SUR LES

LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES GAUCHES,

PAR M. CH. BIOCHE,

Professeur agrégé au Lycée de Douai

1. On peut déterminer la position d'un point sur une surface réglée par deux coordonnées r et s dont la première représente le segment de génératrice compris entre le point considéré et le point central, la seconde étant l'arc de la ligne de striction compté à partir d'une origine arbitraire et limité à ce point central. L'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'obtenir facilement en écrivant que les plans osculateurs de ces lignes sont tangents à la surface. Si l'on appelle θ l'angle que la génératrice en un point fait avec la ligne de striction, K le paramètre correspondant, Ω la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction (ces trois quantités étant des fonctions de l'arc s), l'équation des asymptotiques est

$$(1) \qquad 2K\sin\theta\frac{dr}{ds} + K^2(\Omega - K\sin\theta\cos\theta)r^2 + \sin\theta\frac{dK}{ds}r + \Omega = 0.$$

Le coefficient de r^2 est nul pour les surfaces à plan directeur.

On déduit de cette équation que, pour les surfaces à plan directeur, on a, en appelant r et r' deux solutions,

$$K(r - r')^2 = \text{const}.$$

Si K est constant, les segments déterminés par deux lignes asymptotiques sur les génératrices sont égaux (M. Paul Serret).

Les lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur et à paramètre de distribution constant, que j'appellerai, pour abréger, *surfaces* (S), ont une relation simple avec les trajectoires orthogonales des génératrices. En effet. pour ces surfaces, si l'on remarque que, dans ce cas.

$$\Omega = K\sin\theta\cos\theta,$$

l'équation (1) se réduit à

$$2\frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0,$$

tandis que l'équation des trajectoires orthogonales se trouve être

$$\frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0.$$

Donc, dans ces surfaces, *les asymptotiques sont les lieux des milieux des segments compris entre la ligne de striction et les trajectoires orthogonales.*

2. Cherchons l'équation générale des surfaces (S). Une surface à plan directeur peut se représenter par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \mathrm{F}(\alpha), \qquad \alpha = \varphi(z);$$

son paramètre de distribution est donné par

$$\mathrm{K} = \frac{d\alpha}{dz}.$$

D'autre part, si l'on appelle σ l'arc de la projection de la ligne de striction sur le plan directeur et ρ le rayon de courbure de cette projection, on a

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \rho,$$

et, par suite, en appelant θ l'angle de la génératrice avec la ligne de striction, ou de la ligne de striction avec le plan directeur,

$$\mathrm{K}\rho = \cot\theta.$$

Ce qui précède montre que l'équation générale des surfaces (S) est

$$(1) \qquad y\cos\mathrm{K}z - x\sin\mathrm{K}z = \mathrm{F}(z),$$

et que, en outre, une surface (S) est complètement déterminée si l'on donne la projection de sa ligne de striction sur le plan directeur. En particulier, si la projection est un cercle, la ligne de striction est une hélice, et réciproquement; l'équation de la surface peut alors s'écrire

$$y\cos\mathrm{K}z - x\sin\mathrm{K}z = a,$$

le signe de K donnant le sens de l'enroulement de l'hélice.

En général, si l'équation tangentielle de la projection de la ligne de striction est

$$f(u, v, w) = 0, \tag{2}$$

l'équation de la surface (S) correspondante est

$$f(\sin K z, \; -\cos K z, \; y\cos K z - x \sin K z) = 0.$$

Elle s'obtient en identifiant l'équation (1) avec

$$ux + vy + w = 0$$

et en éliminant u, v, w, $F(z)$ entre les équations de condition et les équations (1) et (2).

3. Le théorème donné précédemment sur les lignes asymptotiques permet d'obtenir l'équation de ces lignes en coordonnées cartésiennes, car leur équation peut s'écrire, en remarquant que $ds\cos\theta = d\sigma$,

$$2\,dr + d\sigma = 0;$$

d'autre part, on trouve facilement

$$d\sigma = -K\left[F(z) + \frac{1}{K^2}F''(z)\right]dz.$$

Et si l'on écrit l'équation d'une surface (S) en mettant en évidence la ligne de striction

$$\frac{y - F(z)\cos K z + \frac{1}{K}F'(z)\sin K z}{\sin z} = \frac{x + F(z)\sin K z + \frac{1}{K}F'(z)\cos K z}{\cos z},$$

la valeur commune de ces fractions étant la distance du point (x, y, z) au point central correspondant, pour avoir les équations des asymptotiques, il suffit d'égaler ces fractions à

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\sigma}{dz}dz = \frac{1}{2}\int\left[F(z) + \frac{1}{K^2}F''(z)\right]K\,dz = \frac{1}{2}\int F(z)K\,dz + \frac{1}{2K}F'(z) + \text{const.},$$

ce qui donne l'équation générale des asymptotiques

$$\frac{y - F(z)\cos K z}{\sin z} = \frac{x + F(z)\sin K z}{\cos z} = \frac{1}{2}\int F(z)K\,dz - \frac{1}{2K}F'(z) + \text{const.}$$

En particulier, il existe des surfaces (S) dont une ligne asymptotique du second système est rectiligne; si les équations de cette droite sont

$$x = 0, \qquad y = mz,$$

la surface correspondante est

$$y \cos Kz - x \sin Kz = mz \cos Kz.$$

La ligne de striction de cette surface, qui est donnée par les équations

$$x = -\frac{m}{K}\cos^2 Kz, \qquad y = m\left(z - \frac{\sin Kz \cos Kz}{K}\right),$$

a pour projection sur le plan directeur une cycloïde. Le cercle qui donne cette cycloïde a pour rayon $\frac{m}{2K}$ et roule sur la droite $x = -\frac{m}{K}$. La tangente aux sommets est donc la projection de la directrice rectiligne.

