

Soit z_0 un des points ζ, z_0 est le pôle au moins d'une des deux fonctions a et c; en premier lieu, si z_0 est un pôle d'ordre m de $a(z)$, *c'est un zéro au moins d'ordre* $(m-1)$ *de* $u(z)$; car, si l'on pose $u = u_1 + \frac{1}{v}$ (u étant une intégrale quelconque), la fonction v vérifie l'équation $-\frac{dv}{dz} = 2au_1v + a$, et l'intégrale de cette équation étant par hypothèse une fraction rationnelle, le produit $2au_1$ doit être la dérivée logarithmique d'une fraction rationnelle, et ne peut admettre par suite que des pôles du premier degré. Mais z_0 est un pôle d'ordre m de $a(z)$: donc u_1 doit contenir en facteur $(z-z_0)^{m-1}$. Faisons pour abréger l'écriture $z_0 = 0$, et posons

$$a(z)z^m = A(z), \qquad u(z) = z^{m-1}v(z)$$

[$A(z)$ et $v(z)$ sont holomorphes pour $z = 0$, et A ne s'annule pas avec z]. La fonction v vérifie l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{A(z)z^{2(m-1)} - (m-1)z^{2(m-1)}v + c(z)z^m}{z^{2m-1}}.$$

Pour $z = 0$, v a par hypothèse une valeur finie, ainsi que sa dérivée, ce qui exige que $c(z)$ contienne le facteur z au moins à la puissance $(m-2)$. Ainsi tout pôle d'ordre m de $a(z)$ est zéro au moins d'ordre $(m-2)$ de $c(z)$. Si l'on pose $C(z)=\frac{c(z)}{z^{m-2}}$, l'équation précédente devient

$$\frac{dv}{dz}=\frac{A(z)v^2-(m-1)v+C(z)}{z}.$$

De même, tout pôle d'ordre m' de $c(z)$ est pôle d'ordre $(m'-1)$ au moins de toute intégrale et zéro d'ordre $(m'-2)$ de $a(z)$.

Cette remarque faite, considérons d'abord un pôle simple z_0 de $A(z)$: z_0 ne saurait être un pôle de $c(z)$ d'ordre plus grand que 1, sinon, d'après ce qui précède, $a(z_0)$ serait fini. Posons encore, en faisant $z=0$,

$$A(z)=az, \qquad C(z)=cz,$$

A et C sont holomorphes pour $z=0$, et A ne s'annule pas avec z. L'équation peut s'écrire

$$\frac{du}{dz}=\frac{u^2[A(0)+zA'(0)+\ldots]+C(0)+zC'(0)+\ldots}{z}.$$

Si, quand z tend vers zéro, u tend vers une valeur u_0, le système $z=0$, $u=u_0$, annule nécessairement le numérateur du second membre $\left(u_0\right.$ ne peut être infinie, car, dans l'équation transformée en $\frac{1}{u}=v$, le coefficient différentiel est infini pour $z=0$, $v=0$, puisque A_0 n'est pas nul$\left.\right)$. Toutes les intégrales doivent donc tendre vers une des valeurs $\pm\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}}$ quand z tend vers 0 et être holomorphes dans le voisinage de ce point. Désignons par $+u_0=+\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}}$ celle des deux valeurs du radical dont le produit par A_0 a sa partie réelle positive. Si u tend vers $-u_0$, on pose

$$u=-\sqrt{\frac{C_0}{A_0}}+v;$$

la fonction v s'annule pour $z=0$ et vérifie l'équation

$$v'=\frac{-2A_0u_0v+z\left(C'_0\frac{-A'_0C_0}{A_0}\right)+\ldots}{z}.$$

La partie réelle du coefficient de v étant négative, l'équation n'admet qu'une seule intégrale $v_1(z)$ s'annulant avec z, et cette intégrale est holomorphe pour $z=0$. Toutes les intégrales $u(z)$, sauf l'intégrale

$$u_1 = -u_0 + v_1(z),$$

doivent donc prendre la valeur u_0 pour $z=0$. Posons $u = +\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}} + v$. Toutes les intégrales (sauf une) de l'équation

$$v' = \frac{2A_0 u_0 v + z\left(C'_0 - \frac{A'_0 C_0}{A_0}\right) + \ldots}{z} = \frac{\lambda v + \mu z + \ldots}{z}$$

doivent s'annuler et être holomorphes pour $z=0$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord, d'après un théorème de MM. Briot et Bouquet, que *le coefficient de* v, $+2\sqrt{-A_0 C_0}$, *soit un entier positif* n; de plus, si $n=1$, le coefficient de z, $\mu = C'_0 - \frac{A'_0 C_0}{A_0}$, *doit être nul;* sinon on diminue le coefficient de v de $(n-1)$ unités, en posant

$$v = (v_1 z + v_2 z^2 + \ldots + v_{n-1} z^{n-1}) + z^{n-1} w,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ représentant les valeurs pour $z=0$ des $(n-1)$ premières dérivées de $v(z)$, valeurs qui se calculent en différentiant l'équation

$$zv' - \lambda v + \mu z + \ldots = 0, \qquad \left(v_1 = \frac{-\mu}{\lambda - 1}, \quad \ldots\right).$$

L'équation se ramène ainsi à la forme

$$w' = \frac{w + \lambda' z + \ldots}{z}.$$

Il faut que λ' *soit nul.* Quand ces conditions sont remplies, si l'on pose $w = tz$, l'équation devient

$$\frac{dt}{dz} = t^2 M(z) + tN(z) + P(z), \tag{8}$$

M, N, P étant holomorphes pour $z=0$. On voit sans peine que, dans le cas actuel, la condition $\lambda'=0$ exprime que $D_z^n[A(z)u_n^2(z) + C(z)]$ s'annule pour $z=0$, $u_n(z)$ désignant le polynôme $(u_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots + v_{n-1} z^{n-1})$.

Quand les deux conditions précédentes sont remplies, l'équation (7) se ramène à la forme (8) par la transformation $u = u_n + tz^n$. Pour $z = 0$, aucune intégrale $t(z)$ de l'équation (8) ne peut être indéterminée; si une intégrale $t(z)$ tend vers t_0, elle est holomorphe pour $z = 0$, ainsi que la fonction u correspondante; si $t(z)$ tend vers l'infini quand z s'annule, on pose $t = \frac{1}{\theta}$, et l'on voit que l'équation en θ admet une intégrale et une seule s'annulant avec z : cette intégrale correspond à la fonction u_1 qui prend la valeur $-u_0$ pour $z = 0$. Les conditions énoncées sont donc *nécessaires et suffisantes* pour que $z = 0$ soit un point ordinaire de $u(z)$.

Le raisonnement suppose C_0 différent de 0; mais, si $C_0 = 0$, l'équation (7) est de la forme $\frac{du}{dz} = \frac{\mu z + \nu u^2 + \ldots}{z}$. Le coefficient de u étant nul dans le second membre, l'équation ne peut admettre qu'une intégrale holomorphe ou algébrique au point $z = 0$. Ceci revient à dire que tout pôle simple de $a(z)$ est pôle simple de $c(z)$, et réciproquement.

Il importe de remarquer que les deux conditions trouvées peuvent se vérifier par des opérations *purement algébriques*, alors même qu'on ne connaît pas les racines de $\beta(z) = 0$. Soient $\beta_1 = 0$ l'équation qui donne les racines simples de $\beta(z)$, z_0 une de ces racines; on doit avoir d'abord $4C_0A_0 = -n^2$ (n étant un nombre entier); $A(z)$ désigne $(z - z_0) \times a(z)$ ou $\frac{(z - z_0)\alpha}{\beta}$ et $C(z)$ désigne $\frac{(z - z_0)\gamma(z)}{\beta}$; par suite,

$$A_0 = \frac{\alpha(z_0)}{\beta'(z_0)}, \qquad C_0 = \frac{\gamma(z_0)}{\beta'(z_0)}.$$

Posons

$$\zeta = \frac{-4\alpha(z)\gamma(z)}{\beta'^2(z)}. \tag{9}$$

La transformée en ζ de l'équation $\beta_1 = 0$ doit n'avoir comme racines que des nombres entiers carrés parfaits, ce qu'on reconnaît par des opérations linéaires qui donnent ces racines. Soit n^2 l'une d'elles. Pour $\zeta = n^2$, les polynômes $\beta_1(z)$ et $n^2\beta'^2(z) + 4\alpha(z)\gamma(z)$ ont un plus grand commun diviseur dont les racines doivent vérifier la condition

$$D_z^n[u_n^2(z_0)A(z_0) + C(z_0)] = 0.$$

Les valeurs pour $z = z_0$ des dérivées successives de A et de C s'expriment linéairement en fonction des coefficients de α, β, γ, comme le montrent aussitôt les identités

$$A(z_0)+A'(z_0)(z-z_0)+\ldots=\frac{\alpha_0+\alpha'_0(z-z_0)+\ldots}{\beta'_0+\frac{\beta''_0(z-z_0)}{1.2}+\ldots},$$

et

$$C(z_0)+C'(z_0)(z-z_0)+\ldots=\frac{\gamma_0+\gamma'_0(z-z_0)+\ldots}{\beta'_0+\frac{\beta''_0(z-z_0)}{1.2}+\ldots}.$$

De plus, les coefficients de u_n s'expriment linéairement en fonction de A_0, A'_0, A''_0, ..., C_0, C'_0, ... *quand la première condition est satisfaite*

$$u_0=\frac{n}{A_0},$$

$$v_1=u'_0=\frac{C'_0-\frac{A'_0C_0}{A_0}}{n-1}=\frac{1}{(n-1)\beta'_0}\left(\gamma'_0-\frac{\alpha'_0\gamma_0}{\alpha_0}\right),$$

et ainsi de suite. La seconde condition s'écrit donc $H(z_0)=0$, H étant un polynôme dont les coefficients se calculent linéairement à l'aide des coefficients de α, β et γ. Il faut que $H(z)$ soit divisible par $\beta_2(z)$, ce qui se vérifie encore par des opérations purement algébriques.

Passons au cas où le point z_0 est un pôle d'ordre m de $a(z)$. Nous avons dit que z_0 est alors zéro au moins d'ordre $(m-1)$ de $u(z)$, et que par la transformation $u=vz^{m-1}$ (nous faisons $z_0=0$), l'équation (7) devient

$$v'=\frac{Av^2-(m-1)v+C(z)}{z},$$

A et C étant holomorphes pour $z=0$, et A ne s'annulant pas avec z.

En raisonnant comme plus haut, on voit que v doit prendre pour $z=0$ une des valeurs v_0, v'_0 de l'expression $U=\frac{m-1\pm+\sqrt{(m-1)^2-4A\alpha_0}}{2A_0}$; si l'on pose $v=U+w$, l'équation devient

$$w'=\frac{w[\pm\sqrt{(m-1)^2-4A_0C_0}+\mu z+\ldots]}{z}=\frac{\lambda w+\mu z}{z}.$$

La discussion précédente montre que $\sqrt{(m-1)^2-4A_0C_0}$ doit être un entier positif n, et que de plus la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $[Av_n^2+C(z)]$ doit être nulle pour $z=0$, v_n désignant le polynôme $v_0+v_1z+\ldots+v_{n-1}z^{n-1}$, où

$v_0 = \frac{(m-1)+n}{2A_0}$, et où $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ sont les valeurs de $w', w'', \ldots$ calculées, pour $z=0$, $w=0$, en différentiant l'équation

$$zw' = \lambda w + \mu z + \ldots.$$

Quand ces conditions sont satisfaites, toutes les intégrales sont holomorphes pour $z=0$ et prennent en ce point la valeur v_0, sauf une seule qui prend la valeur v'_0.

On obtient des conditions analogues pour les pôles d'ordre m' de $C(z)$ en raisonnant sur la transformée en $\frac{1}{u}\cdot$ Ces conditions se vérifient par des opérations linéaires, alors même qu'on ne sait pas résoudre l'équation qui donne les racines d'ordre m de $\beta(z)$. Enfin, si le point $z=\infty$ est un point singulier, on rentre dans les cas précédents à l'aide de la transformation $z_1 = \frac{1}{z}\cdot$

Nous voyons qu'en somme on peut reconnaître, *par des opérations purement algébriques, si l'intégrale de l'équation de Riccati est une fraction rationnelle, et dans ce cas l'intégrale s'obtient elle-même par des opérations linéaires.*

Si les deux conditions précédentes sont satisfaites pour tous les points ζ, sauf pour un seul point z_0 (le point ∞, par exemple), l'intégrale de l'équation est uniforme, et le point z_0 est nécessairement un point essentiel de l'intégrale. Plus généralement, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit une fonction uniforme n'ayant dans le plan qu'un point essentiel sont les suivantes : les coefficients a, b, c ont au plus un point essentiel (qui leur est commun), le point ∞ par exemple, et les deux conditions énoncées sont satisfaites pour tous les pôles ζ du coefficient différentiel. Si les fonctions a, b, c sont algébriques, ces conditions doivent être satisfaites pour tous les points ζ, sauf pour un seul.

En particulier, si le coefficient différentiel est une fonction périodique de z, il suffit de vérifier les conditions pour les points z situés dans la bande du plan comprise entre deux droites, perpendiculaires au segment qui représente la période et passant par ses extrémités. De même, si le coefficient est doublement périodique, il suffit de vérifier les conditions dans le parallélogramme des périodes. On peut chercher aussi à quelles conditions l'intégrale est elle-même périodique : on voit qu'alors le coefficient doit être une fonction de e^{kz}; il suffit de poser $e^{kz}=t$, et de chercher si l'intégrale est fonction uniforme de t.

Ce qui précède permet de résoudre très facilement la question suivante : *Trouver les équations de la forme*

$$u = \mathrm{F}(z, u') \tag{1}$$

(où F *est uniforme en* z *et en* u'*), dont l'intégrale générale est uniforme.*

Différentions cette équation par rapport à z; il vient

$$u' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u'} u'' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$$

ou bien

$$u'' = \frac{u' - \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u'}}. \tag{2}$$

Si $u(z)$ est uniforme, il en est de même de u', et inversement, si l'intégrale u' de (z) est uniforme, l'intégrale $u(z)$ de l'équation proposée est uniforme, puisque $u=\mathrm{F}(z, u')$ [1]. Il suffit donc d'étudier l'équation (2) dont l'intégrale générale doit être de la forme $u'=\dfrac{\mathrm{A}v+\mathrm{B}}{\mathrm{C}v+\mathrm{D}}$. Je dis que v ne saurait figurer au dénominateur; autrement, on pourrait écrire $u'=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\left(\dfrac{v+\mathrm{B}_1}{v+\mathrm{D}_1}\right)$, B_1 différant de D_1 et D_1 n'étant pas une constante. Soit z_0 un point quelconque, pour lequel aucune des fonctions C, $\mathrm{B}-\mathrm{D}_1$, D'_1 ne s'annule. Si

$$v_0 = -\mathrm{D}_1(z_0),$$

(1) Cette remarque est générale : soit $f(u', u, z)=0$ une équation où f est un polynôme en u et une fonction uniforme de u' et de z. Différentions-la par rapport à z, et éliminons u entre $f=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$. On obtient une équation $f_1(u'', u', z)=0$, de même degré en u'' que f en u. Si l'intégrale de cette équation est uniforme, il en est de même de l'intégrale de $f=0$; car $u=\int u'\,dz+c$, et ne peut présenter que des points critiques logarithmiques, ce qui est impossible, puisque u dépend algébriquement de fonctions uniformes de u' et de z. Si u' admet p valeurs, u admet également p valeurs. Il n'y a d'exception que si f ne contient pas u. De là découlent plusieurs conséquences : ainsi le logarithme d'une fonction uniforme ou algébrique ne peut vérifier l'équation $f=0$, sauf dans le cas où f ne contient pas u.

la fonction $u'(z, v_0)$ peut se développer ainsi

$$u'(z, v_0) = \frac{h}{z - z_0} + a + b(z - z_0) + \ldots,$$

h n'étant pas nul, et l'intégrale $\int u'(z, v_0)\,dz$ présente un point logarithmique, ce qui est impossible. L'équation (2) doit par suite être linéaire, et son intégrale u' est égale à $v\mathrm{H}'(z) + \mathrm{G}'(z)$. Quant à l'intégrale $u(z)$, elle est de la forme

$$u(z) = v\mathrm{H}(z) + \mathrm{G}(z) + \mathrm{P}(v).$$

En définitive, pour que l'équation $u = \mathrm{F}(z, u')$ ait une intégrale générale uniforme, il faut et il suffit que le quotient $\dfrac{u' - \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u'}}$ soit un polynôme du premier degré en u', $\alpha u' + \beta$, et que l'équation $u'' = \alpha u' + \beta$ ait son intégrale uniforme.

8. En employant le même raisonnement que plus haut, on montre que si l'intégrale d'une équation $\mathrm{F}(u', u, z) = 0$ (où F est un polynôme de degré p en u' et une fonction uniforme de u et de z) n'admet pas plus de n valeurs, cette intégrale peut se mettre sous la forme $f(z, u, u_0) = 0$, f désignant une fonction uniforme de z et un polynôme de degré np en u et u_0. En tenant compte de la remarque que nous avons faite à la fin du paragraphe précédent, on en conclut que si l'intégrale d'une équation $\mathrm{F}(u', u, z)$ (où F est un polynôme, soit en u, soit en u', à coefficients uniformes) n'admet pas plus de n valeurs, F est nécessairement un polynôme en u et en u', ou que, du moins, l'équation peut se ramener à une équation de cette forme. Pour de telles équations, M. Fuchs (1) a indiqué à quelles conditions l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes. Allant plus loin, M. Poincaré (2) a montré que, lorsque les conditions de M. Fuchs sont satisfaites, l'équation se ramène à une équation de Riccati, si la relation entre u' et u (où on laisse z constant) est du genre 0; elle se ramène à des quadratures, si cette relation est du genre 1, et elle s'intègre algébriquement si le genre est supérieur à l'unité. L'étude des cas où l'intégrale de l'équation $\mathrm{F} = 0$ est uniforme est

(1) *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, 26 juin 1884.
(2) *Acta mathematica*, t. VII, 1885.

ainsi complète. On peut, sans faire intervenir le genre, donner les conditions qu'il faut ajouter à celles de M. Fuchs pour que l'intégrale soit uniforme, en suivant une méthode analogue à celle de MM. Briot et Bouquet pour le cas particulier où z n'entre pas dans F explicitement. Pour le moment, nous nous bornons à étudier un cas particulier du problème traité par M. Poincaré, ce qui va nous conduire à une généralisation du théorème de M. Hermite sur les équations $F(u', u) = 0$, où F est un polynôme en u' et u.

J'envisage une équation de la forme

$$A(u', u, z) + UB(u', u, z) = 0, \tag{1}$$

où A et B désignent deux polynômes en u' et deux fonctions uniformes de u et de z, et U une fonction algébrique définie par la relation irréductible $F(u, U) = 0$. On peut toujours supposer que la relation (1) est irréductible, c'est-à-dire que A et B n'admettent pas de facteur commun $\psi(u', u, z)$. On obtient l'équation différentielle sous sa forme ordinaire $f(u', u, z) = 0$, en remplaçant, dans $F = 0$, U par $-\frac{A}{B}\cdot$ Les théorèmes énoncés au n° 5 s'appliquent à cette équation.

Si une intégrale $u = \varphi(z)$ est uniforme dans l'espace où elle existe, elle existe dans tout le plan, et n'y admet que des points essentiels. Il en est de même de $u' = \varphi(z)$. De plus, si l'on remplace, dans A et B, u et u' par φ et φ', aucune des deux fonctions ne peut être indéterminée, quel que soit z; autrement pour $u = \varphi(z)$, la fonction u' définie par $f(u', u, z) = 0$ est indéterminée, et l'on ne peut dire que φ est une intégrale de $f = 0$. Il est impossible également que A ou B soit nul, quel que soit z pour $u = \varphi(z)$, autrement la relation $F(u, U) = 0$ serait vérifiée, quel que soit u, par $U = 0$, ou $U = \infty$. Mais il peut arriver que A et B soient nuls à la fois pour toute valeur de z : la fonction $u = \varphi(z)$ vérifie alors la relation $\chi(z, u) = 0$ obtenue en éliminant u' entre $A = 0$ et $B = 0$. En conséquence, si l'équation admet une intégrale uniforme ne vérifiant pas la relation $\chi = 0$, la fonction $U = \frac{-A(\varphi', \varphi, z)}{B(\varphi', \varphi, z)}$ est une fonction uniforme de z, qui ne saurait présenter de coupure, puisqu'elle dépend algébriquement de $u(z)$ et que $u(z)$ n'en présente pas. D'après un théorème bien connu de M. Picard, les coordonnées u et U de la courbe algébrique $F = 0$ s'exprimant en fonctions uniformes et sans coupures d'un paramètre z, la courbe est du genre 0 ou 1. *L'intégrale générale de* (1) *ne peut être uniforme que si le genre de* $F = 0$ *ne dépasse pas l'unité.*

Envisageons maintenant une équation $G(u', u, z, U) = 0$ où G est un polynôme en u' et en U dont les coefficients sont uniformes en u et z : on peut toujours supposer que U n'entre dans G qu'au degré $(n-1)$, n étant le degré de F en U. L'équation s'obtient sous la forme ordinaire en éliminant U entre les relations $G = 0$, $F = 0$. Pour tout système u'_0, u_0, z_0 vérifiant la condition $f = 0$, les équations $G = 0$, $F = 0$ ont une racine commune, et en général une seule, qu'on obtient en fonction uniforme de u'_0, u_0, z_0,

$$A(u'_0, u_0, z_0)\,U + B(u'_0, u_0, z_0) = 0.$$

Le raisonnement fait plus haut s'applique encore ici, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, A et B ne soient nuls identiquement. On peut donc énoncer ce théorème : *Si l'équation proposée admet une intégrale particulière uniforme* $u = \varphi(z)$, *la relation* $F = 0$ *est du genre* 0 *ou* 1, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les deux équations en U, $F = 0$, $G = 0$, n'aient plusieurs racines communes, quel que soit z. Si l'on exprime que $F = 0$ et $G = 0$ ont deux racines U communes, on obtient d'ordinaire deux relations distinctes en u', u, z et, en éliminant u' entre ces deux relations, une certaine relation $\psi(z, u) = 0$ entre z et u. On peut toujours vérifier si cette relation définit une fonction uniforme satisfaisant à l'équation différentielle. Quand $\psi(z, u) = 0$ se réduit à une identité, quels que soient z et u, pour une valeur de u' vérifiant la condition $f = 0$, les deux équations $G = 0$, $F = 0$ ont plusieurs racines communes. Nous écartons ici ce cas particulier qui demande une discussion spéciale. Dans tout autre cas, l'intégrale générale de l'équation ne peut être uniforme si $F = 0$ est de genre supérieur à 1.

