SUR LA

FORME DES COURBES A TORSION CONSTANTE,

PAR M. G. KOENIGS,

Ancien élève de l'École Normale,
Chargé de cours d'Analyse à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — *Une transformation des contours gauches.*

1. Soit C un contour de l'espace formé d'une courbe analytique ou d'un nombre fini d'arcs de courbes analytiques; soit aussi un point donné O dans l'espace. Je fixe un sens de parcours sur le contour; alors toute portion du contour C possédera, par cela seul, un sens de parcours parfaitement défini, et la corde qui fermera cette portion de contour, ou en sera la somme géométrique, ou sera un segment déterminé non seulement en grandeur et orientation, mais même en direction. Prenons, en particulier, un arc infiniment petit MM'; la corde $\overline{MM'}$ de cet arc est un segment infiniment petit parfaitement déterminé, dont le moment par rapport au point O se représentera aussi par un segment $\{MM'\}$ infiniment petit.

Je transporte ce segment $\{MM'\}$ en un point m de l'espace, de sorte qu'il ait m pour origine, et j'appelle m' son extrémité. Je considère ensuite un point M″ infiniment voisin de M′ sur le contour C, et, traitant l'arc M′M″ comme j'ai traité l'arc MM′, je construis le segment $\{M'M''\}$ analogue à $\{MM'\}$, puis je le transporte en m', de sorte qu'il ait m' pour origine, et j'appelle m'' son extrémité, et ainsi de suite.

Lorsque l'on parcourt ainsi tout le contour C, la suite des points m, m', m'', ..., dont le premier seul est arbitraire, constitue un nouveau contour Γ, et c'est ce contour que je considère comme le transformé du contour C.

Les deux contours C et Γ se correspondent, par définition, de telle manière qu'à deux points M, M′ infiniment voisins pris sur C correspondent sur Γ deux points infiniment voisins m et m', et la corde ou l'arc infiniment petit mm' représente le moment de la corde ou de l'arc MM' par rapport au point fixe.

Rien n'empêcherait, pour sauvegarder l'homogénéité, de prendre mm' égal non pas au moment, mais au rapport de ce moment à une longueur constante k.

II. — *Usage du contour transformé pour la représentation des aires.*

2. Considérons le triangle infiniment petit formé par l'arc infiniment petit MM' et les vecteurs OM, OM'. Le segment $\{MM'\}$ représente en grandeur le double de l'aire de ce triangle, et, pour avoir l'aire de la projection du même triangle sur un plan Π, il suffit de prendre la demi-projection du segment $\{MM'\}$ sur une droite perpendiculaire au plan Π.

On peut donc dire que l'arc $\overline{mm'}$ du contour Γ représente en grandeur et direction l'aire du triangle correspondant OMM'.

3. Cette propriété s'étend aux quantités finies.

Soit, en effet, une portion du contour C limitée par deux points A et B. En joignant A et B au point O, on forme un contour fermé OABO, dont la projection sur un plan Π quelconque a une aire parfaitement déterminée en grandeur et en signe, attendu qu'un sens de parcours se trouve défini sur le contour OABO.

Décomposons la portion AB du contour C en éléments MM' infiniment petits. L'aire de la projection de OABO sera la somme algébrique des aires des projections des triangles élémentaires OMM'; elle sera donc égale à la demi-somme algébrique des projections des segments $\{MM'\}$ sur une perpendiculaire au plan de projection Π. Par conséquent, on obtiendra l'aire de la projection du contour OABO en projetant sur une perpendiculaire au plan Π la demi-somme géométrique des segments $\{MM'\}$. Mais le contour Γ nous fournit cette somme géométrique. Soient, en effet, a et b les points de ce contour qui correspondent à A et à B; le segment $\overline{ab}$ est la somme géométrique dont il vient d'être question.

De là la proposition suivante :

Pour avoir l'aire de la projection sur un plan Π *du contour fermé formé par une portion* AB *du contour* C *et les vecteurs* OA, OB, *il suffit* *de prendre la demi-projection sur une perpendiculaire à Π de la corde ab relative à la portion correspondante du contour Γ.*

III. — *Examen du cas où le contour initial est fermé.*

4. Lorsque le contour C est fermé et que l'on prend pour AB le contour C décrit une fois, les points A et B se confondent, et l'aire de la projection du contour OABO n'est autre que celle de la projection du contour C lui-même, c'est-à-dire qu'elle est entièrement indépendante du point O.

Généralement, le contour C n'aura pas une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace; le segment *ab* ne sera donc pas nul, mais il aura une grandeur, une orientation et une direction parfaitement déterminées *et indépendantes du point* O.

Appelons ici ce segment $\overline{ab}$ l'*axe du contour fermé* C.

On voit tout de suite que, *pour avoir l'aire de la projection d'un contour fermé sur un plan quelconque, il suffit de prendre la demi-projection sur une perpendiculaire à ce plan de l'axe du contour.*

Sur les plans normaux à cet axe, la projection a une aire maximum; l'aire est nulle pour les plans parallèles à l'axe.