4. Parmi les surfaces (S), il y en a qui admettent pour trajectoire oblique des génératrices une des lignes asymptotiques. Je vais déterminer ces surfaces. Si l'on pose

$$F(z) + F''(z) = 2\varphi'(z),$$

les coefficients directeurs de la tangente à une asymptotique peuvent s'écrire, en faisant, pour abréger, $K = 1$,

$$\frac{dx}{dz} = -[\varphi(z) \sin z + \varphi'(z) \cos z],$$

$$\frac{dy}{dz} = -[\varphi'(z) \cos z - \varphi(z) \sin z]$$

si l'on fait rentrer dans la fonction $\varphi(z)$ la constante correspondant à la ligne asymptotique considérée. On en déduit, en appelant m la cotangente de l'angle de cette courbe avec les génératrices,

$$m = \frac{\varphi'(z)}{\sqrt{\varphi^2(z) + 1}} = \frac{d}{dz}\log\left[\varphi(z) + \sqrt{\varphi^2(z) + 1}\right];$$

on tire de là

$$2\varphi(z) = e^{mz} - e^{-mz}$$

et, par suite, en intégrant l'équation qui lie F et φ,

$$F(z) = A \cos z + B \sin z + \frac{m}{m^2 + 1}(e^{mz} + e^{-mz}$$

On peut supposer A et B nuls, à condition de choisir convenablement l'origine des coordonnées, de sorte que l'équation des surfaces cherchées peut s'écrire

$$y\cos z - x\sin z = \frac{m}{m^2+1}(e^{mz}+e^{-mz}).$$

Les équations des asymptotiques sont alors

$$\frac{y - \dfrac{m}{m^2+1}\cos z(e^{mz}+e^{-mz})}{\sin z}$$

$$= \frac{z + \dfrac{m}{m^2+1}\sin z(e^{mz}+e^{-mz})}{\cos z} = \frac{1-m^2}{2(1+m^2)}(e^{mz}-e^{-mz}) + C$$

pour la ligne asymptotique trajectoire $C = 0$.

J'ai supposé $m \neq 0$; pour $m = 0$ on aurait les hélicoïdes minima sur lesquels toutes les asymptotiques sont trajectoires orthogonales des génératrices.

5. Les surfaces dont la ligne de striction est ligne asymptotique présentent quelques analogies avec les surfaces à plan directeur. Ces analogies proviennent de ce fait que, pour ces dernières, la ligne $\frac{1}{r} = 0$ est ligne asymptotique, tandis que, pour les premières, la ligne $r = 0$ est ligne asymptotique.

L'équation des lignes asymptotiques de ces surfaces peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{2}{K}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{K}\right)}{ds} + K\cos\theta = 0$$

tandis que, pour les surfaces à plan directeur, on a

$$2K\frac{dr}{ds} + r\frac{dK}{ds} + K\cos\theta = 0.$$

L'équation (1) peut s'intégrer facilement : on trouve

$$\frac{2}{r\sqrt{K}} + \int \lambda K^{\frac{3}{2}}\,ds = \text{const.};$$

d'où l'on déduit, r et r' étant deux solutions,

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right]^2 = \text{const.}$$

Lorsque K est constant, $K^{\frac{3}{2}}$ sort du signe de quadrature; or, si l'on pose

$$r' = -\int \cos\theta\, ds,$$

$r = r'$ est une solution de l'équation des trajectoires orthogonales, et

$$r = \frac{2}{K^2 r'}$$

est une solution de l'équation des asymptotiques. Pour les surfaces (S), la relation entre les deux sortes de courbes s'exprimait par

$$r = \frac{r'}{2}.$$

Si la ligne de striction est une courbe, le paramètre de distribution est égal à la torsion de cette courbe, de sorte que, si le paramètre est constant, la ligne de striction est une courbe à torsion constante.

Si la ligne de striction est une droite, θ est constant, et $\cos\theta$ sort du signe d'intégration. Si l'on prend la ligne de striction pour axe des z, les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$\frac{X}{\cos\varphi\sin\theta} = \frac{Y}{\sin\varphi\cos\theta} = \frac{Z-\zeta}{\cos\theta},$$

θ étant constant, et ζ étant une fonction de φ.

On a alors pour équation générale des surfaces à ligne de striction rectiligne

$$Z = \cot\theta\sqrt{X^2+Y^2} + F\left(\frac{Y}{X}\right);$$

on trouve facilement pour expression du paramètre de distribution

$$K = \pm\frac{d\varphi}{d\zeta},$$

le signe à prendre dépendant du sens dans lequel tourne la droite en s'élevant. Si $K = \text{const.}$, on a, en prenant le signe $+$, par exemple, et en choisissant pour plan des ZOX celui qui contient la génératrice passant par l'origine.

$$Z = \cot\theta\sqrt{X^2+Y^2} + \frac{1}{K}\,\text{arc tang}\,\frac{Y}{X}$$

ou, en coordonnées semi-polaires,

$$Z = \rho\cot\theta + \frac{\varphi}{K}\cdot$$

L'équation des lignes asymptotiques en coordonnées r et s est alors

$$\frac{2}{r} + K^2\cos\theta s = \text{const.},$$

ce qui donne, en remarquant que $r\sin\theta = \rho$ et que s est la coordonnée du pied de la génératrice,

$$\frac{2}{\rho} + K\cot\theta(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

équation de la projection d'une asymptotique sur le plan $Z = 0$.

On obtient ainsi des sortes de spirales tournant autour du pôle. Le pôle est un point asymptote, et les courbes ont des asymptotes tangentes au cercle dont le centre est à l'origine, et le rayon $\frac{2\,\text{tang}\,\theta}{K}\cdot$