Considérons de même l'équation

$$(2) \qquad G(u', u, z, U, U_1, \ldots, U_{n-1}),$$

où G est un polynôme en u', U, $U_1, \ldots, U_{n-1}$, et U, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ des fonctions algébriques de u définies par les relations

$$(3) \qquad F(u, U) = 0, \qquad F_1(u, U_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{n-1}(u, U_{n-1}) = 0.$$

L'équation différentielle s'obtient sous la forme $f(u', u, z) = 0$ en éliminant U, $\ldots$, U_{n-1} entre les relations (2) et (3). Pour tout système u'_0, u_0, z_0 vérifiant la condition $f = 0$, les équations simultanées (2) et (3) n'ont en général qu'un système de solutions U, $U_1, \ldots, U_{n-1}$, qui s'expriment linéairement en fonction de u'_0, u_0, z_0. On en conclut que si l'intégrale $u = \varphi(z)$

est uniforme, $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont des fonctions uniformes de z sans coupures. *Les relations qui lient* U_i *à* u *et celles qui lient* U_i *à* U_j *sont, en conséquence, de genre* 0 *et* 1. Ceci suppose toutefois que pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les équations (2) et (3) n'admettent pas plusieurs solutions communes quel que soit z.

Le théorème s'applique aussi bien si, dans l'équation

$$G(u', u, z, U, \ldots, U_{n-1}),$$

$U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont fonctions algébriques, non plus de u, mais de u'; car si $u(z)$ est uniforme et sans coupure, il en est de même de $u'(z)$. Quand G est un polynôme en $u, U, U_1, \ldots, U_{n-1}$, et une fonction uniforme de u' et de z [U, U_1, U_{n-1} vérifiant les relations $F_i(u', U_i) = 0$], on élimine u entre $G = 0$ et $\frac{dG}{dz} = 0$, en remplaçant dans cette dernière équation $\frac{dU_i}{dz}$ par $-\frac{1}{\frac{\partial F_i}{\partial U_i}} \frac{\partial F_i}{\partial u'} u''$. On obtient ainsi une équation

$$G_1(u'', u', z, U, U_1, \ldots, U_{n-1}) = 0;$$

si une intégrale $u(z)$ est uniforme, $u'(z)$ est uniforme, et le théorème énoncé s'applique à l'équation $G_1 = 0$: les relations $F_i = 0$ sont donc du genre 0 ou 1.

Enfin, si $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont fonctions algébriques de z, l'équation n'admet d'intégrale uniforme $u = \varphi(z)$ qu'au cas où $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont rationnels en z, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les équations $F_i(z, U_i) = 0$, $G = 0$ n'aient plusieurs solutions communes.

Sous sa forme la plus générale, le théorème peut s'énoncer ainsi. Soit

$$(3) \qquad G(u', u, z, U, \ldots, U_{n-1}, V, \ldots, V_{p-1}, W, \ldots, W_{q-1}) = 0$$

une équation différentielle où G est un polynôme en u' (ou en u), et en V_i, V_j, W_k : U_i, V_j, W_k sont respectivement des fonctions algébriques de u, de u' et de z, définies par les relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_1(u, U, \ldots, U_{n-1}) = 0, & \psi_1(u', V, \ldots, V_{p-1}) = 0, & \chi_1(z, W, \ldots, W_{q-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(u, U, \ldots, U_{n-1}) = 0, & \psi_p(u', V, \ldots, V_{p-1}) = 0, & \chi_q(z, W, \ldots, W_{q-1}) = 0. \end{array} \right.$$

Quand une intégrale $u = \varphi(z)$ *de cette équation est uniforme, les* W_k *sont des fonctions uniformes de* z, *et les relations qui lient* U_i *à* U_j *ou à*

u, V_i *à* V_j, *ou à* u', *sont du genre* o *ou* 1 [à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, le système d'équations (3) et l'équation $G = 0$ n'aient, quel que soit z, plusieurs systèmes de solutions communes]. Si l'intégrale générale de $G = 0$ est uniforme, les conditions précédentes sont remplies, à moins que, pour tout système z_0, u_0 et pour une valeur u'_0 vérifiant la condition $f(u'_0, u_0, z_0) = 0$, ledit système n'admette plusieurs systèmes de solutions communes, ce qu'on reconnaît sans peine par des opérations purement algébriques.

Revenons à l'équation $G(u', u, z, U) = 0$, où U vérifie la relation algébrique $F(u, U) = 0$, et supposons que u' n'entre qu'au *premier degré dans* G. Si l'on écarte le cas exceptionnel indiqué, on sait que l'intégrale générale de l'équation ne peut être uniforme que si la courbe $F = 0$ est du genre o ou 1. Admettons que cette première condition soit satisfaite, et cherchons le cas où cette intégrale est effectivement uniforme.

La courbe $F = 0$ étant du genre o ou 1, ses coordonnées u et U peuvent s'exprimer en fonction rationnelle et algébrique d'un paramètre t et d'un radical du quatrième degré en t, $\sqrt{R(t)}$,

$$u = A(t) + \sqrt{R(t)}B(t) = \varphi(t),$$
$$U = C(t) + \sqrt{R(t)}D(t) = \psi(t),$$

et cela de telle sorte qu'à tout point (u_0, U_0) de la courbe $F = 0$ ne corresponde qu'une seule valeur de t,

$$t = \chi(u, U),$$

χ étant rationnel. Supposons u et U exprimées en fonction uniforme de z :

$$u = \varphi_1(z), \qquad U = \psi_1(z);$$

on a

$$t = \chi(\varphi_1, \psi_1) = g(z):$$

t est donc fonction uniforme de u. Si l'on pose $u = \varphi(t)$, l'équation à laquelle satisfait la fonction $t(z)$ a son intégrale rationnelle, en même temps que l'équation proposée. Cette équation est de la forme (en remplaçant u et U en fonction de t),

$$t' = M(t, z) + N(t, z)\sqrt{R(t)},$$

M et N étant uniformes en t et z. N est toujours identiquement nul, si $F = 0$ est du genre o; et le fait peut aussi se présenter quand la courbe est du genre 1. Dans cette hypothèse, l'équation se réduit à

$$t' = \mathrm{M}(t, z),$$

et M *doit être un polynôme du second degré en t.* On se trouve ramené à l'équation de Riccati dont la discussion a été faite précédemment. Si l'intégrale de cette équation est uniforme, on peut l'écrire

$$t = \frac{vg + h}{vg_1 + h_1} \qquad \text{ou bien} \qquad -v = \frac{th_1 - h}{tg_1 - g},$$

g, g_1, h, h_1 étant uniformes. Quand la courbe $\mathrm{F} = 0$ est du genre 0, $u = \varphi[t(z)]$ est toujours uniforme avec $t(z)$; il en est de même chaque fois que $\varphi(t)$ ne dépend pas de $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$. Au cas contraire, u n'est jamais uniforme; il faudrait pour cela que $\sqrt{\mathrm{R}[t(z)]}$ fût rationnel en z, et, par suite, que chacune des équations $\theta = \frac{vg + h}{vg_1 + h_1}$ n'eût pour toute valeur de v que des racines de multiplicité paire [θ désigne une des quatre racines t_0, t_1, t_2, t_3 de $\mathrm{R}(t)$]. Ceci exige que les racines de l'équation $-v = \frac{\theta h_1 - h}{\theta g_1 - g}$ soient multiples pour toute valeur de v, et, comme on n'a pas identiquement $\frac{g}{g_1} = \frac{h}{h_1} = \theta$, la condition ne peut être vérifiée que si la dérivée de $\frac{\theta h_1 - h}{\theta g_1 - g}$ est nulle identiquement, c'est-à-dire si cette fonction est une constante $-v_0$. Pour $v = v_0$, $t(z) = \frac{v_0 g + h}{v_0 g_1 + h_1}$ est constamment égale à θ, et pour toute autre valeur de v, $t(z)$ ne prend pas la valeur θ. Mais ceci ne peut avoir lieu pour les quatre valeurs de θ, autrement des fonctions uniformes $\frac{vg + h}{vg_1 + h_1}$ (sans coupures) ne prendaient dans le plan aucune des quatre valeurs t_0, t_1, t_2, t_3, ce qui est en contradiction avec le théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes. On voit donc que si N est identiquement nul, il faut et il suffit, pour que $u(z)$ soit uniforme, que la fonction *$t(z)$ soit elle-même uniforme et que $u = \varphi(t)$ ne renferme pas $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$.*
Traitons maintenant le cas où N n'est pas identiquement nul; $\mathrm{F} = 0$ est alors du genre 1. La fonction t vérifie l'équation

$$\frac{dt}{dz} = \mathrm{M}(t, z) + \mathrm{N}(t, z)\sqrt{\mathrm{R}(t)}. \tag{4}$$

D'après la remarque faite au début du paragraphe, quand l'intégrale t est uniforme, M et N sont des fonctions algébriques de t. Si l'on observe que t

ne peut figurer au dénominateur de M et de N, et que la même condition doit être remplie pour l'équation transformée en $\frac{1}{t}$, on voit que M est un polynôme du second degré en t, et N une fonction de z seulement (ceci résulte d'ailleurs des conditions de M. Fuchs). D'autre part, si θ désigne une racine de $R(t) = 0$, θ doit annuler $M(\theta, z)$, quel que soit z. Soit, en effet, z_0 une valeur de z pour laquelle $M(\theta, z)$ et $N(z)$ sont holomorphes, et considérons une intégrale $t(z)$, égale à θ pour $z = z_0$. Si cette intégrale est uniforme, elle est holomorphe, ainsi que ses dérivées, au point z_0; or, quand on calcule t'', on voit que $t'' = \alpha + \frac{N(z_0)t'(z_0)}{\sqrt{R(t)}}$, α étant une quantité finie; t'' ne peut donc être finie pour $z = z_0$ que si $t'(z_0)$ est nulle, ce qui exige que la quantité $M(\theta, z_0)$ soit nulle; mais $M(t, z_0)$ est du second degré en t, et ne peut s'annuler pour les quatre valeurs de θ, à moins d'être identiquement nul; comme ceci a lieu quel que soit z_0, $M(t, z)$ est identiquement nul. L'équation (4) doit donc se réduire à la suivante :

$$\frac{dt}{dz} = N(z)\sqrt{R(t)}$$

ou bien

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = N(z)\,dz$$

ou enfin

$$t = \operatorname{sn}(\zeta + C),$$

ζ désignant l'intégrale $\int_{z_1}^{z} N(z)\,dz$ et C une constante. C'est le résultat obtenu par M. Poincaré dans le cas général où la relation $F(u', u, z) = 0$ (entre u' et u) est du genre 1.

Dans le cas actuel, la fonction $N(z)$ étant rationnelle, les diverses valeurs de ζ en un point z sont de la forme $\zeta_1(z) + 2mi\pi a + 2m'i\pi b + \ldots$ (a et b étant des constantes). Soit $2i\pi\omega$, $2i\pi\omega$ les périodes de $\operatorname{sn}(z)$; pour que $t = \operatorname{sn}(\zeta + C)$ soit uniforme, il faut et il suffit que tous les résidus de N soient égaux à $m\omega + p\omega'$ (n et p désignant des entiers quelconques) : la fonction $\operatorname{cn}(\zeta + C)\operatorname{dn}(\zeta + C)$ est alors uniforme, et par suite l'intégrale $u(z) = \varphi[\operatorname{sn}(\zeta + C), \operatorname{cn}(\zeta + C)\operatorname{dn}(\zeta + C)]$.

La discussion précédente s'applique aussitôt à l'équation $G(u', u, z, U) = 0$, où G est un polynôme en U et en u (du premier degré en u) et une fonction uniforme de u' et z, U dépendant algébriquement de u' : $F(u', U) = 0$. Il suffit de différentier l'équation $G = 0$ par rapport à z, et de remplacer

$\frac{dU}{dz}$ par $-u'' \frac{\frac{\partial F}{\partial u'}}{\frac{\partial F}{\partial U'}}$, pour ramener l'équation à la forme $u'' = G_1(u', z, U)$. On retombe sur la question précédente.

Les théorèmes sur lesquels nous nous sommes appuyés ont encore de nombreuses applications. Mais j'abandonne ce sujet pour le moment, et j'arrive à l'étude des conditions qui expriment qu'une fonction est continuable au delà d'une ligne analytique.

9. *Conditions pour qu'une fonction soit continuable au delà d'une ligne analytique.* — Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction uniforme $F(z)$ soit continuable au delà d'une coupure L est qu'il existe une fonction $f(z)$ définie de l'autre côté de L et prenant sur L les mêmes valeurs que $F(z)$. Quand la ligne L est *analytique*, la condition prend une forme plus simple.

On sait qu'une ligne *analytique* est une ligne telle que ses deux coordonnées x et y soient fonctions analytiques d'un paramètre t; autrement dit, pour tout point (x_0, y_0) de la courbe (sauf pour certains points formant une suite ponctuelle), x et y se mettent sous la forme

$$x - x_0 = a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots,$$
$$y - y_0 = b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \ldots;$$

les deux séries convergent pour des valeurs de $(t - t_0)$ suffisamment petites. Remplaçons t par $\tau = t + t'i$ (les deux séries convergent encore), et posons

$$z = x + iy = \varphi(i + t'i) + i\psi(t + t'i) = G(\tau);$$

z est une fonction analytique de τ, et réciproquement la valeur de τ égale à t_0 pour $z = z_0$ est fonction analytique de z; $\tau = G_1(z)$. A un segment AB de L correspond un segment de l'axe Ot, à des points z voisins de z_0 et situés de part et d'autre de L correspondent des points τ voisins de t_0, de part et d'autre de Ot, et inversement.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie du côté C de L et qui admet cette ligne pour coupure. Si $f(z)$ est continuable au delà de L, il existe une fonction $F(z)$ coïncidant avec $f(z)$ du côté C de L, et holomorphe dans le voisinage d'un segment AB de L. Si l'on pose

$$f[G(\tau)] = f_1(\tau), \qquad F[G(\tau)] = F_1(\tau),$$

la fonction $F_1(\tau)$ prolonge, au delà de Ot, $f_1(\tau)$. Quand $f(z)$ est continuable au delà de AB, $f_1(\tau)$ est donc continuable au delà de Ot, et inversement. Pour $\tau = t$ (t étant réel et voisin de t_0), $f_1(\tau)$ doit prendre une suite de valeurs $f_1(t)$ qui soient les valeurs pour $t' = 0$ d'une fonction $F_1(t+t'i)$, holomorphe dans le voisinage de t_0. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $f_1(t)$ soit développable en série de Taylor pour des valeurs de $|t-t_0|$ suffisamment petites. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante : *pour que $f(z)$ soit continuable au delà de* AB, *il faut et il suffit que $f(z)$ prenne sur* AB *une suite de valeurs $f_1(t)$, fonction analytique de t.* Ajoutons que toute fonction analytique $f_1(t)$ peut être regardée comme représentant les valeurs sur AB d'une fonction analytique $f(z) = f_1[G_1(z)]$, définie de part et d'autre de AB.

On peut donner à la condition une forme encore plus simple, indiquée pour la première fois par M. Schwarz [1].

Pour que la fonction $f(z)$ définie du côté C *de* AB *soit continuable au delà de* AB, *il faut et il suffit que sa partie réelle* P (*ou sa partie imaginaire* Q) *prenne sur* AB *une suite de valeurs* $P_1(t)$, *fonction analytique de t.*

Supposons d'abord que $P(x, y)$ s'annule le long de AB. Posons, comme plus haut, $z = G(t)$, et

$$f[z(\tau)] = f_1(\tau),$$

où f_1 désigne aussi une fonction analytique de τ. Pour que $f(z)$ soit continuable au delà de AB, il faut et il suffit que la fonction $f_1(t+t'i)$ soit continuable au delà du segment A_1B_1 de l'axe réel Ot. Soit

$$f_1(\tau) = f_1(t+t'i) = P_1(t, t') + i\,Q_1(t, t').$$

Par hypothèse, P_1 s'annule sur Ot le long de A_1B_1 ; mais la fonction

$$-P_1(t, -t') + i\,Q_1(t, -t')$$

est une fonction analytique de τ,

$$f_2(\tau) = P_2(t, t') + i\,Q_2(t, t').$$

Pour des points τ symétriques par rapport à Ot, $t+t'i$, $t-t'i$, les fonctions $Q_1(t, t')$, $Q_2(t, -t')$ coïncident; et, d'autre part, on peut prendre t'

---

[1] *Monatsberichte de l'Académie de Berlin,* octobre 1870.

assez petit pour que $|P_1(t, t')|$, $|P_2(t, -t')|$ soient inférieurs à tout nombre donné ε, quand le point t décrit A_1B_1. Il en résulte que les deux fonctions $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ se raccordent le long du segment A_1B_1, et que $f_2(\tau)$ prolonge $f_1(\tau)$.

Passons au cas où $P(x, y)$ prend sur AB les valeurs $P_1(t)$, $P_1(t)$ étant une fonction analytique de t.

Soit encore $z = G(\tau)$. Inversement, $\tau = G_1(z)$. La fonction

$$P_1(\tau) = \mathfrak{P}(z)$$

est une fonction analytique de z, définie de part et d'autre de AB, et dont la valeur le long de AB est égale à $P_1(t)$; la fonction $f(z) - \mathfrak{P}(z)$, dont la partie réelle s'annule sur AB, est continuable au delà de AB; il en est de même en conséquence de $f(z)$, somme de deux fonctions continuables. La proposition est donc démontrée.

Ces deux théorèmes permettent de discuter plusieurs classes de coupures.

10. En premier lieu, considérons les fonctions

$$z_1 = \varphi(z),$$

qui représentent *d'une manière conforme* un espace S sur le demi-plan des z, situé au-dessus de l'axe des x_1. La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(z)$ soit continuable au delà du contour s de S_1 est que ce contour *soit formé de lignes analytiques*.

La condition est nécessaire; car, si $\varphi(z)$ est continuable au delà d'un segment AB de s, inversement $z = \varphi_1(z_1)$ est continuable au delà de Ox_1; les points z de AB vérifient donc l'équation $z = \varphi_1(x_1)$, où x est réel, et où φ_1 est une fonction analytique de x_1; AB est par suite une ligne analytique.

La condition est suffisante; car, AB étant une courbe analytique, comme la partie réelle de $\varphi(z)$ s'annule sur AB, $\varphi(z)$ est continuable au delà de AB.

Quand une partie seulement s' de s est une ligne analytique, $\varphi(z)$ est continuable au delà de s' et admet le reste de s comme coupure essentielle.

Si tout le contour s est analytique, il convient de distinguer plusieurs cas :

1° Pour tout point (x_0, y_0) de s, x et y sont développables en série de

Taylor (nous prenons comme paramètre l'arc l de s). On dira dans ce cas que *s est formé d'une ligne analytique régulière*. La fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà de s et ne présente dans le voisinage de s aucun point singulier.

2° Le développement de x et y est impossible pour certains points (x_0, y_0); mais pour des points $z'(x', y')$, $z''(x'', y'')$, voisins et situés de part et d'autre de (x_0, y_0), les développements de z en fonction de l relatifs, d'une part à z', d'autre part à z'', coïncident pour des valeurs imaginaires de l voisines de l_0; la fonction analytique de l, $x + iy = z(l)$ admet l_0 comme point singulier; nous dirons alors que le contour *s est formé d'une seule ligne analytique*. La fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà de s; elle présente ces points $z_0 = x_0 + iy_0$ comme points singuliers, mais n'offre pas de coupure dans le voisinage de s.

3° Les conditions précédentes ne sont pas remplies pour tous les points singuliers (x_0, y_0). La fonction $z(l)$ présente des coupures qui passent par chacun des points exceptionnels (x', y'). On dira dans ce cas que *s est formé de plusieurs lignes analytiques :* $\varphi(z)$ présente des coupures extérieures à s et s'arrêtant à chaque point $z' = x' + iy'$.

Plus généralement, quand $z_1 = \varphi(z)$ représente d'une manière conforme un espace S du plan des z sur un espace S_1 du plan des z_1, la fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà du segment analytique AB de s, si le segment correspondant A_1B_1 de s_1 est analytique; au cas contraire, AB est coupure essentielle de $\varphi(z)$.

11. Étudions maintenant le genre des coupures indiquées par M. Hermite et que présentent les intégrales de la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(z, t)}{G(z, t)}\, dt,$$

où F et G sont des fonctions holomorphes de z, $G(z, t)$ n'ayant que des pôles simples.

Nous ferons dans ce but la remarque suivante : quand deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ définies du côté opposé d'une ligne L prennent le long de L les valeurs $f(l)$, $f_1(l)$, dont la différence est $\varphi(l)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ et $f_1(z)$ soient continuables au delà de L est que $\varphi(l)$ *représente les valeurs sur* L *d'une fonction analytique* $\varphi(z)$, *définie de part et d'autre de* L.

La condition est nécessaire : si f et f_1 sont continuables, $f - f_1$ est une fonction analytique de z qui existe de part et d'autre de L et dont la valeur sur L est $\varphi(l)$.

La condition est suffisante; car, si la fonction $\varphi(z)$ existe, la somme $f_1(z) + \varphi(z)$ prolonge $f(z)$ au delà de L.

Pour que l'énoncé soit vérifié, il faut et il suffit (d'après une remarque du lemme II du Chapitre II) que, $f(z') - f_1(z'')$ *tende uniformément vers* $\varphi(l)$, quand z' et z'' tendent vers un point ζ de L, de part et d'autre de L, sur un certain chemin variant avec ζ d'une manière continue. Par exemple, on peut trouver un nombre ε tel, qu'en portant sur la normale à L en chaque point ζ les longueurs $\zeta z' = \zeta z'' = \varepsilon$, de part et d'autre de ζ, on ait

$$| f(z') - f_1(z'') - \varphi(l) | < \eta$$

(η étant un nombre positif aussi petit qu'on veut).

Quand la ligne L est analytique, il faut et il suffit, pour que f et f_1 soient continuables, que $\varphi(l)$ soit une fonction analytique de l.

Appliquons cette remarque aux intégrales dont nous venons de parler, et tout d'abord à l'intégrale

$$J(z) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta};$$

cette intégrale étant prise le long d'un certain chemin AB [$\zeta = g(l)$, si l désigne l'arc de AB compris entre ζ_0 et ζ]; la fonction $f(\zeta)$ est définie en chaque point de AB, $f(\zeta) = f_1(l)$. De part et d'autre de AB, $J(z)$ prend des valeurs différentes $J_1(z)$, $J_2(z)$: quand les points z' et z'' situés sur la normale en ζ à AB de part et d'autre de ζ tendent vers ce point, $J_1(z') - J_2(z'')$ tend vers $2i\pi f(\zeta)$. Si $f(\zeta)$ est discontinue, J_1 et J_2 ne peuvent être toutes deux continuables au delà de AB; si $f(\zeta)$ est continue, on voit sans peine que la différence $J_1(z') - J_2(z'')$ tend vers $2i\pi f(\zeta)$ uniformément le long de AB, sur la normale à AB. La condition nécessaire et suffisante pour que J_1 et J_2 soient continuables est donc que $f(\zeta)$ représente les valeurs sur AB d'une fonction analytique. Quand AB est une ligne analytique, il faut et il suffit que $f_1(l)$ *soit fonction analytique de* l. Si, par exemple, $f_1(l)$ n'admet pas de dérivée d'ordre n, les deux fonctions J_1 et J_2 ne sont pas continuables au delà de AB. On ramène à la précédente l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t)\, dt}{z - g(t)}$, en posant $\zeta = g(t)$; $f(\zeta) = \frac{F(t)}{g'(t)}$.

