
SUR UN PROBLÈME

RELATIF

AUX COURBES A DOUBLE COURBURE,

PAR M. E. GOURSAT.

Quand on se donne le rayon de courbure d'une courbe plane en fonction de l'arc, la détermination des coordonnées d'un point de cette courbe se ramène, comme on sait, à trois quadratures (*voir* HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 157). Si l'on se propose le problème analogue pour les courbes gauches, on est conduit à un système de trois équations linéaires simultanées du premier ordre, pour déterminer les cosinus des angles que font la tangente, la normale principale et la binormale avec un axe fixe. Ce système peut lui-même être remplacé par une seule équation différentielle linéaire du troisième ordre. Les coefficients de cette équation ne dépendant que de deux fonctions arbitraires, il est visible que l'on n'a ainsi qu'une équation particulière parmi les équations linéaires du troisième ordre. J'ai réussi à ramener l'intégration de cette équation à celle d'une *équation linéaire du second ordre*, sans second membre. La méthode suivie montre bien clairement la raison de cette réduction et fournit un exemple intéressant d'un cas de réduction aujourd'hui bien connu pour les équations linéaires du troisième ordre. Dans un Mémoire ⁽¹⁾ déjà ancien (*Journal de Crelle*, t. 60, p. 182), M. Hoppe s'est occupé d'une question analogue, qui n'est, en réalité, qu'un cas particulier de la précédente. Il est amené également à une équation linéaire du second ordre, mais il paraît difficile de retrouver les considérations qui l'ont conduit aux changements successifs de variables permettant d'effectuer la réduction.

⁽¹⁾ Ce Mémoire m'a été signalé par M. Appell.

1. Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une courbe gauche C dans un système d'axes rectangulaires, s l'arc de cette courbe, R et T les rayons de courbure et de torsion, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. On a, d'après les formules de Frenet et de Serret,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha'}{R}, & \frac{d\alpha'}{ds} &= -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, & \frac{d\alpha''}{ds} &= \frac{\alpha'}{T}, \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta'}{R}, & \frac{d\beta'}{ds} &= -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, & \frac{d\beta''}{ds} &= \frac{\beta'}{T}, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\gamma'}{R}, & \frac{d\gamma'}{ds} &= -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}, & \frac{d\gamma''}{ds} &= \frac{\gamma'}{T}. \end{aligned}$$

Supposons que l'on connaisse R et T en fonction de l'arc s , et que l'on veuille obtenir les coordonnées x, y, z en fonction de la même variable. Les neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ seront déterminés par les neuf équations précédentes. En remarquant que les trois équations de la première ligne ne renferment que les inconnues $\alpha, \alpha', \alpha''$, et que les deux autres systèmes se déduisent de celui-là en changeant α en β , puis en γ , nous voyons que la détermination des neuf cosinus n'exige que l'intégration du système de trois équations

$$(1) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}.$$

Une fois ces neuf cosinus obtenus, on trouvera les coordonnées x, y, z par des quadratures. Le problème dépend donc, avant tout, de l'intégration du système (1).

Au lieu du système (1), je prendrai un système équivalent formé comme il suit. Posons

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \alpha''\sqrt{-1}, & V &= \frac{1}{R} + \frac{1}{T}\sqrt{-1}, \\ u_0 &= \alpha - \alpha''\sqrt{-1}, & V_0 &= \frac{1}{R} - \frac{1}{T}\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

d'une manière générale, je désignerai deux quantités conjuguées par la même lettre affectée pour l'une d'elles de l'indice 0. Le système (1) pourra alors être remplacé par le suivant :

$$(2) \quad \frac{du}{ds} = V\alpha', \quad \frac{du_0}{ds} = V_0\alpha', \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -uV_0 - u_0V;$$

on en déduit, en désignant par V' , V'' , V'_0 , V''_0 les dérivées de V , V_0 par rapport à s ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{ds^2} &= \alpha' V' - \frac{V}{2} (u V_0 + u_0 V), \\ \frac{d^3 u}{ds^3} &= \alpha' V'' - V' (u V_0 + u_0 V) - \frac{V}{2} (u V'_0 + u_0 V') - V^2 V_0 \alpha'.\end{aligned}$$

De la première des équations (2) on tire

$$\alpha' = \frac{1}{V} \frac{du}{ds};$$

la première des relations précédentes donne ensuite

$$\begin{aligned}u V_0 + u_0 V &= -\frac{2}{V} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{2V'}{V^2} \frac{du}{ds}, \\ u_0 &= -\frac{2}{V^2} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{2V'}{V^3} \frac{du}{ds} - u \frac{V_0}{V}.\end{aligned}$$

Portons ces valeurs de α' et de u_0 dans la relation qui donne $\frac{d^3 u}{ds^3}$; on trouve une équation du troisième ordre pour déterminer u

$$(3) \quad \frac{d^3 u}{ds^3} - 3 \frac{V'}{V} \frac{d^2 u}{ds^2} + \left[3 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 + V V_0 - \frac{V''}{V} \right] \frac{du}{ds} + \frac{V V'_0 - V_0 V'}{2} u = 0.$$