Enfin il pourrait arriver que le contour eût une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace : il faut et il suffit, pour cela, que l'axe du contour soit nul.

5. Voyons les conséquences de ces diverses hypothèses pour le contour transformé Γ.

Supposons d'abord que l'axe du contour fermé C ne soit pas nul, et représentons-le par $\{C\}$. Si, partant d'un point quelconque A du contour C, on revient en A après un tour, le point transformé décrit une portion *ab* du contour transformé Γ, telle que le segment $\overline{ab}$ soit égal et parallèle au segment $\{C\}$. On en conclut que, si l'on fait subir à un point quelconque du contour Γ une translation égale et parallèle à $\{C\}$, on obtient un nouveau point de ce contour, c'est-à-dire que :

Le contour Γ est périodique; il se superpose à lui-même par une translation égale et parallèle à l'axe $\{C\}$ du contour.

Le contour Γ est donc situé sur une surface cylindrique (composée de cylindres analytiques) parallèle à l'axe du contour C, et la section droite de ce cylindre est nécessairement un contour plan fermé. Chaque génératrice rectiligne de la surface cylindrique est rencontrée par le contour à des intervalles dont la longueur est précisément celle de l'axe du contour C.

6. Supposons, au contraire, que le contour C ait une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace, alors son axe est nul, et le contour Γ est fermé.

En résumé, on voit que :

Le contour transformé d'un contour fermé est périodique ou fermé.

IV. — *Propriétés de la courbe transformée d'une courbe analytique.*

7. Considérons une courbe unique C, et appelons Γ sa courbe transformée. Ces courbes se correspondent, de telle façon que les tangentes de Γ sont perpendiculaires aux plans tangents correspondants de la courbe C, qui passent par le point O; c'est-à-dire que, si l'on considère le cône K qui a O pour sommet et C pour directrice, le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice OM est normal à la tangente de la courbe Γ menée au point m correspondant. On en conclut immédiatement que les génératrices du cône K sont normales aux plans osculateurs de la courbe Γ ou, si l'on veut, qu'elles sont parallèles aux binormales de cette courbe.

Il en résulte que l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe Γ est égal à l'angle $d\theta$ formé par les génératrices OM, OM′ infiniment voisines du cône K. Appelons r la distance OM au point O du point M, pris sur la courbe C. Le triangle infiniment petit OMM′ a pour aire

$$\tfrac{1}{2} r^2\, d\theta,$$

et $r^2\, d\theta$ représente le moment du segment $\overline{\mathrm{MM}'}$ par rapport au point O. L'arc $\overline{mm'}$ correspondant de la courbe Γ a donc pour longueur

$$ds = \frac{r^2\, d\theta}{k},$$

en supposant, comme il a été dit, que l'on prenne $\overline{mm'}$ égal, non pas au moment, mais au quotient de ce moment par la ligne constante k. On déduit de cette formule

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{k}{r^2}$$

ou, attendu que $\frac{d\theta}{ds}$ est la torsion $\frac{1}{T}$ de la courbe Γ,

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{r^2},$$

c'est-à-dire que *la torsion de la courbe* Γ *en un point* m *est inversement proportionnelle au carré de la distance du point correspondant* M *au centre* O *de transformation.*

8. De là résulte immédiatement la définition de la courbe C, une fois la courbe Γ connue, c'est-à-dire la transformation inverse de celle qui a été considérée.

La courbe Γ étant connue, par un point O on mènera des parallèles à ses binormales, et l'on formera ainsi un cône K. Sur chaque génératrice on prendra un point M, tel que la distance OM soit proportionnelle à la racine carrée du rayon de torsion de la courbe Γ au point correspondant à la génératrice. Le lieu du point M est une courbe C qui admet pour transformée la courbe Γ. Les diverses courbes C que l'on peut obtenir ne diffèrent que par le facteur de proportionnalité, elles sont homothétiques.

V. — *Cas où la courbe* C *est sphérique; courbes à torsion constante.*

9. Si la courbe C est sphérique et que l'on prenne pour O le centre de la sphère qui contient C, r est constant, et, par suite, aussi $\frac{1}{T}$. La courbe Γ a donc sa torsion constante. Réciproquement, d'après ce qui vient d'être dit, toute courbe à torsion constante dérive d'une courbe C sphérique.

Il est clair que la courbe C n'est autre, dans ce cas, que la courbe supplémentaire de l'indicatrice sphérique des tangentes ou, si l'on veut, n'est autre que l'indicatrice sphérique des binormales de la courbe Γ.

10. Appliquons maintenant les remarques précédentes au cas des courbes sphériques fermées.

Si l'axe $\overline{ab}$ du contour C n'est pas nul, et c'est l'immense majorité des cas, la courbe à torsion constante est périodique.

Donc :

En général, lorsque l'indicatrice sphérique des binormales d'une courbe à torsion constante est fermée, la courbe à torsion constante est périodique.