Arrivons au cas plus général

$$J(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)\, dt}{G(t, z)}.$$

Toutes les lignes AB, décrites par les points z qui vérifient l'équation $G(\theta, z) = 0$, quand on donne à θ des valeurs réelles comprises entre t_0 et t_1, sont des coupures de $J(z)$. Soit ζ un de ces points, $\zeta = g(\theta)$, et soit $P(t, z) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, z)$; quand les points z' et z'', situés sur la normale en ζ à AB de part et d'autre de ζ, tendent vers ce point, la différence $J_1(z') - J_2(z'')$ tend vers $\frac{F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} = \varphi(\theta)$, et cela uniformément le long de AB, si $\varphi(\theta)$ est continue. Lorsque J_1 et J_2 sont continuables, $\varphi(\theta)$ représente les valeurs sur AB d'une fonction analytique. Si AB est analytique, $\zeta = g(\theta)$ peut être fonction analytique de θ; dans ce cas, $\varphi(\theta)$ doit être aussi fonction analytique de θ; sinon, ζ est fonction analytique de l, $\theta = h(l)$, et $\varphi[h(l)]$ doit être fonction analytique de l.

On voit que, si F et G sont fonctions analytiques de t, les conditions sont satisfaites; les deux fonctions J_1 et J_2 sont continuables au delà de AB.

Quand $G(t, z)$ est fonction analytique de t, sans que F le soit, une au moins des deux fonctions n'est pas continuable.

La même discussion s'applique aux coupures des intégrales doubles indiquées par M. Laguerre.

12. Nous donnerons, pour terminer cette étude, quelques exemples des principales singularités qu'une fonction peut présenter dans le domaine d'une coupure.

Il convient d'abord de distinguer les coupures *fermées* des coupures *ouvertes*. Quand une coupure est *fermée* et enclôt l'espace S, il n'y a aucun rapport entre les deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ représentées par les symboles à l'extérieur ou à l'intérieur de S. Il est facile de former, à l'aide d'intégrales ou de séries, une fonction $F(z)$ égale à $f(z)$ à l'extérieur de S, et présentant S comme espace lacunaire, ou égal dans S à une fonction quelconque $\varphi(z)$. Les deux fonctions f et φ peuvent admettre toutes deux le contour s de S comme coupure essentielle, ou comme coupure artificielle; ou bien, l'une est continuable au delà d'un segment s sans que l'autre le soit. Dans le cas où s est coupure essentielle de $\varphi(z)$, par exemple, il n'existe, à aucun titre, une fonction qui puisse être regardée comme le prolongement naturel de $\varphi(z)$; car les symboles analytiques peuvent associer deux fonctions quelconques, et, d'autre part, on ne saurait trouver une fonction $\psi(z)$, telle que $\psi(z_1) - \varphi(z_2)$ tende vers o quand z_1 et z_2 tendent vers un point de s de part et d'autre de cette ligne; autrement, $\varphi(z)$ serait continuable.

Quand $\varphi(z)$ est continuable au delà de S, la coupure s peut être *purement artificielle;* il arrive, par exemple, que la fonction prolongée est holomorphe dans le plan.

Au contraire, soit AB une coupure *ouverte* de $f(z)$; de part et d'autre de AB, $f(z)$ prend des valeurs différentes $f_1(z')$, $f_2(z'')$; il est clair que les deux fonctions ne peuvent être associées arbitrairement. De plus, si $f_1(z')$ définie du côté C de AB est continuable au delà de AB par une fonction $\varphi(z)$, les points A et B sont nécessairement des *points singuliers* (critiques ou extrémités de coupures) de $\varphi(z)$; autrement, z tournant autour du point A, après avoir franchi la coupure AB de C en C′, la fonction $\varphi(z)$ prendrait, pour des points z voisins de AB et situés du côté C de cette ligne, les valeurs $f_1(z')$, de même que la fonction $f_2(z)$; $\varphi(z)$ coïnciderait donc avec $f_2(z)$ pour les points z'' voisins de AB et situés du côté C′ de AB, ce qui est impossible, $f_2(z)$ ne prolongeant pas $f_1(z)$.

Dans le cas d'une coupure ouverte AB, peut-il arriver que la *fonction* $f_1(z')$ *soit continuable au delà de* AB *sans que* $f_2(z'')$ *le soit aussi ?* Il est facile de former des exemples de ce fait; considérons un cercle C de centre O et de rayon R; formons une fonction $\varphi(z)$ ayant comme coupure essentielle la demi-circonférence située au-dessus de Ox et holomorphe dans le reste du plan. Posons $z = z_1 + \sqrt{z_1^2 - C^2}$, le signe du radical étant choisi de manière que $|z|$ soit inférieur à R. La fonction $\varphi(z) = \psi(z_1)$ est une fonction uniforme de z_1, admettant le segment AB de Ox_1 comme coupure; quand z_1 tend vers AB du côté des y_1 positifs, z tend vers un point de la demi-circonférence inférieure de C; $\psi(z_1)$ est par suite continuable au delà de AB quand z_1 passe du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur; on voit de même que $\psi(z_1)$ n'est pas continuable quand z_1 tend vers AB du côté des y négatifs.

On peut prendre encore une fonction $f(z)$ définie dans un espace S et qui n'est pas continuable au delà de cet espace. Si AB est une portion de s, sur laquelle $f(z)$ soit continue, on considère $\varphi(x) = \int_{AB} \frac{f(z)}{z - x}\, dz$; $\varphi(x)$ n'est pas continuable au delà de AB quand x passe de S en S′ (S′ désignant l'espace extérieur à S); au contraire, $\varphi(x)$ est continuable quand z passe de S′ en S, comme le montrent aussitôt les deux égalités

$$f(x) = \int_{s-\text{AB}} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \varphi(x),$$

pour x intérieur à S, et

$$0 = \int_{s-\text{AB}} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \varphi(x),$$

pour x extérieur à S.

Un exemple très simple de fonctions continuables des deux côtés d'une coupure AB est offert par les fonctions multiformes qu'on rend uniformes en joignant leurs points critiques deux à deux. Inversement, si $f(z)$ présente une coupure AB jouissant de cette propriété, la fonction $f(z)$ peut-elle être considérée comme une branche d'une fonction multiforme n'ayant aux environs de AB que des points critiques distribués sur AB ? On se rend compte du contraire de la manière suivante : soit $\varphi(z)$ une fonction ayant comme plus haut la demi-circonférence supérieure d'un cercle C comme coupure, cette coupure étant essentielle quand z entre dans le cercle et artificielle quand z en sort. Si l'on pose $z = z_1 + \sqrt{z_1^2 - C^2}$, la fonction $\psi(z_1) = \varphi(z)$ est continuable des deux côtés du segment AB de Ox_1 ; mais, si z_1 passe du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur et tourne ensuite autour de B, la fonction $\psi_1(z_1)$ qui prolonge $\psi(z_1)$ présente AB comme coupure essentielle quand z_1 revient sur cette droite.

Nous avons, dans ce qui précède, donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit continuable au delà d'une coupure. Mais les conditions *nécessaires* peuvent prendre un grand nombre de formes : il suffit de reconnaître que la fonction ne présente pas dans le voisinage de la coupure un des caractères d'une fonction holomorphe, pour être certain que la coupure est essentielle. Ainsi, quand la fonction admet dans le voisinage d'une ligne une infinité de zéros, de pôles ou de points essentiels *formant une suite linéaire,* cette ligne est sûrement une coupure essentielle de la fonction. C'est le cas du cercle fondamental pour les fonctions fuchsiennes définies seulement dans ce cercle.

Si $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de AB, du côté C de cette ligne, sa valeur peut ne pas tendre vers une limite quand z tend vers des points ζ de AB formant une suite linéaire [$f(z)$ est indéterminée sur le chemin ζz, ou $f(z)$ tend vers des limites différentes sur deux chemins ζz différents].

Voici un exemple curieux de ce fait : considérons la fonction

$$h(z) = \frac{\alpha_1}{z-a} + \frac{\alpha_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(z-a)^n} + \ldots.$$

On peut toujours prendre n assez grand pour qu'à l'extérieur d'un cercle ayant a pour centre et ρ pour rayon le module du reste R_n de la série soit inférieur à ε. Formons une suite de fonctions $h_1(z), \ldots, h_\mu(z), \ldots$, les points a_μ qui correspondent à ces fonctions étant tous distincts et distribués sur la ligne AB où ils forment une suite linéaire (ces points sont, par exemple, déterminés par la loi suivante : a_1 est le milieu de AB, a_2 et a_3 les milieux de Aa_1 et de a_1B, et ainsi de suite). Désignons par ρ_ν la distance minima de deux points quelconques pris parmi les ν premiers $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Pour chaque valeur de ν, on peut prendre n assez grand pour que

$$R_n^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n+1}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{n+1}} + \ldots$$

ait un module plus petit que ε_ν pour tous les points M ou z extérieurs à un cercle C_ν ayant a_ν pour centre et de rayon $\theta\rho_\nu$ (θ est un nombre déterminé plus petit que 1). Posons

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} R^{(\nu)}(z).$$

Cette série est uniformément convergente dans l'espace extérieur à tous les cercles C_ν, si la série $\Sigma\varepsilon_\nu$ converge.

Faisons tendre M vers un des points a_ν (soit a_μ) de manière qu'il reste extérieur aux cercles $C_{\mu+1}, C_{\mu+2}, \ldots$ (ce qui est toujours possible : si $\theta = \frac{1}{2}$, il suffit que M soit compris dans l'angle droit de sommet a_μ et dont la bissectrice est normale à AB). Dans ces conditions, $\varphi(z) - R^{(\mu)}(z)$ tend vers une valeur déterminée, car on peut toujours prendre q assez grand pour que

$$\left| \sum_{q+1}^{\infty} R^{(\nu)}(z) \right|$$

soit inférieur à σ et, d'autre part,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q} R^{(\nu)}(z) - R^{(\mu)}(z)$$

est holomorphe au point a_μ. La fonction $\varphi(z)$ est donc *indéterminée comme* $R^{(\mu)}(z)$ *dans le voisinage de* a_μ.

On peut également former des fonctions qui tendent vers des valeurs $f_1(l)$ discontinues quand z tend vers AB sur certaines directions, par exemple sur la normale à AB. Soit $f(\theta)$ une fonction de la variable réelle θ, discontinue dans tout intervalle; mais à variation limitée, et telle que la suite de valeurs $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$ soit discontinue. Si l'on cherche à développer cette fonction en série de Fourier, on obtient une série trigonométrique $\Sigma(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$, qui, pour toute valeur de θ entre 0 et 2π, est égale à $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$. La série $\Sigma(A_n - B_n i)z^n$ est une fonction F de z, dont la partie réelle, quand z tend vers un point du cercle C de rayon 1 et de centre O, sur la normale à ce cercle, tend vers la valeur $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$, fonction discontinue de θ. Quand z tend vers un point de la circonférence C sur certains chemins, $F(z)$ est indéterminée.

Quand une fonction $F(z)$ prend sur une coupure AB une suite continue de valeurs $F_1(l)$, la coupure est essentielle au cas où, AB étant une ligne analytique, $F_1(l)$ n'admet pas de dérivée d'ordre n. Par exemple, les séries

$$\sum \frac{z^{a_n}}{a_n}$$

(dans lesquelles a_n désigne n^n, ou $1.2\ldots n$, ...) représentent des fonctions holomorphes de z dans le cercle C de rayon 1, qui prennent sur la circonférence de C une suite continue de valeurs $F_1(\theta)$, mais qui ne sont pas continuables au delà de C; car les séries

$$\sum \frac{\cos a_n \theta}{a_n}, \quad \sum \frac{\sin a_n \theta}{a_n}$$

sont des fonctions continues de θ, n'admettant pas de dérivée, comme l'a démontré M. Darboux [1].

Les fonctions qui représentent un espace à contour analytique sur un espace dont le contour est tel que $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'existe pas, fournissent un autre exemple de cette singularité. De même à toute fonction $V(x, y)$, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, qui prend sur un contour fermé s une suite de

[1] *Mémoires sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure*, année 1875).

valeurs non analytique (le contour s étant analytique), correspond une fonction de z, $V + iU$, qui présente s comme coupure essentielle.

On peut encore considérer l'intégrale $F(z) = \int_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, prise le long d'un chemin analytique AB, la fonction $f(\zeta) = f_1(l)$ n'admettant pas de dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou étant discontinue, mais susceptible d'intégration). La fonction $F(z)$ n'est sûrement pas continuable des deux côtés de la coupure. Soit $J_1(z)$ et $J_2(z)$ les valeurs de $F(z)$ de part et d'autre de AB, soit de plus $f_1(l) = P(l) + iQ(l)$. Quand une seule des fonctions $P(l)$, $Q(l)$ est analytique, AB est coupure essentielle de J_1 et de J_2; car, si $J_1(z)$ est continuable, la fonction $J_2 - J_1$, définie d'un certain côté de AB, prend sur AB des valeurs dont la partie réelle (ou imaginaire) est fonction analytique de l, et n'est pas continuable au delà de AB, ce que nous avons démontré être impossible. Ces remarques s'étendent sans peine à l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \frac{G(t, z)}{F(t, z)}\,dt$.

Au contraire, lorsque la ligne AB n'est pas analytique, la fonction $f(z)$ qui prend sur AB la suite des valeurs $f_1(l) = P(l) + iQ(l)$, fonction analytique de l, n'est pas continuable. Plus généralement, quand les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ n'existent que jusqu'à l'ordre n pour la courbe AB, les dérivées de $f_1(l)$, si $f(z)$ est continuable, doivent exister jusqu'à l'ordre n et seulement jusqu'à l'ordre n. Il suffit, pour le voir, de remarquer que les points z de la courbe AB vérifient l'équation $f(z) = f_1(l)$, où $f(z)$ est analytique dans le voisinage de AB. Il faut même que la partie réelle $P(l)$ [ou imaginaire $Q(l)$] de $f_1(l)$ satisfasse à cette condition. Chaque fois qu'elle n'est pas remplie, la coupure AB est essentielle. On voit ainsi que l'intégrale $J(z) = \int_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, où la fonction de l, $f(\zeta) = f_1(l)$, est analytique, le chemin AB ne l'étant pas, présente AB comme coupure essentielle. De même, les fonctions $F(z) = V + iU$ dont la partie réelle prend sur AB la suite analytique de valeurs $V_1(l)$, ne sont pas continuables au delà de AB. Enfin, lorsque la fonction $z_1 = \varphi(z)$ représente d'une manière conforme un espace S sur un espace S_1, et que la dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'existe pas pour l'arc L de s, $\frac{d^n y_1}{dx_1^n}$ existant pour l'arc L_1 de s_1, L est coupure essentielle de $\varphi(z)$.

Ajoutons, pour terminer, que, si une fonction $f(z)$ prend sur AB des valeurs $f_1(l)$ dont la dérivée $\frac{df_1(l)}{dl}$ est continue, $f'(z)$ prend sur AB les valeurs $f_1'(l)\frac{1}{\frac{dz}{dl}}$, ainsi que cela sera démontré dans la suite (ceci suppose toutefois $\frac{dz^2}{d^2l}$ continue sur AB).

13. Dans l'étude qui précède, nous avons admis que la coupure AB n'était pas limite d'autres lignes singulières. Au cas contraire, quand un point z tend vers un point ζ de AB, il rencontre une infinité de coupures A_nB_n de $F(z)$. Si ces coupures sont essentielles, AB est nécessairement *coupure essentielle* de $F(z)$. Sinon, il convient de distinguer les deux cas suivants : lorsqu'il existe un espace S attenant à AB où la fonction $F(z)$ est continuable au delà de chaque coupure A_nB_n par une fonction $F_1(z)$ qui existe au delà de AB, on peut dire que F est *continuable au delà de* AB; si cette condition n'est pas remplie, $F(z)$ n'est pas continuable. Par exemple, soit $f(z)$ une fonction uniforme définie de part et d'autre de Ox, admettant les points O et A de l'axe des x comme points essentiels et les points $\frac{i}{n}$ et $a+\frac{i}{n}$ comme zéros simples. La fonction uniforme $F(z)=\sqrt{f(z)}$, qui présente comme coupures les droites A_nB_n joignant $\frac{i}{n}$ à $a+\frac{i}{n}$, est continuable au delà de ces coupures et de OA. Considérons, au contraire, une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n(z), \ldots, f_n(z)$ désignant une fonction dont Ox est coupure essentielle. La fonction $F(z)$ égale à $f_n(z)$ entre les droites $y=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{n+1}$, est continuable au delà de ces droites, mais présente Ox comme coupure essentielle. Dans ce cas, il arrive parfois que $F(z)$ tend vers des valeurs $F_1(x)$, fonction analytique de x, quand z tend vers Ox; ainsi, appelons $\varphi(z)$ une fonction continue sur Ox, mais dont Ox est coupure essentielle; on peut faire $f_1(z)=\varphi(z), \ldots, f_n(z)=\frac{\varphi(z)}{n}, \ldots$, et $F(z)$ tend vers o, quand z tend vers Ox.

14. Les théorèmes précédents ont leurs analogues dans l'étude des fonctions V de deux variables qui satisfont à l'équation $\Delta V=0$.

Quand deux fonctions uniformes $V(x,y)$, $V_1(x,y)$, définies du même côté d'une coupure AB, coïncident le long de cette ligne ainsi que $\frac{dV}{dn}$ et

$\frac{dV_1}{dn}$, elles coïncident dans le voisinage de la coupure. On le voit en raisonnant sur l'intégrale $\int_s \left[V(s)\frac{dLr}{dn} - \frac{dV}{dn}(s)Lr\right]ds$, comme sur l'intégrale $\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x}$.

Il suffit, pour que le théorème soit exact, qu'il existe une longueur λ telle qu'en portant sur la normale à AB, en chaque point M, la longueur $MN = \lambda$, $|V(x,y) - V_1(x,y)|$ et $\left|\frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV_1(x,y)}{dn}\right|$ soient inférieurs à tout nombre donné ε.

Quand les deux fonctions V et V_1 sont définies de part et d'autre de AB, elles se raccordent et forment une fonction analytique régulière de x, y, qui satisfait à l'équation $\Delta V = 0$. Il faut pour cela et il suffit que, si l'on porte sur la normale en M à AB les longueurs $MN = MN_1 = \lambda$, de part et d'autre de M, $|V(x,y) - V_1(x_1,y_1)|$ et $\left|\frac{dV}{dn}(x,y) - \frac{dV}{dn}(x_1,y_1)\right|$ soient inférieurs à ε (x, y étant un point de MN, x_1, y_1 de MN_1). Ceci résulte du lemme III du Chapitre II.

Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que $V(x,y)$ soit continuable au delà de AB est que la fonction V_1 existe. Il suffit encore que les différences $[V(x,y) - V_1(x_1,y_1)]$ et $\left[\frac{dV}{dn}(x,y) - \frac{dV_1}{dn}(x_1,y_1)\right]$ tendent uniformément le long de AB vers des valeurs $\varphi(l)$, $\varphi'(l)$ (l désignant l'arc AM) qui puissent être considérées comme les valeurs sur AB d'une fonction $W(x,y)$ régulière et satisfaisant à $\Delta W = 0$.

La condition est également satisfaite quand V et V_1 se raccordent sur AB, en même temps que $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$ ou, plus généralement, que $V' = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y}$ et $V'_1 = \alpha\frac{\partial V_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial V_1}{\partial y}$ (α et β désignant deux fonctions de l, mais V' et V'_1 différant de $\frac{\partial V}{\partial l}, \frac{\partial V_1}{\partial l}$). Ce que nous venons de dire s'applique évidemment aux fonctions $V(x,y,z)$ de trois variables, qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

Dans le cas où AB est une ligne analytique, il faut et il suffit, ainsi que nous l'avons démontré, que $V(x,y)$ prenne sur AB une suite de valeurs $\varphi_1(l)$, fonction analytique de l, pour que $V(x,y)$ soit continuable au delà de AB. Quand cette condition est réalisée, les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions analytiques régulières dans le voisinage de AB, et prennent en conséquence sur AB des valeurs $v'(l)$, $v''(l)$, v' et v'' étant des fonctions analytiques de l. Mais existe-t-il toujours une fonction $V(x, y)$ *telle que* V *prenne sur* AB *des valeurs* $v_1(l)$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ *des valeurs* $v'(l)$, $v_1(l)$ *et* $v'(l)$ *étant fonctions analytiques de* l? On voit sans peine qu'il en existe une et une seule : soit (x, y) un point de AB, $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$; si v existe, la fonction $\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$ est une fonction analytique de z définie de part et d'autre de AB, et l'on a sur AB

$$\frac{\partial V}{\partial x} = v'(l), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\frac{dv_1}{dl} - v'(l)\varphi'(l)}{\psi'(l)} = v''(l).$$

Or il existe une fonction $f(z)$ définie de part et d'autre de AB, et prenant sur AB les valeurs $v'(l) + iv''(l)$, fonction analytique de l. Si l'on pose $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z)$, la partie réelle de $F(z)$, $P(x, y)$, pour une valeur convenable de la constante d'intégration, satisfait aux conditions énoncées. D'après les premiers théorèmes, il est clair qu'il n'en saurait exister d'autres.

Plus généralement, on démontre de même qu'il existe une fonction $V(x, y)$ prenant sur AB les valeurs $v_1(l)$, et telle que $\alpha(l)\frac{\partial V}{\partial x} + \beta(l)\frac{\partial V}{\partial y}$ prenne sur AB les valeurs $v'(l)$: $\alpha(l)$, $\beta(l)$, $v_1(l)$, $v'(l)$ étant des fonctions analytiques de l.

De ces théorèmes, on déduit au sujet des coupures des fonctions $V(x, y)$ des remarques identiques à celles qu'on a faites sur les coupures des fonctions de z.

Les conditions *nécessaires* pour qu'une fonction $v(x, y)$ soit continuable au delà d'une coupure analytique peuvent s'étendre aux fonctions $V(x, y, z)$ de trois variables. Mais il n'en est pas de même des conditions suffisantes.

Soit S une surface analytique, coupure d'une fonction $V(x, y, z)$. Nous appelons *fonction analytique* de deux ou trois variables une fonction qui pour tout point (x_0, y_0, z_0) (sauf pour des points exceptionnels) est développable en série de Taylor, cette série convergeant tant que $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, $|z - z_0|$ restent inférieurs à certaines valeurs, pour des valeurs réelles ou imaginaires de x, y, z.

Les fonctions $V(x, y, z)$ sont des fonctions analytiques. Une *surface* *analytique* est une surface telle, que ses coordonnées x, y, z s'expriment en *fonction analytique* de deux paramètres α et β

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y = \psi(\alpha, \beta), \qquad z = \chi(\alpha, \beta),$$

φ, ψ, χ étant définies pour des valeurs réelles et imaginaires de α, β voisines de α_0, β_0 (le couple α_0, β_0 définit un point de la surface). Si $V(x, y, z)$ est continuable au delà de S, V prend sur S (ainsi que ses dérivées d'ordre quelconque) *des valeurs* $V_1(\alpha, \beta)$, *où* $V_1(\alpha, \beta)$ *est une fonction analytique de* α, β; car remplaçons x, y, z en α, β dans $V(x, y, z)$; les coordonnées x, y, z sont définies en fonction de α, β pour des valeurs imaginaires de α, β voisines de α_0, β_0, et $V(x, y, z)$ est définie pour des valeurs imaginaires de x, y, z voisines de x_0, y_0; il en résulte que $V_1(\alpha, \beta)$ est une fonction de α, β définie pour les valeurs réelles et imaginaires de α, β voisines de α_0, β_0; c'est donc une fonction analytique de α, β. Il en est de même des valeurs de $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ou $\dfrac{dv}{dn}$, ...

Inversement, quand une fonction $V(x, y, z)$ prend sur S des valeurs $V_1(\alpha, \beta)$, et $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ des valeurs $V'(\alpha, \beta)$, V_1 et V' étant fonctions analytiques de α, β, cette fonction est-elle continuable au delà de S? Autrement dit, existe-t-il une fonction $V(x, y, z)$ régulière de part et d'autre de S et vérifiant sur S ces deux conditions? Il n'en peut évidemment exister qu'une, et, si elle existe, les valeurs de ses dérivées partielles en un point x_0, y_0, z_0 de S s'obtiennent en dérivant les équations

$$V_1(x, y, z) = V_1(\alpha, \beta),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = V'(\alpha, \beta)$$

et

$$\Delta V = 0.$$

La première condition donne, par dérivations successives, $(n+1)$ équations contenant linéairement les dérivées de V jusqu'à l'ordre n inclusivement; la deuxième donne n équations analogues; la troisième, $\dfrac{(n-1)n}{2}$; en tout, $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires, c'est-à-dire autant que de dérivées d'ordre n et d'ordre inférieur. On peut donc calculer les valeurs au point (x_0, y_0, z_0) de ces dérivées; si la série de Taylor formée à l'aide de ces valeurs est convergente, la fonction $\Phi(x, y, z)$ ainsi définie vérifie les conditions énoncées. Mais il n'est pas démontré qu'elle converge nécessairement.

Dans le cas où la surface de S comprend une portion σ de surface sphérique Σ, sur laquelle $V(x, y, z)$ s'annule [la fonction $V(x, y, z)$ étant régulière dans cette sphère et continue sur sa surface], $V(x, y, z)$ est continuable au delà de Σ, ainsi que le montre aussitôt l'égalité

$$V(x, y, z) = \int\int_{\Sigma} \frac{V_1(\alpha, \beta)(R^2 - a^2)\, d\sigma}{R r^3} = \int\int_{\Sigma - \sigma} \frac{V_1(R^2 - a^2)\, d\sigma}{R r^3},$$

où r et a ont une signification connue.

Toutes les formes de *conditions nécessaires*, pour qu'une fonction $f(z)$ soit continuable au delà d'une coupure, s'étendent sans peine aux fonctions $V(x, y, z)$ et permettent de trouver des fonctions V ayant différentes espèces de coupures essentielles.

SECONDE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS A SINGULARITÉS QUELCONQUES.

CHAPITRE I.

1. Nous allons, dans cette seconde Partie, chercher à décomposer en sommes et en produits les fonctions affectées de coupures. Pour obtenir l'expression explicite en séries des fonctions auxquelles on se trouve ramené, il est nécessaire de savoir développer en série une fonction holomorphe dans une aire quelconque ou à l'extérieur d'une ligne quelconque. C'est ce point que nous traiterons dans le premier Chapitre.

Un premier mode de développement repose sur les propriétés de la *représentation conforme*. Soit une ligne quelconque s du plan des z, assujettie à la seule condition de ne pas se couper. Il existe une fonction $z_1 = f(z)$ qui représente d'une manière conforme l'espace S extérieur à s (ou l'espace intérieur à s, si s est fermée) sur l'espace S_1 extérieur à un cercle C du plan des z_1 ayant l'origine pour centre. Autrement dit, z_1 est une fonction de z holomorphe dans S (sauf en un point z_0 qui est un pôle), et telle qu'à chaque point z_1 de C corresponde un seul point z de S, et réciproquement : $z = f_1(z_1)$ est holomorphe dans S_1, sauf en un point qui est un pôle. La fonction $f(z)$ dépend de trois constantes réelles arbitraires ; on peut faire correspondre à un point de S et à un point de son contour s un point arbitraire de S_1 et de la circonférence c. Faisons correspondre les points à l'infini de S et de S_1 ; à l'extérieur de C, la fonction $z = \varphi(z_1)$ qui admet le point ∞ pour pôle se développe ainsi :

$$z = k_p z_1^p + \ldots + k z_1 + a + \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_1^2} + \ldots.$$

D'autre part, la fonction $z_1 = f(z)$, à l'extérieur d'un cercle C' ayant l'origine pour centre et comprenant s, est de la forme

$$z_1 = k'_q z^q + \ldots + k' z + a' + \frac{a'_1}{z} + \ldots.$$

On en déduit que $p = q = 1$ et que, par suite,

$$z = kz_1 + a + \frac{a_1}{z_1} + \ldots.$$

La fonction $z = \varphi(z_1)$ contient encore une constante réelle arbitraire; on peut écrire

$$z = \varphi[z_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)],$$

α désignant une constante réelle.

Posons $z' = kz_1$; quand z_1 parcourt C, z' décrit un cercle concentrique de rayon $R\rho$, si R est le rayon de C et ρ le module de k. Dans ces conditions,

$$z = z' + a + \frac{\alpha_1}{z'} + \ldots,$$

et, si l'on change, en dernier lieu, $z' + a$ en z_1, il vient

$$z = z_1 + \frac{\alpha_1}{z_1 - a} + \ldots.$$

La limite de $|z - z_1|$ est zéro pour $z = \infty$. En définitive, étant donné l'espace S, il existe une fonction $z_1 = f(z)$, telle que $\lim|z - z_1|$ soit zéro pour z infini, et qui représente d'une manière conforme l'espace S sur l'espace extérieur à un cercle bien déterminé C_1 du plan des z_1. La manière dont nous avons obtenu cette fonction montre qu'il n'en existe qu'une seule. Désignons par a le centre de C_1; nous dirons, pour abréger, que $z_1 = f(z)$ [ou $z = \varphi(z_1)$] est *fonction figurative* de l'espace S et que *a est l'affixe de la ligne s.*

Soit maintenant une fonction $u = F(z)$ holomorphe dans l'aire S (y compris le point ∞); posons $z = \varphi(z_1)$; la fonction $F_1(z_1)$, holomorphe à l'extérieur du cercle C_1, de centre a, se développe ainsi

$$h + \frac{A}{z_1 - a} + \frac{B}{(z_1 - a)^2} + \ldots + \frac{L}{(z_1 - a)^n} + \ldots,$$

et, comme $z_1 = f(z)$, on en conclut que $F(z)$ peut se mettre dans l'espace S sous la forme

$$F(z) = h + \frac{A}{f(z) - a} + \frac{B}{[f(z) - a]^2} + \ldots. \tag{1}$$

Ceci s'applique à une quelconque des fonctions $z_1 = f(z)$ qui représentent S sur un cercle d'une manière conforme. Mais la fonction figurative est la seule qui vérifie les égalités suivantes :

1° Soit σ un contour fermé entourant s :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma F(z)\,dz = A.$$

En effet, l'intégrale précédente est égale à $\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_1} g(z_1)\,dz_1$, σ_1 désignant un contour fermé entourant le cercle C_1, et $g(z_1)$ le produit $F_1(z_1)\frac{dz}{dz_1}$. D'après (1),

$$F_1(z_1) = h + \frac{A}{z_1 - a} + \frac{B}{(z_1 - a)^2} + \ldots.$$

D'autre part,

$$dz = dz_1 - \frac{dz_1}{(z_1 - a)^2} - \ldots.$$

Par suite,

$$g(z_1)\,dz_1 = dz_1\left[h + \frac{A}{(z_1 - a)} + \frac{B}{(z_1 - a)^2}\cdots\right]\left[1 + \frac{B'}{(z_1 - a)^2}\cdots\right].$$

Le seul terme dont l'intégrale ne soit pas nulle est

$$\frac{A\,dz_1}{z_1 - a}; \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma F(z)\,dz = A.$$

2° $\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma z\,F(z)\,dz = Aa + B$, si $F(z)$ s'annule pour $z\infty$. Cette intégrale est égale à l'intégrale $\int_{\sigma_1}\frac{1}{2i\pi}\psi(z_1)\,dz_1$, où $\psi(z_1) = \varphi(z_1)F_1(z_1)\frac{dz}{dz_1}$. On voit, comme plus haut, que dans ce produit le seul terme dont l'intégrale ne soit pas nulle est

$$\frac{Aa + B}{z_1 - a}\,dz_1, \qquad \text{par suite,} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma z\,F(z)\,dz = Aa + B.$$

Quand les égalités précédentes sont vérifiées, pour une des fonctions $z_1 = f(z)$, on aperçoit aisément que $\lim|z_1 - z| = 0$ pour $z = \infty$. La fonction figurative jouit donc seule de ces deux propriétés. Ces remarques nous seront utiles dans la suite.

En particulier, si s se réduit au point a, la fonction $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$A\left(\frac{\lambda z + \mu}{z - a}\right) + B\left(\frac{\lambda z + \mu}{z - a}\right)^2 + \ldots,$$

λ et μ étant des constantes. Mais il faut que $\lambda = 0$ et que $\mu = 1$ pour que les égalités énoncées soient satisfaites. La fonction figurative devient donc $z_1 = z$ quand s se réduit à un point.

Lorsque S est une aire à double contour, M. Schottky a montré que S peut se représenter d'une manière conforme sur la couronne comprise entre deux cercles concentriques. Il s'ensuit que $F(z)$ se développe dans l'aire S de la manière suivante :

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n f^n(z).$$

C'est la généralisation du théorème de Laurent.

2. Les modes de développement que nous indiquerons maintenant n'exigent la connaissance d'aucune fonction particulière relative à la ligne s.

En premier lieu, soit une aire quelconque S ne présentant pas d'angle rentrant et limitée par une courbe s. Traçons un cercle C tangent à s au point M et extérieur à S. Si a est le centre de C, z l'affixe de M, x un point intérieur à S, l'expression $\frac{1}{z-x}$ peut se développer ainsi

$$\frac{1}{z-x} = -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} + \ldots\right] = A(z).$$

Faisons parcourir au point z la courbe s, a variant avec z d'une manière continue, sauf aux points anguleux de s : la série $A(z)$ converge uniformément et représente $\frac{1}{z-x}$. D'autre part, si $F(x)$ est une fonction holomorphe de x dans S, continue sur s, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Par suite,

$$-2i\pi\, F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_s F(z)\,\frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}\,dz.$$

Mais on peut toujours tracer un contour extérieur à s, intérieur à la courbe σ décrite par a, et formé de k arcs de cercles tournant tous leur convexité vers s. A l'intérieur de ce contour, d'après un théorème de M. Appell,

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{a_n}{(x-\alpha_1)^n} + \frac{b_n}{(x-\alpha_2)^n} + \ldots + \frac{l_n}{(x-\alpha_k)^n}\right].$$

Les a_n, b_n, ..., l_n sont des fonctions continues de a, par suite de l'arc $l = M_1M$ de s; les α_1, α_2, ..., α_k sont des constantes. De même,

$$\frac{1}{(x-a)^\nu} = \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \left[\frac{a'_n}{(x-\alpha_1)^n} + \ldots + \frac{l'_n}{(x-\alpha_k)^n} \right].$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{F(z)(z-a)^{\nu-1}\,dz}{(x-a)^\nu} = \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \frac{A_n}{(x-\alpha_1)^n} + \ldots + \frac{L_n}{(x-\alpha_k)^n} = \varphi_\nu(x)$$

et

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu(x).$$

Si S est l'aire extérieure à une certaine ligne ouverte s, on rentre dans le cas précédent, en posant

$$2z_1 = z + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

(a et b sont les affixes des extrémités de s). La fonction $F_1(z_1)$ est holomorphe à l'extérieur d'un certain espace et peut se mettre sous la forme 2. Il suffit, pour avoir le développement de $F(z)$, de remplacer z_1 en fonction de z.

Dans le cas où S est l'aire intérieure à une courbe convexe s, un raisonnement analogue au précédent permet d'obtenir des résultats plus simples :

Nous supposons que s n'a en chacun de ses points qu'un contact simple avec sa tangente. Traçons un cercle C tangent à s au point M et comprenant S à son intérieur. Si a est le centre de C, z l'affixe de M, x un point intérieur à S, l'expression $\frac{1}{z-x}$ peut se développer ainsi

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \ldots = A(z).$$

Faisons parcourir au point z la courbe s, a variant avec z d'une manière continue, sauf aux points anguleux de s. La série $A(z)$ converge sur s uniformément et représente $\frac{1}{z-x}$. D'autre part, si $F(x)$ est holomorphe dans S et sur s, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x};$$

par suite,

$$\text{(3)} \qquad F(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_s \frac{F(z)(x-a)^n\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x),$$

$P_n(x)$ désignant un polynôme en x de degré n. On voit donc qu'une fonction $F(x)$, holomorphe dans S, *peut se développer dans cette aire en série de polynômes*.

Discussion. — Nous avons admis qu'on pouvait tracer, en chaque point de s, un cercle tangent à la courbe et *comprenant s à son intérieur*. Ceci est exact si la courbe s n'a, en chaque point, qu'un contact simple avec sa tangente. Soit, en effet, une courbe convexe passant par l'origine et ayant en ce point un contact simple avec Ox (Oy est dirigé vers le centre de courbure). Pour les valeurs de x comprises entre $-\beta$ et $+\alpha$ ($-\beta$ et $+\alpha$ étant les abscisses des tangentes parallèles à Oy), on a

$$y = \varphi(x) = \frac{x^2}{1.2}\varphi''(\theta x).$$

Traçons un cercle tangent à Ox, de rayon supérieur au plus grand des nombres α et β, ainsi qu'à d (d désigne l'ordonnée de la tangente, parallèle à Ox). Si, entre $-\beta$ et $+\alpha$, l'ordonnée du cercle

$$Y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

est plus petite que l'ordonnée correspondante de s entre α et $-\beta$, le cercle comprend s à son intérieur. Soit μ une valeur inférieure (ou égale) à la plus petite valeur de $\frac{f''(\theta x)}{2}$ entre $+\alpha$ et $-\beta$ (μ est positif) : entre α et $-\beta$, y est supérieur ou égal à μx^2. Il suffit donc que $\mu x^2 - Y$ ne soit jamais négatif entre $-\beta$ et $+\alpha$. Ceci peut s'écrire

$$R - \mu x^2 < \sqrt{R^2 - x^2}$$

($R - \mu x^2$ est positif, puisque R est supérieur à d). Élevons au carré; il vient, après réduction,

$$R > \frac{\mu^2 x^2 + 1}{2\mu}.$$

Prenons maintenant un point M quelconque sur la courbe s; x et y sont fonctions d'un certain paramètre, et le long de s, $(x'y'' - y'x'')$ est, par hypothèse, plus grand qu'un certain nombre positif. Menons en M la normale MY vers le centre de courbure; MX est la direction perpendiculaire à MY qui fait avec MY l'angle $-\frac{\pi}{2}$; si α désigne l'angle (MX, Ox), un simple changement de variables montre que, pour le point M, 2μ doit être égal ou inférieur à l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)^3}$ (x variant dans l'intervalle où le dénominateur est positif). Cette condition est satisfaite à coup sûr si 2μ est inférieur (ou égal) à la plus petite valeur sur s de $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Soient donc D la *distance maxima* de deux tangentes parallèles et $2m$ la *courbure minima* de s; il suffit de prendre R supérieur à la fois à D et à $\frac{m^2D^2+1}{2m}$, pour que les cercles de rayon R tangents intérieurement à s renferment s.

Le raisonnement n'exige pas à la rigueur que s admette en chaque point un cercle osculateur, c'est-à-dire que $\frac{d\alpha}{ds}$ tende vers une limite, mais seulement que, pour les valeurs de Δs inférieures à un certain nombre δ, le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ soit supérieur à une quantité finie, $2m$, le long de s.

Si s présente des points anguleux, il suffit que la condition relative à R soit remplie pour chaque arc distinct de s.

Quand $x'y''-y'x''$ s'annule en des points M_1 de s ne formant pas une suite linéaire, on décompose s en deux parties : la première σ comprenant ces points et dont la longueur peut être rendue aussi petite qu'on veut; la seconde $s-\sigma$; on raisonne sur $\int_{s-\sigma}\frac{F(z)\,dz}{z-x}$ comme sur l'intégrale analogue prise le long de s. On voit ainsi que cette intégrale peut se développer en série de polynômes : $\Sigma P'_n(n)$. Quand on fait tendre σ vers zéro, l'intégrale relative à σ tend vers zéro, et les polynômes $P'_n(n)$ tendent vers une limite $P_n(x)$; $\Sigma P_n(x)$ représente $F(x)$.

Si les points M_1 forment une suite linéaire sur s (par exemple, si s comprend des segments de droites), on a recours à la remarque générale suivante : soit une aire S intérieure (ou extérieure) à une courbe fermée s; s'il existe, en dehors de S, un point A, tel que, en posant $z_1=\frac{1}{z-a}$, l'espace S se transforme en un espace S_1 intérieur à une courbe convexe s_1, sans points d'inflexions, la fonction $F(x)$ peut se mettre, dans S, sous la forme

$$F(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

A quelles conditions ce point A existe-t-il? On sait que la figure qui correspond à s dans la transformation $z_1=\frac{1}{z-a}$ peut coïncider avec la figure inverse de s par rapport au point A (1 étant la puissance d'inversion). Si l'arc BC de s tourne sa convexité vers A, l'arc inverse B_1C_1 tourne sa concavité vers A. Si BC tourne sa concavité vers A et si A est intérieur à tous les cercles C osculateurs de l'arc BC, B_1C_1 tourne sa concavité vers A. Si A est extérieur à tous les cercles C, B_1C_1 tourne sa convexité vers A. Quand un cercle C passe par A, B_1C_1 présente une inflexion.

Ceci posé, une discussion très simple montre que le point A existe aux conditions suivantes : S ne présente pas d'angle rentrant; de plus, si C' désigne les cercles osculateurs à s en tous les points où s tourne sa convexité vers S, C'' les cercles osculateurs aux autres points, il faut qu'il y ait, en dehors de S, une aire intérieure à tous les cercles C' et extérieure à tous les cercles C''.

Un point quelconque de cette aire jouit de la propriété énoncée.

Les cercles C' et C'' se réduisent à des droites aux points d'inflexion. Si, en particulier, s est convexe, mais renferme des segments de droites, il faut, pour que A existe, que les demi-plans situés par rapport à ces droites du côté opposé à la courbe s aient une partie commune (ceci a toujours lieu si s ne renferme que deux segments de droites).

Quand le point A n'existe pas, on peut toujours (S étant une aire quelconque sans angle rentrant) décomposer s en arcs PQ assez petits pour qu'il existe, en dehors de S, un point α, tel que les cercles tangents à s en chaque point de PQ et passant par α soient extérieurs à S. On peut écrire

$$\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x}=\sum\int_{PQ}\frac{F(z)\,dz}{z-x};$$

la fonction $f_1(x)=\int_{PQ}\frac{F(z)\,dz}{z-x}$ présente la ligne PQ comme coupure. Posons

$$x'=\frac{1}{x-\alpha}.$$

L'arc PQ se transforme en un arc P'Q' dont toutes les tangentes sont ordinaires et extérieures à l'aire S'. La fonction $f_1\left(\frac{1}{x'}+\alpha\right)$ est développable en série de polynômes dans un contour convexe s' comprenant P'Q' et renfermant l'aire S'. Remarquons toutefois que f_1 devient infinie aux points P' et Q', mais de l'ordre de $\mathrm{L}z$ pour $z=0$; $\int_{s'}\frac{f_1\,dz'}{z'-x'}$ représente donc bien encore $f_1(x')$, et le raisonnement employé n'est pas en défaut. Il résulte de là que $\mathrm{F}(x)$ peut se développer ainsi, dans l'aire S,

$$\mathrm{F}(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\mathrm{P}_n^1\left(\frac{1}{x-\alpha_1}\right)+\mathrm{P}_n^2\left(\frac{1}{x-\alpha_2}\right)+\ldots+\mathrm{P}_n^k\left(\frac{1}{x-\alpha_k}\right)\right], \tag{4}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ étant des points extérieurs à S.

Le cas où S est l'aire extérieure à une ligne ouverte se ramène au précédent par la transformation déjà employée

$$2z_1=z+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Les développements (2), (3), (4) s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables.

3. *Propriétés des développements* (2), (3) *et* (4). — Les développements (2), (3), (4) convergent uniformément et absolument dans toute aire intérieure à S et sans point commun avec s. Leur convergence est comparable à celle des progressions géométriques. Les dérivées de $\mathrm{F}(x)$ sont représentées par les séries obtenues en dérivant les différents termes de ces développements, séries qui sont de même forme que les premières.

Étudions, en particulier, le développement (2). Les termes $\varphi_\nu(z)$ de ce développement sont identiquement nuls dans l'aire Σ extérieure aux cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, qui ne renferme pas S. Par suite, la somme de la série (2) est nulle dans Σ_1 et égale à $\mathrm{F}(x)$ dans S. On déduit de là un moyen de former des séries dont les termes sont des fonctions rationnelles, et qui représentent deux fonctions quelconques dans deux aires distinctes absolument quelconques.

Le développement (2) est possible d'une infinité de manières. En effet, quand la fonction $\varphi_\nu(x)$ est déterminée, ses coefficients ne le sont pas entièrement; de plus, on peut ajouter aux termes de la série (2) les termes d'une série de la forme $\varphi_\nu(x)$, qui représente zéro dans l'aire Σ', extérieure aux cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, et renfermant S.

Remarquons que, dans la démonstration, on peut remplacer la fonction $\frac{1}{z-x}$ par la fonction $\psi(z-x)$, $\psi(x)$ ayant au point $x=0$ un pôle d'ordre 1, dont le résidu est égal à l'unité, et ses points singuliers $A_1, A_2, \ldots$ étant tels que les points $x+A_1$, $x+A_2$, ... restent compris dans l'aire Σ quand x reste compris dans l'aire Σ'. L'expression $\frac{1}{(x-\alpha_k)^n}$ est alors remplacée par $\frac{d^n}{dz^n}\psi(z-\alpha_k)$, et les coefficients sont indépendants de la forme de ψ. On peut prendre, par exemple, pour $\psi(z)$ la fonction $Z(z)$. On déduit de là, pour un contour quelconque, des remarques analogues à celles qu'a indiquées M. Appell dans le cas d'un contour d'arcs de cercles ([1]).