L'hélice fournit l'exemple le plus simple; elle dérive d'un petit cercle de la sphère. Voici encore un autre exemple qui fournit une courbe périodique tracée sur un cylindre algébrique du dixième degré, unicursal :

Prenons, pour la courbe C, une courbe sphérique se projetant sur le plan d'un grand cercle Ω suivant un hypocycloïde à quatre points de rebroussements, concentrique et inscrit au cercle Ω. Le plan des xy étant le plan du cercle Ω et les deux axes Ox, Oy les axes de symétrie de l'hypocycloïde qui contiennent ses points de rebroussement, on a, pour les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe Γ,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} a\left(\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos^5\varphi\right),$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3} a\left(\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin^5\varphi\right),$$

$$z = \frac{3}{8} a\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi\right).$$

Je crois inutile de multiplier ces exemples.

Je dois ajouter que la transformation, par laquelle on déduit d'une courbe sphérique une courbe à torsion constante, n'est qu'une interprétation géométrique des formules que M. J.-A. Serret a données, et que l'on trouvera dans les Notes de l'*Application de l'Analyse à la géométrie de Monge* (édition Liouville).

11. Reste actuellement le cas où la projection de la courbe C sur un plan quelconque aurait une aire nulle.

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, *la courbe à torsion constante est fermée.*

La recherche des courbes à torsion constante fermées revient donc à celle de courbes C sphériques fermées à axe nul.

On remarquera que, si une telle courbe est parcourue par un courant électrique et si l'on place au centre de la sphère une petite aiguille aimantée, l'action du courant sur l'aiguille sera nulle, en sorte que le système sera astatique pour le centre de la sphère.

L'exemple suivant suffira pour montrer qu'il peut, en effet, exister de pareilles courbes et, par suite, aussi des courbes à torsion constante fermées.

Considérons une lemniscate Λ et un cercle Ω contenant entièrement la lemniscate, et la touchant en son sommet A. Je prendrai, pour la courbe C, l'intersection de la sphère dont Ω est un grand cercle, avec le cylindre dont Λ est la section droite. Cette sphère et ce cylindre se touchent au point A, et la courbe C figure sur la sphère une sorte de double huit.

Sa projection sur le plan du cercle Ω est la lemniscate Λ dont l'aire est nulle.

La projection sur le plan de symétrie du cylindre, qui contient le point A, est nulle également. En effet, comme ce plan est un plan de symétrie commun à la sphère et au cylindre, la projection se compose d'un arc de courbe parcouru deux fois en sens opposés.

Enfin la projection sur le plan tangent commun à la sphère et au cylindre est une sorte de double huit dont l'aire est nulle.

La courbe C a donc une aire de projection nulle sur trois plans rectangulaires. Son axe est nul, et, par conséquent, la courbe à torsion constante dont elle est l'indicatrice des binormales est une courbe fermée.

Si l'on prend pour axe Ox l'axe focal de la lemniscate Λ, pour axe Oy le diamètre du cercle Ω perpendiculaire à Oy, et pour Oz une droite perpendiculaire aux deux premières, en supposant que l'un des foyers de la lemniscate soit précisément au centre O de la sphère, on trouve que les coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la courbe C peuvent s'exprimer, comme il suit, à l'aide d'un paramètre t,

$$X = \frac{t^2 + 4k^2t - k^4}{4kt},$$

$$Y = \frac{(t-k^2)\sqrt{(g^2-t)\left(t-\frac{k^4}{g^2}\right)}}{4kt},$$

$$Z = \sqrt{g^2 - t};$$

on appelle $2k$ la distance des deux foyers de la lemniscate, et l'on pose, pour abréger,

$$g = k(1+\sqrt{2}).$$

Les formules de J.-A. Serret, qui traduisent analytiquement la transformation géométrique ci-dessus, à savoir :

$$x = \int (Y\,dZ - Z\,dY), \qquad y = \int (Z\,dX - X\,dZ), \qquad z = \int (X\,dY - Y\,dX),$$

feront connaître les coordonnées (x, y, z) d'un point de la courbe à torsion constante en fonction de t. Les radicaux ne portant que sur des polynômes du second degré, les quadratures s'effectueront complètement par les fonctions algébriques et logarithmiques, en sorte qu'on obtiendra les coordonnées (x, y, z) en termes finis, débarrassées de tout signe d'intégration.

12. En résumé :

1° *Toute courbe à torsion constante dont l'indicatrice sphérique est une courbe fermée est périodique ou fermée.*

2° *Elle est périodique si l'axe de l'indicatrice n'est pas nul, ce qui est le cas le plus général, et elle se reproduit par une translation égale et parallèle à cet axe.*

3° *Il peut arriver que l'axe de l'indicatrice soit nul. Dans ce cas et dans ce cas seulement, la courbe à torsion constante est fermée.*

J'ai fourni un exemple de ce dernier cas. Il importait, à certains égards, d'être fixé sur ce point ; car, si une courbe réelle algébrique à torsion constante existe, elle est nécessairement fermée.