Si nous considérons les premiers termes de $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = \frac{a'}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{l'}{x-\alpha_k} + \frac{a''}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots.$$

On voit que, dans le cas où S est l'espace extérieur à un contour s,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s F(x)\,dx = a' + b' + \ldots + l', \tag{2'}$$

c'est-à-dire que cette somme est égale *au résidu de la coupure s.*

Quand S est l'aire intérieure à s, rappelons-nous que

$$\frac{1}{x-a} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{l_1}{x-\alpha_k} + \frac{a'_1}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots$$

et que

$$a_1 + b_1 + \ldots + l_1 = 0$$

identiquement. D'autre part,

$$a' = \frac{1}{2i\pi}\int_s a_1(z-a)f(z)\,dz, \qquad \ldots;$$

donc

$$a' + b' + \ldots + l' = \frac{1}{2i\pi}\int_s (z-a)f(z)(a_1+b_1+\ldots+l_1)\,dz = 0.$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXI.

Ajoutons un mot au sujet des développements (3) et (4). Soit d'abord la série (3)

$$F(x) = \Sigma P_n(x) = \Sigma a_n^{(0)} + a_n^{(1)} x + \ldots + a_n^{(n)} x^n.$$

Comme les dérivées successives de $F(x)$ sont représentées par les séries que forment les dérivées des termes, on en conclut que la série

$$a_0^0 + a_1^0 + \ldots + a_n^0 + \ldots$$

converge et est égale à $F(0)$. Plus généralement,

$$a_p^p + a_{p+1}^p + \ldots + a_{p+n}^p + \ldots = \frac{F^p(0)}{1.2\ldots p}.$$

Les coefficients de (3) ne sont pas déterminés : on peut se donner arbitrairement les n premiers termes du développement (si grand que soit n); on peut aussi exiger qu'à partir du $p^{\text{ième}}$ terme les polynômes ne renferment pas de terme de degré inférieur à p, et que, pour $\nu < p$, P_ν soit égal à kx^ν; k coïncide alors avec $\dfrac{F^\nu(0)}{1.2\ldots\nu}$.

Le développement (2) ne converge pas, *en général*, en dehors de S, car les séries que nous avons intégrées pour l'obtenir divergent en dehors de S. Mais posons $u = \varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe et sa dérivée ne s'annulant pas dans S. A l'aire S correspond une aire S′ que nous supposons convexe; $z = \psi(u)$ dans S′ [$\psi(u)$ est holomorphe]; on voit donc que $F(z) = F_1(u)$ est holomorphe dans S′, et, par suite,

$$F_1(u) = \Sigma P_n(u),$$

$$F(z) = \Sigma P_n[\varphi(z)]. \tag{5}$$

Si à une valeur de u correspondent, dans le plan des z, d'autres valeurs z_1, z_2, ..., la série (5) converge aussi dans les aires S_1, S_2, ... décrites par z_1, z_2, ... Cette remarque s'applique aussi bien aux développements (2) et (3).

Quand l'aire S est extérieure à un contour s,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[P_n^1\left(\frac{1}{x - \alpha_1}\right) + \ldots + P_n^k\left(\frac{1}{x - \alpha_k}\right) \right],$$

dans le cas le plus général. On voit que

$$\int_s F(x)\,dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^1 + b_n^1 + \ldots + l_n^1,$$

a_n^1 désignant le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha_1}$ dans P_n^1, etc. On peut, dans ce développement, faire en sorte qu'à partir de $\nu = n$ les P_ν^k ne renferment plus de termes de degré inférieur à n en $\frac{1}{x-\alpha_k}$, et que, pour $\nu < n$, les P_ν^k se réduisent à $\frac{h}{(x-\alpha_k)^\nu}$. Faisons, en particulier, $\nu = 3$; dans ce cas,

$$(4') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_s \mathrm{F}(x)\,dx = a_1^1 + b_1^1 + \ldots + l_1^1, \\ \displaystyle\int_s x\,\mathrm{F}(x)\,dx = (a_1^1\alpha_1 + a_2^2) + (b_1^1\alpha_2 + b_2^2) + \ldots + (l_1^1\alpha_k + l_2^2). \end{cases}$$

Quand s se réduit à une ligne ouverte dont a et b sont les extrémités, on sait que les développements (2), (3), (4) subsistent à condition d'y remplacer x par $x_1 = \frac{1}{2}\left[x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)}\right]$: le signe du radical étant choisi de sorte que x_1 devienne infinie avec x, $\lim|x_1 - x| = 0$ pour $x = \infty$. Si l'on se reporte aux égalités établies dans le n° 1, on voit que les égalités (2′) et (4′) sont encore vraies dans ce cas.

Telles sont les principales remarques relatives à ces développements. Il est facile d'appliquer, par exemple, le développement (3) à une aire convexe, formée d'arcs de cercles, disposés d'ailleurs d'une façon quelconque. Quand $\mathrm{F}(x)$ est une constante, les coefficients se calculent aisément, et l'on obtient ainsi la somme de séries assez complexes. Mais je n'insiste pas davantage sur ce point pour le moment.

4. Nous avons, dans les raisonnements employés, supposé que $\mathrm{F}(z)$ était *holomorphe dans* S *et continue sur* s; quand cette condition n'est pas remplie (sauf dans certains cas particuliers indiqués dans la première Partie, au lemme II du Chapitre II), l'intégrale $\int_s \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z-x}$ n'a plus de sens ou ne représente pas $\mathrm{F}(x)$, et la démonstration donnée tombe en défaut.

Prenons, par exemple, le cas d'un contour convexe s. Soit x un point de S; entourons ce point d'un contour fermé σ intérieur à s et convexe :

$$2i\pi\,\mathrm{F}(x) = \int_\sigma \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z-x};$$

on peut écrire là encore

$$\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(x)$$

(a étant une fonction continue de z), et la série $\Sigma P_n(x)$ converge dans σ; quand le contour σ tend vers s, l'intégrale $\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ est constamment égale à $2i\pi F(x)$; mais rien ne prouve que les termes du second membre tendent respectivement vers une limite.

Supposons qu'il existe une fonction de z, $P + iQ$, holomorphe dans la partie de S voisine de s, continue sur s, et telle que, si l'on pose

$$P + iQ = z - a,$$

le point a, quand z parcourt s, soit sur la normale en z à s. Considérons dans S l'ensemble des courbes σ voisines de s, et normales en chacun de leurs points z à la droite joignant ce point z au point a défini par l'égalité précédente. Nous admettons encore que ces courbes sont fermées, sans points communs, et que chacune d'elles est comprise à l'intérieur des cercles qui passent par un de ses points z et ont a pour centre.

Choisissons une courbe σ assez voisine de s pour que $P + iQ$ soit holomorphe entre s et σ; on peut écrire, pour tout point x intérieur à σ,

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\sum \int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum P_n(x).$$

Si l'on désigne par σ' une seconde courbe σ, comprise entre s et la première, pour tout point x intérieur à s',

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum \int_{\sigma'} \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum P'_n(x);$$

mais

$$\int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \int_{\sigma'} \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz.$$

Car la fonction placée sous le signe $\int$ est holomorphe entre σ et σ'. Il en résulte que la série $\Sigma P_n(x)$ coïncide avec la série $\Sigma P'_n(x)$; elle converge donc à l'intérieur du contour σ' et, par suite, dans l'aire S.

Tout revient, par suite, à trouver une fonction $P + iQ$ jouissant des propriétés admises. Nous allons démontrer qu'il existe une telle fonction pour toute courbe convexe s, *n'ayant qu'un contact simple avec toutes ses tangentes, si, en chaque point* z *de cette courbe, les dérivées* $\frac{dz}{dl}$, $\frac{d^2z}{dl^2}$ (*l étant l'arc de courbe*) *existent et sont continues.*

Prenons comme paramètre arbitraire l'angle θ que fait avec la direction fixe Ox la droite OM qui joint l'origine O, *intérieure à* s, à un point M de s. Le long de s, $\frac{d^2x}{d\theta^2}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ sont continues, et l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ reste supérieure à un certain minimum positif.

Par hypothèse, la droite $(z-a)$ est normale à s, quand z parcourt s. Il faut trouver une fonction $P+iQ$, telle que $\frac{Q}{P}$ tende vers $\frac{-x'}{y'}$ quand z tend vers M, telle, par suite, que, le long de s,

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Posons

$$\frac{P}{P^2+Q^2} = P_1, \qquad \frac{-Q}{P^2+Q^2} = Q_1;$$

il vient

$$P_1\,dx - Q_1\,dy = 0.$$

Si la fonction $P_1 + iQ_1$ existe et que $U + Vi$ désigne son intégrale, U prend sur s une valeur constante.

Ceci posé, la démonstration est facile dans le cas où s est une *ligne analytique régulière.*

Cas où s est une ligne analytique régulière. — Soit $z_1 = \varphi(z)$ une des fonctions qui représentent, d'une manière conforme, l'espace S sur un cercle de centre O. Posons $U + Vi = L\,\varphi(z)$: U prend une valeur constante R_1 le long de s. Nous avons démontré, dans la première Partie, que la fonction $U + iV$ est continuable au delà de S, et holomorphe dans le voisinage de s, de part et d'autre. Il en est de même de ses dérivées successives. Soit $P_1 = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q_1 = -\frac{\partial U}{\partial y}$; le long de s, $P_1\,dx - Q_1\,dy = 0$; P_1 et Q_1 ne s'annulent pas à la fois sur s, sinon la courbe s, $U(x, y) = R_1$, présenterait un point singulier.

Si l'on pose

$$P = \frac{P_1}{P_1^2+Q_1^2}, \qquad L = -\frac{Q_1}{P_1^2+Q_1^2},$$

la fonction $P + iQ$ est holomorphe et différente de zéro aux environs de s, et prend sur s des valeurs telles que $Px' + Qy' = 0$.

Cette fonction est holomorphe dans tout l'espace S, car $P + iQ = \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}$, et $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans S; $P + iQ$ s'annule pour la valeur z_0 qui annule $\varphi(z)$, valeur qu'on peut toujours supposer être o. Dans le voisinage de $z = 0$, $P + iQ$ est de la forme $z(1 + zA)$, car le résidu de $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, relatif au pôle $z = 0$, est égal à $+1$.

Considérons alors les courbes C normales, en chacun de leurs points z, à la droite $z - a$. Elles vérifient l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$, qui a pour intégrale générale $U = R$. Pour des valeurs de $R < R_1$, ces courbes sont fermées, sans points communs, intérieures à s et tendent vers s quand R tend vers R_1; elles entourent le point $z = 0$ pour lequel $\varphi(z)$ s'annule. Je dis, de plus, que ces courbes sont convexes et n'ont qu'un contact simple avec leurs tangentes. En effet, soit Ω l'angle que fait avec Ox la normale en M à l'une des courbes C. Il suffit de prouver que $\frac{d\Omega}{d\theta}$ garde un signe constant et ne s'annule pas quand M parcourt la courbe C. Par hypothèse, sur s, $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est toujours positif; désignons par $x = f(\theta, R)$, $y = f_1(\theta, R)$, les coordonnées d'un point de C (C correspondant à la valeur R), f et f_1 sont des fonctions continues de θ et de R :

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}x' + \frac{\partial\Omega}{\partial y}y'.$$

On sait que

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{Q}{P} \qquad \text{et, d'autre part,} \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta.$$

On déduit de là que

$$x' = -Q\lambda(\theta, R), \qquad y' = P\lambda(\theta, R),$$

λ étant une fonction de θ et R (ou de x et y) égale à $\frac{x^2 + y^2}{Px + Qy}$; λ est une fonction continue qui ne s'annule pas dans S, et qui, par suite, garde un signe constant; en effet,

$$\frac{1}{\lambda} = \mu(x, y) = \frac{Px + Qy}{x^2 + y^2};$$

$\mu(xy)$ est la partie réelle du produit $(P+iQ)\frac{1}{z}$ (holomorphe dans S, puisque $P+iQ$ s'annule pour $z=0$); c'est donc une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta\mu=0$, régulière dans S, et prenant sur s une suite continue de valeurs dont le signe est constant; autrement, $Px+Qy$ s'annulerait sur s, et une tangente à la courbe s passerait par l'origine O, ce qui est impossible. Comme la fonction λ est égale à 1 pour $z=0$, elle est toujours positive. On voit ainsi que

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\lambda\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x}+P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right);$$

mais

$$\Omega=\operatorname{arc\,tang}\frac{-x'}{y'}=\operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P},$$

par suite

$$i\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}=\frac{d}{dz}L(P+iQ)=\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial x}}{P+iQ}$$

et

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\lambda P'_x=\frac{(x^2+y^2)P'_x}{Px+Qy}.$$

P'_x est une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta P'_x=0$, et prend sur s des valeurs $\frac{d\Omega}{d\theta}\frac{1}{\lambda}$, toutes positives. Comme elle est régulière dans S, elle est constamment positive dans cet espace; $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est donc toujours plus grand que o sur une courbe C.

En dernier lieu, les cercles décrits de a comme centres et passant par z, comprennent-ils à leur intérieur la courbe C qui passe par ce point z? Soit C_1 une des courbes C; traçons un cercle qui lui soit tangent et dont le centre soit du côté du centre de courbure de C_1. Ce cercle entoure C_1 si son rayon r est supérieur à la fois à d et à $\frac{m^2d^2+1}{2m}$, d étant la distance maxima de deux tangentes parallèles de C_1, et $2m$ le minimum sur la courbe de l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, c'est-à-dire de la courbure de C_1 (ou une quantité inférieure à ce minimum). D'autre part, d'après ce qui précède,

$$\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{P'_x}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$

Soit B la plus petite valeur de P'_x sur s; dans l'aire S, $P'(x)$ est au moins égale à B; soit b le maximum de $\sqrt{P^2+Q^2}$ sur s, et D la distance maxima de deux tangentes parallèles de la courbe s.

Il suffit que r soit supérieur à la fois à D et à $\frac{D^2B^2+4b^2}{4bB}$. Cette dernière quantité garde la même valeur quand on multiplie $P+iQ$ par une constante K.

Ce point établi, on peut toujours (sans que rien soit modifié dans les raisonnements précédents) multiplier la fonction $P+iQ$ par un nombre réel et positif k, assez grand pour que (μ désignant le module minimum de $P+iQ$ entre C_1 et s), μk soit supérieur à D et à $\frac{D^2b^2+4b^2}{4bB}$. La fonction $k(P+iQ)$ remplit dès lors toutes les conditions exigées : les courbes C, comprises entre C_1 et s, sont intérieures aux cercles qui passent par un point z de ces courbes et qui ont a pour centre; car le point $a=z-kP-ikQ$ est sur la normale en z à la courbe C, et à une distance de z supérieure à r, du côté du centre de courbure x_1, y_1, puisque

$$x_1=x-y'\frac{d\theta}{d\omega}=x-hP, \qquad y_1=y+x'\frac{d\theta}{d\omega}=y-hQ,$$

h étant positif. Il est même aisé de voir que l'on peut prendre k assez grand pour que cette condition soit remplie pour toutes les courbes C (si voisines qu'elles soient de l'origine).

On pouvait choisir au lieu de $\varphi(z)$ une fonction $P(z)$ (dont la partie réelle fût constante sur s), et présentant dans S des singularités quelconques. Le raisonnement précédent s'applique aussi bien.

Cas où la courbe s est quelconque. — Lorsque la courbe convexe s vérifie seulement les conditions énoncées, la démonstration est plus délicate. Nous prouverons, en premier lieu, qu'il existe une fonction $P+iQ$, holomorphe dans s, et prenant sur s une suite continue de valeurs telles que

$$Px'+Qy'=0.$$

Soit, en effet,

$$\Omega=\text{arc tang}\frac{Q}{P}\left(=\text{arc tang}\frac{-x'}{y'}=F(\theta)\quad \text{sur } s\right).$$

$F(\theta)$ croît de 2π en même temps que θ. Posons

$$\Omega'=\Omega-\theta=G(\theta)\quad \text{sur } s.$$

On sait qu'il existe une fonction Ω', régulière dans S, satisfaisant à l'équation $\Delta\Omega' = 0$, et prenant sur s la suite continue de valeurs $G(\theta)$. Désignons par R la fonction conjuguée de Ω',

$$L(P + iQ) = -R + i\Omega' + Lz,$$
$$P + iQ = ze^{-R+i\Omega'}.$$

Il suffit d'établir que R prend sur s une suite continue de valeurs.

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ une des fonctions de z qui représentent d'une manière conforme l'espace S sur un cercle C, ayant l'origine pour centre et de rayon 1; $R(x, y)$ devient une fonction $R_1(x_1, y_1)$ quand on remplace x et y en fonction de x_1, y_1; $R_1(x_1, y_1)$ est régulière dans C et satisfait à l'équation $\Delta R_1 = 0$.

A chaque point z de s correspond un point z_1 de la circonférence C, et réciproquement; θ est une fonction continue de φ qui croît constamment avec φ et augmente de 2π en même temps que φ (φ désigne l'angle que fait avec Ox_1 la droite qui joint O à z_1); $G(\theta)$ est une fonction continue de φ, $G_1(\varphi)$. A une constante réelle près, $R_1(x_1, y_1)$ est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \sin\psi \, d\psi$$

(a et φ sont les coordonnées polaires d'un point z_1). Remarquons que

$$G(\theta + \Delta\theta) - G(\theta) = \Delta\theta[G'(\theta) + \varepsilon],$$

ε tend vers o avec $\Delta\theta$, et, quand $G'(\theta)$ est continue entre o et 2π (ce qui est l'hypothèse), on peut trouver un nombre Δ_1 assez petit pour que, $|\Delta\theta|$ étant inférieur à Δ_1, $|\varepsilon|$ soit inférieur à un nombre η, qu'on peut prendre aussi petit qu'on veut, et cela pour toute valeur de θ entre o et 2π.

Il s'ensuit qu'on peut trouver δ assez petit, pour que, $|\psi|$ étant plus petit que δ,

$$G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi) = [\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)][G'(\theta) + \varepsilon],$$

$|\varepsilon|$ étant inférieur à η, quelle que soit la valeur de φ entre o et 2π. [Dans $G'(\theta)$, θ représente la valeur de θ correspondant à φ.]

On aura donc

$$\begin{aligned}2\pi R_1(x_1, y_1) = 2\pi R_1(a, \varphi) = &\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi}\sin\psi\, d\psi \\ &+ \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi}[G'(\theta) + \varepsilon]\sin\psi\, d\psi \\ = &\, K(a, \varphi) + J(a, \varphi).\end{aligned}$$

On peut trouver un nombre a_1 assez voisin de l'unité pour que, a étant compris entre 1 et a_1, on ait

$$|K(a, \varphi) - K(1, \varphi)| < \frac{\sigma}{2},$$

quel que soit φ.

Considérons $J(a, \varphi)$:

$$\begin{aligned} J(a, \varphi) &= G'(\theta) \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \sin\psi \, d\psi + \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \varepsilon \, d\psi \\ &= G'(\theta) J_1(a, \varphi) + J_2(a, \varphi). \end{aligned}$$

Admettons, pour un instant, qu'il existe un nombre a'_1 assez voisin de 1 pour que, a' et a'' étant compris entre a'_1 et 1, on ait, quel que soit φ,

$$|J_1(a', \varphi) - J_1(a'', \varphi)| < \eta.$$

Remarquons que la différence $\theta(\varphi + \psi) - \theta(\varphi)$ a le signe de ψ; par suite, dans l'intégrale J_1, tous les éléments sont positifs; J_2 s'obtient en multipliant tous ces éléments par une quantité ε de module inférieur à η; par suite,

$$J_2 = \alpha J_1,$$

$|\alpha|$ étant inférieur à η, et la différence

$$J(a', \varphi) - J(a'', \varphi) = G'(\theta)[J_1(a', \varphi) - J_1(a'', \varphi)] + \alpha' J_1(a', \varphi) - \alpha'' J_1(a'', \varphi)$$

($|\alpha'|$ et $|\alpha''|$ sont inférieurs à η). Soient M le module maximum de $G'(\theta)$, quand θ varie de 0 à 2π; m la valeur maxima de $J_1(a, \varphi)$. Si a' et a'' sont compris entre 1 et a'_1, on a

$$|J(a', \varphi) - J(a'', \varphi)| < \eta(M + 2m).$$

M est indépendant de δ, m décroît avec δ, par suite, avec η. On peut donc choisir η assez petit pour que

$$\eta(M + m) \quad \text{soit inférieur à } \frac{\sigma}{2}.$$

En définitive, il existe un nombre A assez voisin de 1 pour que, a' et a'' étant compris entre 1 et A, on ait

$$|R_1(a', \varphi) - R_1(a'', \varphi)| < \sigma,$$

quel que soit φ (σ étant un nombre donné, aussi petit qu'on veut).

Mais ceci suppose l'existence du nombre a'_1. Tout revient donc à démontrer que l'expression

$$J_1(a, \varphi) = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \sin\psi \, d\psi$$

tend uniformément vers une limite le long de c, quand a tend vers 1.

Pour cela, considérons encore la fonction z_1 de z, dont nous venons de faire usage, et soit $z = \varphi_1(z_1)$ la fonction inverse. Prenons un point M sur s, et désignons par $u + iv$ une fonction de z holomorphe dans le plan; $u(x, y)$ prend sur s une suite continue de valeurs $g(\theta)$,

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\partial u}{\partial x} x'_\theta + \frac{\partial u}{\partial y} y'_\theta.$$

x'_θ et y'_θ sont des fonctions continues de s qui ne s'annulent à la fois pour aucun point de s, et l'on peut toujours choisir u de telle sorte que $\frac{du}{d\theta}$ ne soit pas nul au point M. Par suite, dans un certain intervalle $a\mathrm{M}b$ de s, le module de $\frac{du}{d\theta}$ [ou de $g'(\theta)$] est supérieur à un nombre μ. Si l'on remplace z en fonction de z_1, $u + iv$ devient une fonction $u_1 + iv_1$ de z_1, holomorphe dans le cercle C, et $g(\theta)$ une fonction continue de φ, $g_1(\varphi)$.

Ceci posé, on voit, comme plus haut, qu'il existe un nombre δ_1 assez petit pour que, $|\psi|$ étant inférieur à δ_1,

$$g_1(\varphi+\psi) - g_1(\varphi) = [\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)][g'(\theta) + \varepsilon],$$

$|\varepsilon|$ étant inférieur à η, quel que soit φ. [Dans $g'(\theta)$, θ désigne la valeur de θ qui correspond à φ.] Si δ_1 est inférieur à δ, on remplace δ par δ_1 dans le premier raisonnement, qui subsiste *a fortiori*. Sinon, on garde δ comme intervalle. Dans tous les cas (δ représentant la même valeur que dans la première partie de la démonstration), on a

$$\begin{aligned} 2\pi \mathrm{V}_1(x_1, y_1) = 2\pi \mathrm{V}_1(a, \varphi) &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{g_1(\varphi+\psi) - g_1(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \sin\psi \, d\psi \\ &+ \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} [\mathrm{G}'(\theta) + \varepsilon] \sin\psi \, d\psi \\ &= k(a, \varphi) + j(a, \varphi). \end{aligned}$$

Mais on peut trouver un nombre a_1 assez voisin de 1 pour que, a étant compris entre a_1 et 1, on ait

$$2\pi\,|\,v_1(a,\varphi)-v_1(1,\varphi)\,|<\eta.$$

De même, il existe un nombre b_1 tel que, a étant compris entre b_1 et 1, on ait

$$|\,k(a,\varphi)-k(1,\varphi)\,|<\eta.$$

Il en résulte qu'on peut trouver un nombre A assez voisin de 1 pour que, a' et a'' étant compris entre A et 1, on ait

$$|\,j(a',\varphi)-j(a'',\varphi)\,|<4\eta.$$

Mais on voit, comme plus haut, que

$$j(a',\varphi)-j(a'',\varphi)=g'(\theta)[\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\mathrm{J}_2(a'',\varphi)]+\beta'\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\beta''\mathrm{J}_1(a'',\varphi),$$

($|\beta'|$ et $|\beta''|$ étant inférieurs à η).

Ne faisons varier φ qu'entre les limites φ_0 et φ_1 qui correspondent aux extrémités de l'arc $a_1\mathrm{M}_1b_1$ (corrélatif de $a\mathrm{M}b$). Dans cet intervalle, $|g'(\theta)|$ est supérieur à μ. L'égalité qui précède montre d'abord que $\mathrm{J}_1(a,\varphi)$ ne croît pas au delà de toute limite quand a tend vers 1. Sinon, a' restant fixe, a'' tendant vers 1, le second membre croîtrait indéfiniment. Soit donc ν une limite supérieure des valeurs de $\mathrm{J}_1(a,\varphi)$ quand a prend toutes les valeurs de A à 1 (φ variant entre φ_0 et φ_1) : $|\,\mathrm{J}(a',\varphi)-\mathrm{J}(a'',\varphi)\,|$ est inférieur à $\dfrac{\eta(4+2\nu)}{\mu}$, quel que soit φ entre φ_0 et φ_1. Comme μ est indépendant de δ, et que ε tend vers 0 avec δ, et par suite avec η, on peut choisir η assez petit pour que $\dfrac{\eta(4+2\nu)}{\mu}$ soit inférieur à σ. Le raisonnement pouvant se répéter pour un arc $a\mathrm{M}b$ quelconque, il existe un nombre a'_1 assez voisin de 1 pour que, a' et a'' étant compris entre 1 et a'_1, on ait, quel que soit φ entre 0 et 2π,

$$|\,\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\mathrm{J}_1(a'',\varphi)\,|<\eta.$$

En conséquence, la fonction $\mathrm{R}_1(a,\varphi)$ tend vers une limite $\mathrm{R}_1(1,\varphi)$ quand a tend vers 1, et cela uniformément le long de c. D'après le lemme I du Chapitre II (de la première Partie), $\mathrm{R}_1(1,\varphi)$ est fonction continue de φ; la fonction $\mathrm{R}(x,y)$, et par suite $\mathrm{P}+i\mathrm{Q}$, *prend donc sur s une suite continue de valeurs vérifiant la condition*

$$\mathrm{P}x'+\mathrm{Q}y'=0.$$

De plus, P et Q ne s'annulent pas à la fois sur s; sinon $R(x,y)$, égale à $-L\sqrt{P^2+Q^2}+L\rho$, deviendrait infinie en un point du contour s.

Posons

$$P_1+iQ_1=\frac{1}{P+iQ}=h(z).$$

Le long de s, P_1+iQ_1 est continue, et $P_1\,dx-Q_1\,dy=0$. De plus, $P+iQ$ étant holomorphe dans S et ne s'annulant que pour $z=0$,

$$P_1+iQ_1=\frac{\alpha+i\beta}{z}+H(z)$$

[$H(z)$ est holomorphe dans S]. Considérons l'intégrale

$$\int_{x_0,y_0}^{x,y}P_1\,dx-Q_1\,dy=U(x,y);$$

elle est indépendante du chemin suivi entre (x_0,y_0) et (x,y), pourvu que deux chemins différents ne comprennent pas l'origine. Elle est de la forme

$$\alpha L\rho-\beta\theta+u(x,y)$$

[$u(x,y)$ étant régulière dans s]. D'après le lemme III du Chapitre II, si (x_0,y_0), et (x,y) sont deux points de s, et l un chemin qui les joint à l'intérieur de s, les deux intégrales $\int_{x_0,y_0}^{x,y}P_1\,dx-Q_1\,dy$ prises, l'une sur le chemin l, l'autre sur s, sont égales. Comme on a $P_1\,dx-Q_1\,dy=0$ sur s, U prend sur s une valeur constante. L'intégrale $\int_s P_1\,dx-Q_1\,dy$ est donc nulle, et comme, d'autre part, elle est égale à $-2\pi\beta$, on voit que $\beta=0$. Multiplions enfin $P+iQ$ par α, $U(x,y)$ est divisée par α, et prend la forme

$$L\rho+u(x,y);$$

sur s, $U(x,y)$ est constante et égale à R_1. Comparons cette fonction au logarithme népérien de $|\varphi(z)|$, $\varphi(z)$ étant une des fonctions qui représentent d'une manière conforme l'espace S sur un cercle de centre O et de rayon e^{R_1}, et qui de plus s'annulent à l'origine. La différence

$$L|\varphi(z)|-U(x,y)$$

est une fonction $U_1(x,y)$, régulière dans S, satisfaisant à $\Delta U_1=0$, et s'annulant sur s; elle est donc identiquement nulle.

Ce point établi, on voit, comme dans le cas où s est analytique, que les courbes C ou $U = R$ (R étant inférieur à R_1) sont des courbes fermées, sans points communs, entourant l'origine, et normales en chacun de leurs points z à la droite $z - a$ ($z - a = P + iQ$); ces courbes tendent vers s quand R tend vers R_1.

Il faut prouver de plus qu'elles sont *convexes et n'ont qu'un contact simple avec leurs tangentes*. On démontre, ainsi que dans le premier cas, que, pour une courbe $C[x = f(\theta, R), y = f_1(\theta, R)]$,

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \lambda\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial x}Q + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$$

$\left[\Omega = \operatorname{arctang}\frac{Q}{P} = \operatorname{arctang} - \frac{x'}{y'}, \text{ et } \lambda(R, \theta) = \frac{x^2 + y^2}{Px + Qy}\right]$. P, Q, λ sont des fonctions de x et y (ou de θ et λ) continues dans S et sur s; λ est plus grand que zéro dans l'aire S et sur s; $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est également positif en tout point de s. Il suffit de prouver que l'expression $\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x} + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$ tend vers $\frac{d\Omega}{d\theta}\frac{1}{\lambda_1(\theta_1)}$, quand (x, y) tend vers un point (ξ, η) de s, $\left[\frac{d\Omega}{d\theta}, \lambda_1(\theta_1)\right.$ et θ_1 étant les valeurs de $\frac{d\Omega}{d\theta}$, λ et θ au point $\left.(\xi, \eta)\right]$; le raisonnement s'achèvera dès lors comme précédemment.

Envisageons donc l'expression

$$\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x} + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right).$$

Posons

$$p = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

et cherchons directement s'il existe une fonction $p + iq$ de z telle que $qP + pQ$ tende vers la valeur $\frac{F'(\theta)}{\lambda_1(\theta)}$ quand (x, y) tend vers le point de s qui correspond à la valeur θ. Par hypothèse, $F'(\theta)$ est continue et admet la période 2π; on sait qu'il en est de même de $\lambda_1(\theta)$. Il existe donc une fonction $W(x, y)$ qui prend sur s la suite de valeurs $\frac{F'(\theta)}{\lambda_1(\theta)}$, régulière dans S et satisfaisant à l'équation $\Delta W = 0$; considérons la fonction de z, $w + iW$, et soit $p + iq = \frac{w - iW}{P - iQ}$: la fonction $p + iq$ répond à la condition énoncée. Cette fonction est holomorphe dans S, sauf au point $z = 0$, qui est un pôle du premier ordre;

$$p + iq = \frac{\alpha + \beta i}{z} + k(z)$$

(β étant holomorphe dans S), $\alpha + i\beta$ est la valeur de $w + i\mathrm{W}$ pour $z = 0$, et contient une constante réelle arbitraire ($w = w_1 + \mathrm{C}$), que l'on détermine par la condition que w soit nul pour $z = 0$. Alors

$$p + iq = \frac{i\beta}{z} + k(z).$$

Soit

$$\omega(x, y) = -\int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx - q\,dy.$$

D'après le lemme III du Chapitre II, si (x_0, y_0) et (x, y) sont deux points de s,

$$\omega(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx - q\,dy,$$

l'intégrale étant prise le long de s.

Mais, le long de s,

$$p\,dx + q\,dy = \mathrm{F}'(\theta)\,d\theta:$$

donc

$$\omega(x, y) = \mathrm{F}(\theta) + \mathrm{C}.$$

D'autre part, $\omega(x, y)$ est de la forme $\beta\theta + k_1(x, y)$, la fonction k_1 étant régulière dans S. Quand θ varie de 2π, $\mathrm{F}(\theta)$ augmente de 2π, par suite $\beta = 1$. Ceci posé, faisons $\mathrm{C} = 0$, et comparons les deux fonctions ω et Ω de x, y. La différence $\mathrm{D}(x, y) = \omega(x, y) - \Omega(x, y)$ est uniforme et régulière dans S où elle satisfait à l'équation $\Delta\mathrm{D} = 0$; elle s'annule sur le contour s. Elle est donc identiquement nulle. L'expression $\frac{\partial\Omega}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial y} y'_0$ relative à une courbe C tend bien vers $\mathrm{F}'(\theta)$ quand C tend vers s.

L'existence de la fonction $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ est donc établie en toute rigueur pour toute courbe s pour laquelle $\frac{d^2 z}{dt^2}$ est continue, et qui n'a en chaque point qu'un contact simple avec sa tangente (¹).

(¹) Il résulte de ce qui précède que, pour toute courbe s vérifiant les conditions précédentes, la fonction $z_1 = \varphi(z)$ qui représente S sur C admet une dérivée $\varphi'(z)$ qui prend sur

Cas où la courbe s présente des points singuliers. — Si la courbe s présente des points A_i où les dérivées premières ou secondes de x et y sont discontinues (sans devenir infinies ou indéterminées), par exemple si s présente des points anguleux, le développement en série de polynômes est

---

s une suite continue de valeurs $\varphi'(z')$ et jouit, par suite, des propriétés énoncées au lemme III du Chapitre II : quand z tend vers un point z' de s, à l'intérieur de s ou sur s, $\varphi'(z') = \lim \frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z - z'}$; quand $\frac{d^3 z}{dl^3}$ existe et est continue, $\varphi''(z)$ existe aussi sur s. On déduit de là plusieurs conséquences : tout d'abord, soit un segment de courbe AB qui jouit de la propriété énoncée $\left(\frac{d^2 z}{dl^2} \text{ est continue}\right)$; si une fonction $f(z)$ prend sur AB des valeurs $f_1(l)$ admettant une dérivée continue $\frac{df_1}{dl}$, $f'(z)$ *prend sur* AB *les valeurs* $\frac{df_1}{dl}\,\frac{1}{\frac{dz}{dl}}$. A l'aide de la représentation conforme, on ramène ce cas général au cas où AB est un cercle de rayon 1, dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Soit $f(z) = U + iV$, $f_1(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$; si $\frac{df}{dz}$ existe sur s, on doit avoir

$$\frac{\partial U}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\varphi = -u'(\varphi),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi = -v'(\varphi).$$

Il existe une fonction $U_1(x, y)$ régulière dans C, satisfaisant à $\Delta U_1 = 0$ et prenant sur C les valeurs $-u'(\varphi)$. Posons

$$F_1(z) = P + iQ = \frac{U_2 + iU_1}{z},$$

— U_2 étant la fonction conjuguée de U_1, dont on détermine la constante, en sorte que $U_2 + iU_1$ s'annule pour $z = 0$, ce qui est possible, car $U_1(x, y) = 0$ pour $z = 0$, puisque $\int_0^{2\pi} u'(\varphi)\,d\varphi = 0$. Pour une valeur convenable de la constante, $\int P\,dx - Q\,dy$ prend sur c les valeurs $u(\varphi)$, et par suite coïncide avec U; ainsi $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = -\frac{\partial U}{\partial y}$, et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_2 + iU_1}{z},$$

U_1 étant continue sur s. De même, en raisonnant sur $V(x, y)$ comme sur U, on voit que

$$\frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V_2 + iV_1}{z},$$

V_2 étant continue sur c. Donc $\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$ ou $f'(z)$ est continue sur c. Le théorème est démontré.

Ajoutons que si une fonction $V(x, y)$ et sa dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ ou $\frac{dV}{dy}$ prennent sur AB des va-encore possible, pourvu qu'à chaque point A_i corresponde un chemin mA_i dans S, le long duquel $\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz$ tende vers une limite (x désignant un point de S). Nous verrons en effet plus loin que la fonction $F(x)$ peut se décomposer alors en une somme de fonctions, holomorphes respectivement à l'extérieur de lignes A_1A_2, A_2A_3, ... La première se développera en séries de polynômes à l'intérieur d'une courbe convexe ordinaire $A_1A_2MA_1$ entourant S, et ainsi des autres.

Il suffit même qu'il existe une série de polynômes $f(z)$, convergente dans S, et telle que la différence $F(z)-f(z)$ réponde à la condition énoncée. Ceci est toujours possible quand la fonction F admet les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme points singuliers isolés. Plus généralement, nous indiquerons dans le Chapitre II d'autres cas où l'on peut décomposer la coupure s en coupures partielles A_1A_2, ...

Si, en plusieurs points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la courbe a un contact d'ordre supérieur avec sa tangente, $F(z)$ *étant continue* sur s aux environs de ces points, on décompose l'intégrale en deux parties $\int_\sigma$ et $\int_{s-\sigma}$, σ désignant un fragment de s qui comprend tous les points A_n, et qu'on peut prendre aussi petit qu'on veut; en faisant tendre σ vers o, on voit que le développement subsiste.

Au cas contraire (et ceci s'applique aussi bien quand s n'est pas convexe), s'il existe un point a tel qu'en posant $z_1 = \frac{1}{z-a}$ la fonction $F_1(x_1) = F(x)$ soit holomorphe dans l'aire S_1 convexe, et dont le contour s_1 n'a pas de singularité, $F(x)$ se met sous la forme $\sum P_n\left(\frac{1}{x-a}\right)$. Le point a existe toujours, quand il n'y a sur s que deux points A_1, A_2.

Lorsque s est une courbe quelconque, on peut toujours la décomposer en parties A_1A_2 assez petites, soit pour que les tangentes en chaque point M

---

leurs $V_1(l)$, $V'_1(l)$, admettant une dérivée première continue, il en est de même des deux dérivées partielles.

Quand, le long de AB, $\frac{d^3 z}{dl^3}$ existe et est continu, si $V(x,y)$ prend sur AB des valeurs $V(l)$ ayant une dérivée première continue, la fonction conjuguée est continue sur AB. Si, le long du même arc AB, $V(x,y)$ prend des valeurs $V_1(l)$ admettant une dérivée seconde, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ sont continues sur AB. Ces propositions sont utiles dans l'intégration de l'équation à deux variables $\Delta V = 0$.

de $A_1 A_2$ soient ordinaires et extérieures à S, soit pour que les cercles tangents à s en chaque point M et passant par un certain point α (extérieur à S) soient extérieurs à S. Si l'on peut choisir les points $A_1, A_2, \ldots$, en sorte qu'à chacun d'eux corresponde un chemin $A_1 m_1, A_2 m_2, \ldots$, sur lequel $\int \frac{F(z)}{z-x} dz$ tende vers une limite, la fonction $F(x)$ se développe dans S sous la forme (4).

Discussion du développement (2). — La possibilité du développement (2) s'établit comme celle du développement (3), avec quelques simplifications.

Soit s un contour fermé quelconque (sans angle rentrant) tel que, pour chaque point de s, $\frac{d^2z}{dl^2}$ existe et soit continu. Le contour peut offrir des tangentes d'inflexion. On établit qu'il existe une fonction $P + iQ$, holomorphe dans S et continue sur s, telle que le long de s

$$Px' + Qy' = 0.$$

On peut toujours la multiplier par un nombre réel K assez petit en valeur absolue pour que les cercles ayant a pour centre et passant par z ($z - a = P + iQ$) soient extérieurs à la courbe C passant par z (z étant voisin de s). On en conclut que l'intégrale $\int_C \frac{(z-a)^n F(z)}{(x-a)^{n+1}} dz$ est indépendante de C quand C tend vers s; ce qui montre que le développement, trouvé pour C, converge dans S.

Si s présente des points singuliers $A_1, A_2, \ldots$, le développement est encore possible, pourvu que la coupure s puisse se décomposer en coupures partielles, $A_1 A_2, \ldots$.

Le cas où S est l'espace extérieur à une ligne non fermée se ramène aux précédents à l'aide de la transformation

$$z_1 = z + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Les développements dans une aire limitée par des arcs de cercle s ou extérieure à un contour rectiligne sont des cas particuliers des développements (2), (3) et (4). Ils s'appliquent à toute fonction discontinue sur s, mais remplissant aux points anguleux les conditions indiquées.

5. *Calcul des coefficients du développement* (3). — Revenons au cas d'une aire convexe régulière S. Nous avons démontré qu'à toute courbe s

correspond une fonction

$$a(z) = -\psi(z) = z - (P + iQ)$$

holomorphe dans S, s'annulant pour $z = 0$, et telle que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_\sigma \frac{(x+\psi)^n F(z)}{(z+\psi)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x).$$

La fonction $z + \psi$ n'a dans s qu'un zéro simple, $z = 0$; σ est une courbe quelconque entourant l'origine et intérieure à s. Chaque terme du second membre a une valeur indépendante de σ, valeur qui, pour le terme de rang n, n'est autre chose que le résidu relatif au pôle $z = 0$ de l'expression

$$\frac{(x+\psi)^n F(z)}{(z+\psi)^{n+1}}.$$

Posons

$$\psi = zf(z) = z(\alpha + zA)$$

(α est réel et positif, comme nous l'avons vu).

D'après une formule connue, le résidu est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots n} D_{z=0}^n \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{F}{1+f}.$$

Ceci montre que $P_n(x)$ s'exprime en fonction des valeurs pour $z = 0$ des n premières dérivées de $f(z)$ et de $F(z)$. Si donc on connaît la fonction $f(z)$, les coefficients pourront se calculer non plus à l'aide d'intégrales définies, *mais en fonction de* $F(0), F'(0), \ldots, F_n(0)$.

Mettons ces dérivées en évidence dans l'expression de $P_n(x)$:

$$n!\,P_n(x) = D_{z=0}^n \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{F}{1+f}.$$

Soient

$$\frac{x+zf}{1+f} = u, \qquad \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{1}{1+f} = V, \qquad \frac{1}{1+f} = g.$$

On a

$$n!\,P_n(x) = D_{z=0}^n VF = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{n\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} F_{n+p}(0)\, V_p = (V+F)_{z=0}^{(n)}.$$

L'expression

$$V_p = D_{z=0}^p g u^n$$

est indépendante de F

$$(\alpha) \qquad V_p = \sum_{q=0}^{q=p} \frac{p\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q} g_{p-q}(0)\, u_q^n = (u^n + g)_{z=0}^{(p)}.$$

La quantité u_q^n est la valeur pour $z = 0$ de $D_z^q u^n$,

$$u_q^n = D_{z=0}^q [gx + z(1-g)]^n.$$

C'est donc un polynôme en x de degré n, de la forme $x^{n-q}(b + x\mathrm{B})$ et dont les coefficients s'expriment en fonction de $u(0)$, $u'(0)$, ..., $u_q(0)$, par suite en fonction de $g(0)$, $g'(0)$, ..., $g_q(0)$. Posons

$$\begin{aligned}
g(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,\\
u(z) &= gx + z - zg = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots\\
&= a_0 x + z(a_1 x + 1 - a_0) + z^2(a_2 x - a_1) + \ldots + z^n(a_n x - a_{n-1}) + \ldots.
\end{aligned}$$

On voit que

$$b_n = \frac{g_n(0)}{1.2\ldots n} x - \frac{g_{n-1}(0)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Ceci posé, élevons u à la puissance n et cherchons le coefficient B_q de z^q. D'après une formule connue,

$$\mathrm{B}_q = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_q!} b_0^{\alpha_0} b_1^{\alpha_1} \ldots a_q^{\alpha_q}.$$

Les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des nombres entiers positifs vérifiant les deux égalités

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_q &= n,\\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + q\alpha_q &= q.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$u_q^n = \frac{1}{q!} \sum \frac{n!}{\alpha_0!\ldots\alpha_q!} b_0^{\alpha_0} \ldots b_q^{\alpha_q}.$$

Telle est l'expression directe des polynômes $P_n(x)$ en fonction des constantes g_0, g'_0, ..., $g_n(0)$.

On peut aussi exprimer les u_n^q en fonction des polynômes d'indices inférieurs, en partant des identités

$$u_{p+1}^{n+1} = D_{z=0}^{p+1} u_{p+1}^{n+1} = (n+1) D_{z=0}^p u_{p-1}^n u',$$

ou encore

$$u_{p+1}^{n+1} = \mathrm{D}_{z=0}^{p+1} u^n u = \sum_{q=0}^{q=p+1} \frac{(p+1)\ldots(p-q+2)}{1.2\ldots q} u_q^n u_{n+1-q}.$$

Réciproque du théorème précédent. — Soit une fonction arbitraire $\psi(z)$ ayant un zéro simple au point $z = a$ qu'on peut toujours supposer être l'origine. Posons $z + \psi(z) = h(z) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$, et voyons à quelles conditions les courbes C qui satisfont à l'équation $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = 0$ sont fermées et convexes dans le voisinage de l'origine. Nous avons dit que, si $\mathrm{U} + \mathrm{V}i$ désigne l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{h(z)}$, ces courbes satisfont à l'équation $\mathrm{U} = \mathrm{R}$. Comme

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{\alpha + \beta i}{z} + \mathbf{H}(z),$$
$$\mathrm{U} = \alpha \mathrm{L}\rho - \beta\theta + \mathrm{G}(x, y).$$

Si les courbes C sont fermées, β est nul. D'autre part, on peut toujours supposer α égal à 1, et

$$\mathrm{U}(x, y) = \mathrm{L}\rho + \mathrm{G}(x, y) = \mathrm{R}.$$

Posons

$$z_1 = e^{\mathrm{U}+i\mathrm{V}} = z e^{\mathrm{G}+i\mathrm{G}_1} = \varphi(z)$$

($\mathrm{G} + i\mathrm{G}_1$ est holomorphe dans le voisinage de l'origine). Comme

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

la fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans toute aire S ne renfermant ni point singulier, ni zéro de $h(z)$ (en dehors du point $z = 0$), et sa dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans S. Par suite, la fonction inverse $z = \varphi_1(z_1)$ est holomorphe dans l'aire S_1 correspondant à S; S comprenant le point O, S_1 comprend le point O_1, et l'on peut toujours décrire un cercle de centre O_1 et intérieur à S_1; la courbe correspondante est une courbe fermée, entourant l'origine O et vérifiant l'équation $\mathrm{U} = \mathrm{R}$. Quand R a une valeur négative très grande, la courbe C se réduit sensiblement au point O; quand R croît, on obtient une famille de courbes qui ne se coupent pas et qui se ferment autour de l'origine, tant que R n'atteint pas une certaine valeur limite ρ.

Ces courbes sont-elles convexes? Nous avons dit qu'en un point de ces courbes (Ω étant l'angle de la normale avec Ox)

$$\frac{d\Omega}{d\mathfrak{g}} = \frac{x^2+y^2}{Px+Qy} P'_x.$$

Il faut que $\frac{d\Omega}{d\mathfrak{g}}$ ne devienne ni nul, ni infini.

Considérons donc les deux courbes

$$\frac{Px+Qy}{x^2+y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad P'_x = 0$$

$\left(\frac{Px+Qy}{x^2+y^2} = 1 + Cx + Dy\right.$, C et D étant réguliers près de l'origine$\left.\right)$; considérons aussi les points singuliers de $P+iQ$ (qui sont ceux de P'_x); soit R' la plus petite valeur de R pour laquelle la branche de courbe $U = R$ qui se ferme autour de O rencontre un de ces points ou une de ces courbes (R' est au plus égal à ρ). Pour toute valeur de R inférieure à R', la courbe C est fermée et convexe, et l'on peut trouver un nombre K assez grand pour que le cercle passant par z et ayant pour centre $a = z - Kh(z)$ comprenne à son intérieur la courbe C (z étant un point de C). Si l'on se donne *a priori* $h_1(z) = Kh(z)$ (K est réel et plus grand que 1), on voit bien aisément que cette condition est réalisée pour les courbes C voisines de l'origine (qui correspondent à des valeurs de R inférieures à un certain maximum R_1).

En résumé, soit $h_1(z)$ une fonction de la forme $Kz[1+zA(z)]$, où K est réel et supérieur à l'unité et A une fonction holomorphe près de l'origine; la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} D^n_{z=0}[gx + z(1-g)]^n F(z) g(z)$$

est *convergente dans une certaine courbe* $U = R_1$, si $F(z)$ est holomorphe dans cette courbe

$$\left[g(z) = \frac{z}{h_1(z)}, \qquad U + iV = K\int_{z_0}^{z} \frac{1}{h_1(z)} dz\right];$$

inon, elle converge dans *la première des courbes* $U = R$ *qui rencontre une discontinuité de* $F(z)$. La somme de cette série est $F(x)$. De plus, on peut disposer de K, en sorte que R_1 soit égal à un nombre quelconque inférieur à R' (R' étant la valeur à partir de laquelle les courbes $U = R$ cessent d'être fermées, convexes ou régulières autour de l'origine).

Applications. — Pour $h_1(z) = Kz$, les courbes C sont des cercles ayant pour centre l'origine; elles sont fermées convexes et sans inflexion, quel que soit R; on voit immédiatement que c'est *la seule fonction* $h_1(z)$ qui jouisse de cette propriété.

Quand $h_1(z) = Kz(1 + az)$, les courbes C sont des cercles ayant même axe radical $\left(\text{à savoir la droite perpendiculaire au segment } OA_1 \text{ en son milieu; } A_1 \text{ a pour affixe } -\frac{1}{a}\right)$, et $R' = -L\,|\,a\,|$.

Si $h_1(z) = Kz(1 + az^2)$, les courbes C sont des quartiques bicirculaires qu'on peut définir par la relation géométrique $\rho^2 = C\rho'\rho''$ $\left(\rho, \rho', \rho'' \text{ étant les distances d'un point M de la courbe aux points O, A, A'; A et A' ont pour affixes } -\frac{1}{a} \text{ et } +\frac{1}{a}\right)\cdot$ En prenant $h_1(z) = Kz\sqrt{1 - c^2z^2}$, on obtient pour les courbes C des quartiques bicirculaires, inverses, par rapport à leur centre O, de coniques homofocales dont les foyers sont $\pm c$ (c est réel). Dans ce cas $R' = L\,\frac{c}{1+\sqrt{2}}$; en changeant x en $\frac{1}{x}$, on obtient une forme de développement pour l'aire S *extérieure à une ellipse* ayant pour foyer $\pm c$ et dont l'excentricité est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Plus généralement, soit $\frac{1}{h_1(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z-a} + \ldots + \frac{\lambda}{z-l}$, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant réels; les courbes C sont définies par la propriété $\rho\rho_1^\alpha\ldots\rho_n^\lambda = \text{const.}$; $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les distances OM, AM, ..., LM de M aux points O, $a, b, \ldots, l$. Si $\alpha = 1$ et si $\beta = \ldots = \lambda = 0$, ces courbes sont des ovales de Cassini.

Sans m'étendre davantage sur ces exemples, j'ajoute seulement que les polynômes $P_n(z)$ se rencontrent dans une série assez analogue à celle de Lagrange, et qui peut s'en déduire.

L'équation $z = \alpha x + (1-\alpha)zf(z)$ a une racine ζ qui tend vers zéro avec α. Appliquons la première forme de la série de Lagrange à l'équation

$$G(z) = z - a - \alpha\lambda(z) = 0, \tag{1}$$

en faisant

$$\lambda(z) = \frac{x + zf(z)}{1+f(z)}, \qquad \Pi(z) = \frac{F(z)}{1+f(z)}.$$

On sait que, dans un certain champ,

$$\frac{\Pi(\zeta)}{G'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} D_a^n[\lambda^n(a)\Pi(a)].$$

En particulier, pour $a = 0$, l'équation (1) devient

$$z = \alpha\lambda(z) = \alpha\frac{x + zf(z)}{1 + f(z)}, \tag{2}$$

et le premier membre du développement prend la forme

$$\frac{\Pi(\zeta)}{G'(\zeta)} = \frac{F(\zeta)(1+f)}{(1+f)^2 - \alpha[(1+f)(f+\zeta f') - f'(x+\zeta f)]} = \frac{F(\zeta)}{1+(1-\alpha)(f+\zeta f')},$$

en tenant compte de (2). Par suite,

$$\frac{F(\zeta)}{1+(1-\alpha)(f+\zeta f')} = \sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} D_{a=0}^n\left(\frac{x+af}{1+f}\right)^n \frac{F(a)}{1+f} = \sum \alpha^n P_n(x).$$

(Pour $\alpha = 1$, $\zeta = x$.) D'après la condition connue, cette série converge pour $\alpha = 1$, si x reste intérieur à une courbe fermée comprenant l'origine et telle que, tout le long du contour, $\left|\frac{\lambda(z)}{z}\right|$ soit inférieur à 1. La condition peut s'écrire

$$\left|\frac{x+\psi}{z+\psi}\right| < 1 \qquad [\psi = zf(z)].$$

Si donc il existe une aire S telle que, x étant un point intérieur quelconque et z un point du contour s, le module de $\frac{x+\psi(z)}{z+\psi(z)}$ soit plus petit que l'unité, $\Sigma P_n(x)$ converge dans cette aire et représente $F(x)$. Ceci résulte également du théorème établi précédemment. Mais inversement, pour démontrer ce théorème en partant de la série de Lagrange, il faudrait prouver qu'à un contour convexe donné s correspond une fonction $\psi(z)$ vérifiant la condition énoncée. Or la recherche de $\psi(z)$ revient précisément à celle de la fonction désignée par $P + iQ$; c'est cette recherche qui constitue d'ailleurs la seule difficulté de la première démonstration.

6. *Développement en séries des fonctions* $V(x, y, z)$ *satisfaisant à l'équation* $\Delta V = 0$ *et régulières dans un espace quelconque.* — A chaque forme de développement indiquée plus haut, correspond une forme corré-

lative de développement pour les fonctions $V(x, y)$ de deux variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Si l'on envisage les fonctions de trois variables qui satisfont à la même équation, le premier développement, basé sur la représentation conforme, ne comporte pas d'extension naturelle. Mais les développements (2), (3) et (4) se généralisent sans difficulté. Soient, en premier lieu, une surface fermée quelconque s, sans angle rentrant; α, β, γ un de ses points (α, β, γ sont fonctions de deux paramètres θ et t). On peut en chaque point α, β, γ construire une sphère de centre a, b, c, tangente à s et extérieure à cette surface. Soit, d'autre part, $F(x, y, z)$ une fonction qui satisfait à $\Delta F = 0$, régulière dans le volume S et continue ainsi que ses dérivées premières $\left(\text{ou ainsi que } \frac{dF}{dn}\right)$ sur s:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_s \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} F \right) ds,$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_{-n}(x-a, y-b, z-c)$$

et

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} V'_{-(n+1)}(x-a, y-b, z-c);$$

$a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ sont fonctions continues de α, β, γ, par suite de t et θ, sauf pour les lignes singulières de s. On peut écrire

$$2\pi F(x, y, z) = \Sigma \int\int V''_{-n}(x-a, y-b, z-c)\, d\sigma,$$

en réunissant $V_{-(n+1)}$ et V'_{-n}. Soit σ la surface lieu des centres a, b, c; on peut construire une surface s' formée de fragments de sphères extérieurs à s, tournant vers s leur convexité et intérieurs à σ. Soient $A_1 B_1 C_1, \ldots, A_k B_k C_k$ les centres de ces sphères; la fonction

$$V''_{-n}(x-a, y-b, z-c)$$

se met dans s' sous la forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{p=n}^{p=\infty} V^{(1)}_{-p}(x-A_1, y-B_1, z-C_1) + \ldots + V^{(k)}_{-p}(x-A_k, y-B_k, z-C_k),$$

Après l'intégration, la fonction $F(x, y, z)$ est représentée par la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \Phi_n(x, y, z), \tag{2}$$

Φ_n étant une expression de la forme (α).

Les remarques faites dans le plan s'appliquent ici : la série converge absolument et uniformément dans tout volume S_1 intérieur à S, et sa convergence est de l'ordre des progressions géométriques. Les dérivées de $F(x, y, z)$ s'obtiennent en dérivant les termes de (2), ce qui conduit à des séries de même forme. Les termes de (2) sont nuls identiquement dans l'espace Σ extérieur aux sphères $S_1, S_2, \ldots, S_k$ et qui ne contient pas S; la série (2) converge donc et est égale à o sans Σ. De là le moyen de former une série de la forme (2) représentant dans deux espaces quelconques deux fonctions $V(x, y, z)$ distinctes.

Le développement (2) est possible d'une infinité de manières : chaque terme $\Phi_n(x, y, z)$ étant donné, on peut lui ajouter une série dont la somme est nulle; de plus on peut ajouter, terme à terme, à la série (2) elle-même des séries de même forme dont la somme est nulle dans s'.

Les $V_p(x - A_k, y - B_k, z - C_k)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1}{r}$. On peut remplacer $\frac{1}{r}$ par $\psi(x - A_k, y - B_k, z - C_k)$; $\psi(x, y, z)$ est une fonction qui satisfait à $\Delta\psi = 0$, admet l'origine pour pôle du premier ordre, le résidu étant égal à 1, et ses autres points singuliers $(a_1, b_1, c_1), \ldots$ sont tels que le point $(x + a_1), (y + b_1), (z + c_1)$ est extérieur à s' (si x, y, z est compris dans s') ainsi qu'aux sphères (A_k, B_k, C_k). Les coefficients sont indépendants de la forme de ψ. On peut déduire de là, pour un espace quelconque, des remarques identiques à celles de M. Appell sur les espaces dont la surface est formée de fragments de sphères.

Si l'on considère le premier terme de (2)

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \ldots + \frac{a_k}{r_k} + a'_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \ldots,$$

on voit, comme pour le plan, que la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ est nulle. Quand l'espace S est extérieur à la surface s, rien n'est changé dans le raisonnement précédent; mais, dans ce cas,

$$\frac{1}{2\pi}\iint_s \frac{dF}{dn}\,ds = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A,$$

A est le résidu de la surface-coupure s.

Les développements (3) et (5) s'étendent de la même manière. Il suffit d'entourer la surface convexe s de sphères Σ qui lui soient tangentes en chaque point, et l'on voit que

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\sum \iint_s V_n(x-a, y-b, z-c)\,ds,$$

V_n étant un polynôme de degré n en x, y, z, qui satisfait à l'équation

$$\Delta V_n = 0.$$

Il en résulte que

$$(3) \qquad F(x, y, z) = \Sigma P_n(x, y, z),$$

$P_n(x, y, z)$ étant un polynôme de degré n en x, y, z, qui satisfait à l'équation $\Delta P_n = 0$. Il suffit, pour que le théorème soit exact, que $F(x, y, z)$ soit continue sur s; car, en appliquant à la surface S la méthode de C. Neuman, on met la fonction F sous la forme

$$F(x, y, z) = \iint_s G(t, \theta)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,ds,$$

G étant une certaine fonction continue de t et de θ. En raisonnant sur cette intégrale comme dans le premier cas, on voit que la fonction $F(x, y, z)$, *continue sur s et régulière dans* S, peut se développer, dans ce volume, en *une série de polynômes* P_n, *satisfaisant à l'équation* $\Delta P_n = 0$.

Discussion. — On démontre (comme dans le cas du plan) que, si $(rt - s^2)$ ne s'annule en aucun point de s, on peut trouver un rayon R assez grand pour que toutes les sphères tangentes à s et de rayon r comprennent S à leur intérieur. Si $(rt - s^2)$ s'annule en des points ou sur des lignes de s, le théorème subsiste, car il suffit de décomposer l'intégrale en deux parties, dont l'une, relative aux parties singulières de la surface, peut être prise aussi petite qu'on veut. Quand $(rt - s^2)$ s'annule sur une portion finie de s (s comprend un fragment de surface développable), il faut avoir recours à la remarque suivante : Soit l'espace S intérieur (ou extérieur) à une surface fermée quelconque s. S'il existe, en dehors de S, un point (A, B, C), tel que, en le prenant pour pôle d'inversion, S devienne l'espace intérieur à une surface convexe, la fonction $F(x, y, z)$ régulière dans S se met sous la forme

$$F(x, y, z) = h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left[\frac{x - A}{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}, \frac{y-B}{(x-A)^2 + \ldots}, \frac{z-C}{(x-A)^2+\ldots} \right]$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}}$$
$$= h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P'_n(x, y, z);$$

P'_n est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre n et d'ordre inférieur de $\frac{1}{\sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}} = \frac{1}{r}$.

Ce point (A, B, C) existe aux conditions suivantes : soient M et N les deux centres de courbure des sections principales de la surface au point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, MP le plus grand rayon. Si, au point P, la surface s est à courbure positive, nous construisons la sphère Σ' dont le rayon est MP, quand s tourne sa *concavité* vers S ; autrement, nous contruisons la sphère Σ'' dont le rayon est NP. Si, au point P, la courbure de s est négative, nous construisons la sphère Σ'' qui passe par P et qui a pour centre celui des deux points M, N qui est, par rapport à s, du côté opposé à S. Il faut et il suffit, pour que (A, B, C) existe, qu'il y ait, en dehors de S, une portion d'espace S_1 extérieure à toutes les sphères Σ' et intérieure à toutes les sphères Σ''. Ces sphères se réduisent à des plans aux points où $(rt - s^2)$ est nul. Quand $(rt - s^2)$ est toujours positif ou nul, il faut et il suffit (si l'on désigne par P l'espace situé, par rapport à un plan tangent en un point de s, du côté opposé à S) que tous les espaces P relatifs aux points où $(rt - s^2)$ s'annule aient une partie commune.

Quand le point (A, B, C) n'existe pas, on peut toujours décomposer s (si S ne présente pas d'angle rentrant) en parties $s_1, s_2, \ldots, s_k$, assez petites pour qu'il y ait, en dehors de S, des points M_i, tels que toutes les sphères qui passent par M_i et sont tangentes à s_i en chaque point soient extérieures à S. En décomposant l'intégrale qui représente $F(x, y, z)$ en plusieurs autres relatives respectivement à s_1, s_2, ..., s_k, on voit que

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,y,z) &= h + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{r_1}P_1^{(n)}\left(\frac{x-A_1}{r_1^2}, \frac{y-B_1}{r_1^2}, \frac{z-C_1}{r_1^2}\right)+\dots\right.\\ &\qquad \left.+\frac{1}{r_k}P_k^{(n)}\left(\frac{x-A_k}{r_k^2}, \frac{y-B_k}{r_k^2}, \frac{z-C_k}{r_k^2}\right)\right]\\ &= h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P_1'^{(n)}(x,y,z)+\dots+P_k'^{(n)}(x,y,z)\end{aligned}\right.$$

$\Big[P_i'^{(n)}$ est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre n et d'ordre inférieur de $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\sqrt{(x-A_i)^2+(y-B_i)^2+(z-C_i)^2}}$, A_i, B_i, C_i désignant les coordonnées de $M_i\Big]$.

Les séries (3) et (4) convergent absolument et uniformément dans tout espace Σ intérieur à S. Les dérivées de F s'obtiennent en dérivant les termes des séries (3) et (4), ce qui conduit à des séries de même forme. Dans le développement (3) en particulier, si

$$P_n(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{\alpha,\beta,\gamma}^{(n)} \times x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

$$\frac{\partial^p F(x,y,z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \sum_{n=p}^{n=\infty} a_{\alpha,\beta,\gamma}^{(n)} \qquad \text{pour} \quad x=y=z=0.$$

Les développements (3) et (4) sont possibles d'une infinité de manières. On peut se donner arbitrairement les n premiers termes ou assujettir les polynômes P_n à ne pas contenir, au delà du $p^{\text{ième}}$, de termes de degré inférieur à p. On peut faire en sorte, par exemple, que les termes en $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, ..., $\frac{1}{r_k}$ figurent seulement dans le premier terme du développement (4). Si S est l'espace extérieur à une surface, le résidu de cette coupure est alors égal à $a_1+a_2+\dots+a_k$, les lettres a_1, a_2, ..., a_k désignant les coefficients respectifs de $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, ..., $\frac{1}{r_k}$.

Quand $F(x,y,z)$ n'est pas continue sur s, la convergence des séries (2), (3) et (4) ne s'établit que dans des cas particuliers.

CHAPITRE II.

1. Soit $F(z)$ une fonction uniforme de z qui ne présente dans le plan des z qu'un nombre fini de singularités $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (coupures, espaces lacunaires, points essentiels ou pôles) : $L_1, L_2, \ldots, L_n$ n'ont pas de points communs. Cette fonction peut se mettre sous la forme *d'une somme de n fonctions n'admettant chacune dans le plan qu'une singularité.*

Il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement employé par M. Bourguet dans le cas des points singuliers. On trace n contours $s_1, s_2, \ldots, s_n$, comprenant chacun à son intérieur une des singularités et une seule : quand la ligne L_i est fermée et n'enclòt pas un espace lacunaire, le contour s_i est multiple. La fonction $F(z)$ (qu'on suppose régulière à l'infini) est holomorphe dans l'aire S extérieure aux contours s_i et intérieure à un cercle C de centre O et de rayon assez grand pour enfermer toutes les coupures L_i. Si x désigne un point de S, s le contour de cette aire, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} + \ldots + \int_{s_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x} + \ldots + \int_{s_n} \frac{F(z)\,dz}{z-x}\right].$$

La première intégrale est une constante $2i\pi h$; l'intégrale $\int_{s_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ définit une fonction de x holomorphe à l'extérieur de L_i, car on peut prendre s_i aussi voisin de L qu'on veut sans changer la valeur de l'intégrale pour les points x extérieurs à s_i : $F(x)$ se met donc sous la forme

$$F(x) = h + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

chacune des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n'admettant qu'une des singularités $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Le cas où $F(x)$ n'est pas holomorphe à l'infini se ramène au précédent, en posant $z = \frac{1}{z_1 - a}$; $F(x)$ est alors une somme de n fonctions dont l'une a, pour lignes singulières, plusieurs lignes L' ayant des points à l'infini.

Le long de s, l'intégrale $\int_s F(z)\,dz$ est nulle : si donc on appelle *résidu* de L_i la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{s_i} F(z)\,dz$, on voit que la *somme des résidus de $F(x)$ dans le plan est nulle.* Quand la fonction $F(x)$ est holomorphe à l'infini, le résidu du point $z=\infty$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$, changé de signe, dans le développement de $F(x)$ à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand. Si le point $z=\infty$ est un point singulier de $F(x)$, le résidu relatif à la coupure L′ est la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int F(z)\,dz$ prise, dans le sens inverse, le long d'un contour fermé entourant toutes les singularités, sauf L′.

Ce qui précède s'applique à la fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$; quand $F(x)$ n'a, dans le plan, qu'un nombre fini de zéros ou de singularités, on en conclut, en intégrant et en passant du logarithme à la fonction, que $F(x)$ peut se développer ainsi

$$F(x)=(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\dots(x-a_i)^{p_i}\times e^{f_1(x)}\times e^{f_2(x)}\times\dots\times e^{f_n(x)},$$

$f_1, f_2, \dots, f_n$ n'ayant respectivement qu'une singularité $L_1, L_2, \dots, L_n$. Si l'on appelle *ordre* de la coupure L_i l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{s_i}\frac{F'(z)\,dz}{F(z)}$, *la somme des ordres de* $F(x)$ *est nulle* dans le plan.

Remarque. — Il est possible, dans bien des cas, de *décomposer* une singularité formée d'une ligne continue en plusieurs ordres, grâce à l'observation suivante :

Soit L une coupure non fermée de $F(x)$; A et B sont ses extrémités, C un point de AB. Posons

$$f(x)=\int_\sigma\frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

(σ désignant un contour fermé ne contenant que la coupure L). S'il existe un chemin l, traversant AB au point C, et sur lequel $|F(x)|$ ne croisse pas indéfiniment, on peut décomposer $f(x)$ en une somme de deux fonctions, qui n'admettent respectivement comme coupure que AC et CB. En effet, l rencontre σ aux points M et N et décompose σ en deux parties σ_1 et σ_2, formant avec l deux contours fermés $\sigma_1+\mathrm{MN}$ et $\sigma_2+\mathrm{NM}$, qui contiennent le premier AC, le second BC. On peut écrire

$$f(x)=\int_{\sigma_1+\mathrm{MN}}\frac{F(z)\,dz}{z-x}+\int_{\sigma_2+\mathrm{NM}}\frac{F(z)\,dz}{z-x}=f_1(x)+f_2(x);$$

$f_1(x)$ est définie pour toute valeur de x extérieure à AC, car on peut toujours tracer un contour σ', laissant à l'extérieur le point x et entourant AB :

ce contour rencontre le chemin l aux points M′, N′, et l'on a

$$f_1(x) = \int_{\sigma'_1 + \mathrm{M'N'}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x} = \int_{\sigma_1 + \mathrm{MN}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x},$$

car $\mathrm{F}(x)$ est holomorphe à l'intérieur du contour formé par σ_1, σ'_1, MM′ et NN′. De même, $f_2(x)$ est holomorphe à l'extérieur de BC. Il suffit, pour que la remarque s'applique, qu'il existe un chemin l, tel que, z et z_1 tendant vers C sur l de part et d'autre de L et suivant une certaine loi,

$$\int \left[\frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x} - \frac{\mathrm{F}(z_1)\,dz_1}{z_1 - x} \right]$$

tende vers une limite $\varphi(x)$. Il suffit même qu'on puisse trouver deux fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ n'ayant respectivement pour coupures que AC et CB, telles que $\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}(x) + g_1(x) + g_2(x)$ vérifie la condition précédente.

Quand la coupure L est une ligne fermée ne limitant pas un espace lacunaire, si cette condition est remplie pour deux points C et D de L, on peut la décomposer en deux coupures CED, CFD.

Quand L limite un espace lacunaire Σ, si, pour deux points C et D de L, il existe deux chemins l et l' sur lesquels $|\mathrm{F}(x)|$ ne croisse pas indéfiniment quand z tend vers C sur l, et vers D sur l', à l'extérieur de Σ, la coupure peut se décomposer en deux parties CED, CFD. Il suffit même que, z et z' tendant simultanément vers C et D sur l et l' (suivant une certaine loi), $\int \left[\frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x} - \frac{\mathrm{F}(z')\,dz'}{z' - x} \right]$ tende vers une limite $\varphi(x)$.

Dans tous les cas, cette condition n'étant pas remplie, on peut tracer un chemin arbitraire MN rencontrant la coupure L (qu'on suppose ouverte) au point C, et définir $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de la manière suivante

$$f_1(x) = \int_{\sigma_1} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x},$$

σ_1 étant un contour qui passe par M et N, sans rencontrer le chemin MN en d'autres points, et qui entoure AC en laissant x à son extérieur. De même,

$$f_2(x) = \int_{\sigma_2} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z - x},$$

σ_2 entoure BC; f_1 et f_2 admettent respectivement les coupures AC et BC, et la coupure commune MN, qu'on peut prendre aussi petite qu'on veut. En appliquant le même raisonnement à l'extrémité A de AB, on voit que $f_1(x)$ est la somme de deux fonctions f'_1 et f'_1 ayant comme coupures la première une ligne $MCAM_1$, la seconde une ligne $NCAM_1$ $\Big[M_1$ est un point arbitraire qui, parfois, peut se confondre avec A, notamment si $\left| \int \frac{F(z)\,dz}{z-x} \right|$ ne croît pas indéfiniment quand z tend vers A$\Big]$.

Quand la coupure L est une ligne fermée, on peut décomposer $f(x)$ en une somme de deux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ ayant respectivement pour coupures les lignes CED, CFD, et les deux coupures artificielles communes MCN, M_1DN_1. Si l'on remarque que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deviennent infinies aux points M, N, M_1, N_1 comme $\log(x)$ pour $x = 0$, il est clair qu'on peut décomposer $f_1(x)$, par exemple, en quatre fonctions ayant respectivement pour coupures $MCDM_1$, MN, M_1N_1, M_1CDN_1. La conclusion est analogue si L limite un espace lacunaire. On peut, en définitive, décomposer, dans tous les cas, la fonction $F(x)$ en une somme de fonctions dont *chacune est holomorphe dans l'aire extérieure à un contour fermé ou à une ligne non fermée ne se coupant pas.*

Quand L est décomposée en deux coupures L', L'', le *résidu* de $F(x)$ relatif à L' est égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma f_1(z)\,dz$, $f_1(x)$ n'admettant que la coupure L' qu'entoure σ. Ces résidus jouissent des propriétés ordinaires. Si plusieurs coupures L' ont des points à l'infini, la fonction $f(z)$ qui a pour coupure L' est la somme de plusieurs fonctions dont chacune admet pour coupure une des lignes L' et une certaine ligne L_1 arbitraire, ayant un point à l'infini, et qui disparaît dans certains cas.

Les mêmes remarques s'appliquent à la fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ et, par suite, à la décomposition en produit.

2. La fonction $F(x)$ étant ramenée à une somme de fonctions plus simples, on peut chercher à développer ces fonctions à l'aide des séries étudiées plus haut.

Il est facile de décomposer dans tous les cas $F(x)$ en une somme de fonctions $\sum_1^p \varphi_\nu(x)$, auxquelles le développement (1) s'applique, puisque cette forme de développement convient pour toute fonction $f(x)$ holomorphe à l'extérieur d'une ligne (fermée ou non) qui ne se coupe pas. La fonction

$F(x)$ est alors de la forme

$$(1)\qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} h_\nu + \frac{A_\nu}{f_\nu(x) - a} + \frac{B_\nu}{[f_\nu(x) - a]^2} + \dots.$$

La somme $\sum_1^p A_\nu$ est nulle, car A_ν est le résidu relatif à chaque coupure L_ν.

Les développements (2), (3), (4) peuvent ne pas s'appliquer aux fonctions $\varphi_\nu(x)$; nous avons indiqué dans quels cas au Chapitre précédent. On tâche alors de décomposer les fonctions exceptionnelles $\varphi_\nu(x)$ en une somme de fonctions pour lesquelles ces développements conviennent. Mais la chose n'est pas réalisable nécessairement. Ces cas écartés, la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de p séries (2), (3) ou (4). Nous avons indiqué les valeurs des résidus en fonction des coefficients de ces séries : la somme de ces valeurs est nulle.

Ces développements fournissent autant de formes de décomposition en produit de $F(x)$: par exemple, la forme (1) donne

$$F(x) = C(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\alpha_2}\dots(x-l)\prod_{i=1}^{i=p}[f_i(x) - a_i]^{p_i} e^{G\left[\frac{1}{(f_i x) - a_i}\right]}.$$

La somme $\Sigma\alpha_j + \Sigma p_i$ est nulle.

3. Supposons maintenant que $F(x)$ admette dans le plan une infinité de singularités $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$, sans points communs. Chacune d'elles, L, suite ou non d'autres singularités, peut toujours être entourée d'une certaine aire S à double contour, à l'intérieur de laquelle $F(x)$ est holomorphe : $F(x)$ peut se développer dans S à l'aide des séries ci-dessus, ou bien encore, en se rappelant que l'aire S admet la représentation conforme sur une couronne limitée par deux cercles concentriques, on met $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a_n}{[f(x) - a]^n},$$

et

$$F(x) = [f(x) - a]^m (x-a)\dots(x-l) e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{[f(x)-a]^n}}.$$

C'est la généralisation du théorème de Laurent. On peut définir la fonction caractéristique de la singularité L comme dans la théorie des points essentiels, et elle jouit des mêmes propriétés. On peut définir également *le résidu et l'ordre* par les intégrales $\int_\sigma F(z)\,dz$ et $\int_\sigma \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ (σ étant le contour fermé qui limite S à l'intérieur) : ces deux intégrales varient en général avec σ. Il est clair que les théorèmes énoncés sur les résidus et les ordres subsistent avec la nouvelle définition. Enfin, la classification des points singuliers s'étend sans modification aux lignes singulières; mais je renvoie pour cette question à un Mémoire de M. Guichard sur les points essentiels (*Annales de l'École Normale*, année 1884).

En raisonnant comme au n° 1, on met la fonction $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = F_1(x) + f_1(x),$$

$f_1(x)$ n'ayant que la singularité L_1 et $F_1(x)$ étant holomorphe sur L_1 (L_1 peut comprendre un ensemble de singularités). Mais, quand les lignes L_1, L_2, ..., L_n, ... forment une suite dont la limite est L, existe-t-il une série convergente $\Sigma f_n(x) = F(x)$, telle que chaque terme n'admette en dehors de L qu'une singularité L_n? Le théorème de M. Mittag-Leffler permet de répondre à cette question.

Théorème de M. Mittag-Leffler. — Soit $f_n(x) = \int_{\sigma_n} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ (σ_n n'entourant que la coupure L_n). *Il existe une fonction* $H_n(x)$ *n'ayant que des pôles isolés sur* L, *telle que la série* $\sum_{n=1}^{n=\infty} [f_n(x) - H_n(x)]$ *soit convergente pour tout point* x *extérieur à* L *et aux* L_n.

En effet, chaque terme $f_n(x)$ est holomorphe dans l'espace S_n extérieur à un certain contour s_n d'arcs de cercles dont les centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont sur L, et $f_n(x)$ se développe dans S_n ainsi :

$$f_n(x) = \sum \frac{a_p}{(x-\alpha_1)^p} + \frac{b_p}{(x-\alpha_2)^p} + \ldots + \frac{l_p}{(x-\alpha_k)^p}.$$

On peut prendre un nombre q_n assez grand pour que (quand x varie à l'extérieur d'un contour σ'_n voisin de σ_n et l'entourant, mais sans point commun avec lui), le reste

$$R_{q_n}(x) = f_n(x) - \sum_{p=0}^{p=q_n} \frac{a_p}{(x-\alpha_1)^p} + \ldots + \frac{l_p}{(x-\alpha_k)^p}$$

ait un module inférieur à un nombre positif donné ε_n. Si l'on choisit les ε_n de manière que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n$ soit convergente, la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ représente une fonction holomorphe de x pour tout point x qui n'appartient ni à L, ni aux singularités L_n; car, pour des valeurs de n supérieures à un certain nombre ν, le point x est extérieur aux contours s'_n (puisque ces contours tendent vers L quand n croît indéfiniment), et la série $\sum_{n=\nu+1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ converge absolument et uniformément dans un certain espace entourant x; d'autre part, la somme $\sum_{n=1}^{n=\nu} R_{q_n}(x)$ est holomorphe au point x.

Ajoutons que la différence $F(x) - \sum_{n=1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ peut s'écrire

$$\mathbf{F}(x) - f_m(x) - \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} R_{q_n}(x) - f_m(x)\right] = \mathbf{F}_m(x) + \mathbf{H}_m(x),$$

F_m et H_m étant holomorphes dans le voisinage de L_m. La fonction $F(x)$ peut donc se décomposer en une somme de fonctions $\varphi_n(x)$ n'ayant qu'une singularité en dehors de L,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{G}(x) + \Sigma h_n(x). \tag{2}$$

$G(x)$ n'admet que la singularité L dans le voisinage de cette ligne.

Les remarques faites sur la décomposition des coupures en plusieurs autres permettent d'apercevoir aisément les cas principaux où le théorème subsiste, les coupures L_n ayant des points communs.

Dans le cas où L limite un espace lacunaire Σ, on peut prendre les centres α_i des cercles qui forment le contour s_n, non plus sur L, mais à l'intérieur de Σ. Le cas d'une coupure ouverte AB peut se ramener à celui d'un espace lacunaire par la transformation

$$x_1 = x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)}.$$

Quand l'espace S extérieur à L admet la représentation conforme sur un cercle, on peut donner une autre démonstration du théorème.

Soit $x_1 = \varphi(x)$ la fonction *figurative* de L; cette fonction représente S sur l'espace Σ extérieur à un certain cercle C du plan des x_1, de rayon R : à des cercles C'_n de même centre et de rayon R'_n (R'_n étant supérieur à R), correspondent des courbes σ_n entourant L et sans points communs avec cette ligne. On peut raisonner sur ces courbes σ_n, comme sur les contours s_n d'arcs de cercles : la fonction à retrancher est alors de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p} a_0 + \frac{a_\nu}{\varphi(x)-a} + \ldots + \frac{a_\nu}{[\varphi(x)-a]^\nu} + \ldots + \frac{a_p}{[\varphi(x)-a]^p}.$$

Ce sont les premiers termes du développement de $f_n(x)$ à l'extérieur du contour σ_n qui entoure L et L_n. Dans ce cas [si $F(x)$ n'admet pas de singularités en dehors des $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots, L$], cette fonction se met sous la forme

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu}{[\varphi(x)-a]^\nu} + \sum_{p=1}^{p=\infty} h_p(x), \tag{3}$$

où

$$h_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu^{(p)}}{[\varphi_p(x)-a_p]} - P_p\left[\frac{1}{\varphi(x)-a}\right],$$

P_p désignant un polynôme en $\dfrac{1}{\varphi(x)-a}$.

On pourra aussi appliquer, dans bien des cas, les développements (2), (3) ou (4). Par exemple, si L est une courbe convexe à l'extérieur de laquelle $F(x)$ n'est pas définie, et qui sert de limite à des espaces lacunaires L_n, à l'extérieur desquels le développement (3) converge (les L_n peuvent être des points isolés, ou des cercles), la fonction $F(x)$ est de la forme

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu(x) + \sum_{p=1}^{p=\infty} h_p(x), \tag{4}$$

où

$$h_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu^{(p)}\left(\frac{1}{x-a_p}\right) - Q_p(x).$$

Les $P_\nu(z)$, $P_\nu^{(p)}(z)$ sont des polynômes en z, comme les $Q_p(z)$ [ces derniers sont les premiers termes du développement des $f_p(z)$ à l'intérieur d'une aire convexe, qui tend vers L]. On peut prendre aussi pour les $Q_p(x)$ des fonctions qui n'ont que des pôles distribués sur L, ou des pôles extérieurs à L (d'après la première démonstration).

Si la fonction $F(x)$ a m singularités, telles que L, elle est la somme de m développements analogues aux précédents.

Au théorème sur la décomposition en somme correspond un théorème sur la décomposition en produit. Il suffit d'appliquer les résultats obtenus à $\frac{F'(x)}{F(x)}$. Si $F(x)$ présente une suite de zéros a_i et de singularités b_j, qui tendent vers L, on a [d'après la formule (2)]

$$F(x) = e^{G(x)} \prod \left(\frac{x-a_i}{x-\alpha_i}\right)^{p_i} e^{g_i\left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right)} \Pi h_n(x), \tag{5}$$

les $h_n(x)$ ne s'annulant pas et n'admettant qu'une singularité b_n, en dehors de L; α_i désigne un point de L, tel que $|a_i - \alpha_i|$ tende vers o avec $\frac{1}{i}$, et $g_i(z)$ est un polynôme en z. En particulier, quand les singularités b_j sont des points isolés, on a

$$h_n(x) = \left(\frac{x-b_n}{x-\beta_n}\right)^{p_n} e^{\gamma_n\left(\frac{1}{x-b_n}\right) - g'_n\left(\frac{1}{x-\beta_n}\right)},$$

$\gamma_n(z)$ est une fonction holomorphe de z, $g'_n(z)$ un polynôme en z. Si ces singularités b_j n'existent pas, on retombe sur la formule de développement en produit, indiquée par M. Picard.

On obtient d'autres formes de développement en appliquant la formule (3). Par exemple, si L est un cercle C de centre O à l'extérieur duquel $F(x)$ est définie et holomorphe, les zéros de F tendant vers C, $F(x)$ se développe ainsi

$$F(x) = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} \prod \left(\frac{x-a_i}{x}\right)^{p_i} e^{g_i\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

On parvient au même développement en appliquant la formule (4), ou en se servant de la remarque qu'on peut prendre les points α_i à l'intérieur de C, et ici les faire coïncider avec l'origine.

Il est à remarquer que cette dernière forme est identique à celle du développement de $F(x)$ quand F a l'origine pour point essentiel et est holomorphe dans le reste du plan. Plus généralement, si C est la limite de cercles C_n, qui enferment un espace lacunaire de $F(x)$, le développement de la fonction en somme ou en produit peut se mettre sous la même forme que dans le cas où $F(x)$ admet le point essentiel O, limite d'autres points essentiels.

On voit quelle diversité de formes on peut donner aux développements précédents. La seule difficulté pratique de la méthode réside, comme pour le cas des points essentiels, dans le calcul direct de la fonction désignée par $G(x)$ et qui admet L comme coupure.

Il est facile dès lors de former l'expression la plus générale des fonctions simplement et doublement périodiques. Nous dirons un mot de ces dernières.

4. *Applications aux fonctions doublement périodiques.* — En premier lieu, le théorème des résidus et le théorème de Liouville subsistent quand la fonction doublement périodique $F(x)$ admet des singularités quelconques; car les intégrales $\int_P F(z)\,dz$ et $\int_P \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ (P désignant le parallélogramme des périodes) sont nulles. *Donc la somme des résidus et celle des ordres sont nulles dans* P.

Si, de plus, on considère l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z\,F'(z)\,dz}{F(z)}$, on voit, sans peine, en la mettant sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi}(z\,L\,z)_0^0(P) - \frac{1}{2i\pi}\int_P L\,F(z)\,dz,$$

que sa valeur est de la forme $m\omega + n\omega'$, ω et ω' désignant les périodes.

D'autre part, soit $f(x)$ une fonction holomorphe et ne s'annulant pas à l'extérieur d'un cercle C de centre a, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ se développe dans cet espace de la manière suivante

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{(z-a)^3} + \ldots,$$

et l'on a

$$\int_C \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\,dz = na + \alpha.$$

Si l'on considère chaque fonction $f_i(x) = \int_{\sigma_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ [σ_i entourant un seul zéro ou une seule singularité de $F(x)$], la somme des quantités $n_i a_i + \alpha_i$, dans P, est de la forme $m\omega + n\omega'$.

En particulier, supposons qu'on développe la fonction $f_i(x)$ en somme ou en produit, à l'aide de la série 1,

$$f_i(x) = h_i + \frac{k_i}{\varphi(x) - a_i} + \frac{l_i}{[\varphi(x) - a_i]^2} + \dots$$

et

$$f_i(x) = [\varphi(x) - a_i]^{x_i} e^{\left\{\frac{\beta_i}{\varphi(x) - a_i} + \frac{\gamma_i}{[\varphi(x) - a_i]^2} + \dots\right\}},$$

les sommes $\sum_1^p k_i$ et $\sum_1^q n_i$ doivent être nulles dans P, et la somme $\sum_1^q (n_i a_i - \beta_i)$ est de la forme $m\omega + n\omega'$. Ceci résulte des égalités établies au n° 1 du Chapitre précédent. Nous avons dit que a_i était l'*affixe* de la singularité correspondante : si l'on appelle *reste* de cette singularité le coefficient β_i changé de signe, on voit que *la somme des restes des singularités dans* P, *augmentés du produit de leur affixe par l'ordre correspondant, doit être égale à une somme de multiples des périodes* ω *et* ω'.

Si l'on applique à $f_i(x)$ les développement (2), (3), (4), les égalités (3') et (4'), établies dans le Chapitre I, fournissent les valeurs des trois intégrales définies considérées, en fonction des coefficients.

Réciproquement, on peut former une fonction doublement périodique ayant p singularités données (ou p singularités et p' zéros) dans P, si les résidus, ordres et restes de ces singularités, vérifient les conditions énoncées. Il suffit, pour établir cette réciproque, de raisonner comme dans le cas des points essentiels : on peut entourer toutes les singularités (formées ou non d'un ensemble de singularités distinctes), de contours d'arcs de cercles, et appliquer la méthode de M. Appell, ou la méthode de décomposition en sommes et en produits doublement infinis. Je renvoie, pour cette question, au Mémoire déjà cité de M. Guichard.

Quand les singularités se composent de n espaces lacunaires, on peut appliquer aussi à ces espaces le mode de développement (2), où la fonction élémentaire $\frac{1}{z - x}$ est remplacée par $Z(z - x)$. Les termes du développement sont des fonctions linéaires de Z et de ses dérivées. C'est la généralisation de la méthode de M. Appell.

Il est facile encore de développer $F(x)$ (cette fonction présentant dans P un nombre fini de zéros ou de singularités) en sommes ou en produits doublement infinis, dont les termes $\varphi_p(z + m\omega + n\omega')$ sont représentés par des intégrales définies ou par des développements de la forme (1), (2), (3) ou (4). La démonstration ordinaire s'étend aisément au cas actuel.

Enfin, si l'on emploie la méthode de M. Hermite, on voit que

$$F(x) = f(\operatorname{sn} x) + \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)\,\varphi[\operatorname{sn}(x)],$$

et l'on sait développer $f(t)$ et $\varphi(t)$ qui ont n singularités dans le plan.

Les fonctions de première et de seconde espèce s'obtiennent de la même manière; mais je n'insiste pas davantage sur ces considérations, dont le seul intérêt est de montrer la généralité des raisonnements sur lesquels repose la théorie des points essentiels.

5. *Extension des théorèmes précédents aux fonctions* $V(x, y, z)$ *qui satisfont à l'équation* $\Delta V = 0$. — Les théorèmes que nous venons d'énoncer ont leurs correspondants dans l'étude des fonctions $V(x, y, z)$ de trois variables, qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Nous nous contentons de les énoncer : les démonstrations se déduisent de celles qu'on a données dans le plan, à condition de raisonner sur l'intégrale $\int\int\left(\frac{dV}{dn}\frac{1}{r} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}V_1\right)ds$ comme sur $\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$.

1° *Une fonction affectée de n singularités (sans points communs) est la somme de n fonctions* V_p *n'ayant chacune qu'une singularité.* — Lorsqu'une ligne L divise une surface coupure σ en deux parties σ_1 et σ_2, et que, sur une surface s traversant σ et passant par L, V et ses dérivées premières ne croissent pas au delà de toute limite, on peut décomposer la fonction qui admet σ comme coupure, en une somme de deux fonctions admettant respectivement les coupures σ_1 et σ_2. Cette décomposition est possible dans tous les cas, à condition d'ajouter une coupure arbitraire s.

2° La somme des résidus de V est nulle dans tout l'espace, en définissant convenablement le résidu relatif au point à l'infini. (Le résidu de σ est la valeur de l'intégrale définie $\int\int_s \frac{dV}{dn}ds$, s entourant la seule singularité σ.)

Quand $V(x, y, z)$ présente des espaces lacunaires sur la surface desquels V est continue, on peut développer les fonctions V_p sous les formes (2), (3) ou (4). La somme des coefficients de ces développements qui représentent les résidus est nulle.

3° Lorsque les singularités S_n de V forment une suite ayant pour limite S, on peut encore mettre $V(x, y, z)$ sous la forme $W(x, y, z) + \Sigma V_n(x, y, z)$, les $V_n(x, y, z)$ n'ayant qu'une singularité S_n et des pôles sur S, et $W(x, y, z)$

n'ayant d'autre singularité que S. La démonstration est identique à celle qu'on a donnée pour le plan; on entoure les S_n d'une surface Σ_n formée de portions de sphères dont les centres α_i sont sur S, et l'on retranche de chaque fonction $V'_n = \int\int_{s_n} \left(\frac{dV}{dn} \frac{1}{r} - V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds$ les premiers termes de son développement à l'extérieur de Σ_n. Quand S limite un espace lacunaire, on peut prendre les α_i dans cet espace. On peut aussi remplacer la surface Σ_n par une autre surface, à l'extérieur de laquelle on développe V'_n.

S'il existe p singularités, telles que S, $V(x, y, z)$ est la somme de p séries analogues.

Ce qui précède s'applique, en particulier, aux fonctions $V(x, y, z)$ à trois périodes. La somme des résidus est nulle dans le parallélépipède élémentaire. Si l'on entoure chaque singularité à l'aide de portions de sphères, on peut employer la méthode de M. Appell. Quand $V(x, y, z)$ présente n espaces lacunaires sur la surface desquels $V(x, y, z)$ est continue, le développement (2), où l'on remplace l'élément simple $\frac{1}{r}(x, y, z)$ par $Z(x, y, z)$, permet de généraliser cette méthode. Il est facile aussi de mettre $V(x, y, z)$ sous la forme d'une série triplement infinie, dont les termes $V_i(x + m\omega', y + n\omega, z + p\omega'')$ sont représentés par des intégrales définies ou des développements (2), (3) ou (4). Mais je renvoie, pour ces divers points, au Mémoire de M. Appell sur les fonctions $V(x, y, z)$ qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$ (*Acta mathematica*, t. IV).

Octobre 1886.