L'équation (3), jointe aux équations

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{V} \frac{du}{ds}, \\ u_0 = -\frac{2}{V^2} \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{V'}{V^3} \frac{du}{ds} - u \frac{V_0}{V}, \end{cases}$$

forme un système équivalent au système (2). Posons de même

$$\begin{aligned}v &= \beta + \beta'' \sqrt{-1}, & \omega &= \gamma + \gamma'' \sqrt{-1}, \\ v_0 &= \beta - \beta'' \sqrt{-1}, & \omega_0 &= \gamma - \gamma'' \sqrt{-1};\end{aligned}$$

un calcul tout pareil au précédent prouve que les fonctions v et ω sont aussi des intégrales de l'équation (3). Mais on a la relation évidente

$$u^2 + v^2 + \omega^2 = 0.$$

Donc, entre trois intégrales linéairement indépendantes de l'équation (3), il existe une relation quadratique homogène à coefficients constants. Or l'intégration de toute équation linéaire du troisième ordre jouissant de cette propriété se ramène à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre, comme l'a montré pour la première fois M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 216). De là résulte la réduction annoncée.

2. Je rappellerai en quelques mots comment on peut effectuer la réduction. Soit

$$(5) \quad \frac{d^2 Y}{ds^2} = a \frac{dY}{ds} + bY$$

une équation linéaire du second ordre, à coefficients quelconques. Posons

$$u = Y^2;$$

on en déduit, en tenant compte de l'équation (5),

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 2Y \frac{dY}{ds}, \\ \frac{d^2 u}{ds^2} &= 2 \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 + 2aY \frac{dY}{ds} + 2bY^2, \\ \frac{d^3 u}{ds^3} &= \left(4 \frac{dY}{ds} + 2aY \right) \left(a \frac{dY}{ds} + bY \right) + 2a \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 + (2a' + 4b)Y \frac{dY}{ds} + 2b'Y^2. \end{aligned}$$

L'élimination de Y^2 , $Y \frac{dY}{ds}$, $\left(\frac{dY}{ds} \right)^2$ conduit à une équation linéaire du troisième ordre en u

$$(6) \quad \frac{d^3 u}{ds^3} + 3B \frac{d^2 u}{ds^2} + 3C \frac{du}{ds} + Du = 0,$$

les coefficients B, C, D ayant les valeurs suivantes :

$$(7) \quad B = -a, \quad 3C = 2a^2 - 4b - \frac{da}{ds}, \quad D = 2 \left(2ab - \frac{db}{ds} \right).$$

Soient y_1, y_2 un système fondamental d'intégrales de l'équation (5); l'équation (6) admettra les trois intégrales $y_1^2, y_2^2, (y_1 + y_2)^2$, et son intégrale générale sera de la forme

$$u = Cy_1^2 + C'y_2^2 + C''(y_1 + y_2)^2$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$u = Cy_1^2 + C'y_2^2 + C''y_1y_2,$$

de sorte que l'intégration de l'équation (6) se ramène à l'intégration de l'équation (5). Les coefficients B, C, D de l'équation (6) ne dépendent que de deux fonctions arbitraires a et b , de sorte que l'on n'a ainsi qu'un type particulier d'équations du troisième ordre. L'élimination de a et de b entre les relations (7) conduit à une équation de condition qui, en employant les notations de M. Laguerre, exprime que l'invariant I est nul. D'un autre côté, entre les trois intégrales y_1^2, y_1y_2, y_2^2 , on a la relation

$$(y_1y_2)^2 - y_1^2y_2^2 = 0,$$

et l'on en conclut que les intégrales de l'équation (7) vérifient une relation quadratique à coefficients constants. Inversement, toute équation linéaire du troisième ordre jouissant de cette propriété est de la forme (6) (1), et, pour avoir son intégrale générale, il suffira de connaître l'intégrale générale de l'équation (5), où

$$a = -B, \quad b = \frac{1}{4} \left(2B^2 - 3C + \frac{dB}{ds} \right).$$

Appliquons ceci à l'équation (3); on aura

$$B = -\frac{V'}{V}, \quad 3C = 3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + VV_0 - \frac{V''}{V}, \quad D = \frac{VV'_0 - V_0V'}{2},$$

et les deux premières des équations (7) donnent

$$a = \frac{V'}{V}, \quad b = \frac{1}{4} \left[2\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - 3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - VV_0 + \frac{V''}{V} - \frac{V''}{V} + \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \right] = -\frac{1}{4} VV_0.$$

Ces valeurs de a et de b satisfont aussi à la dernière des formules (7); ce qui fournit une vérification du théorème général sur lequel je me suis appuyé. En définitive, *l'intégration de l'équation (3) est ramenée à l'intégration de l'équation linéaire du second ordre*

$$(8) \quad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{V'}{V} \frac{dY}{ds} - \frac{1}{4} VV_0 Y.$$

(1) Pour la démonstration de cette propriété, voir un petit travail que j'ai publié dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XI, p. 145.

3. Les calculs précédents supposent simplement que V et V_0 sont des fonctions analytiques de la variable s . Dans le problème de Géométrie qui nous occupe, les fonctions R et T prennent des valeurs réelles lorsque la variable indépendante prend des valeurs réelles, au moins entre certaines limites, ou, ce qui revient au même, V et V_0 sont des fonctions conjuguées. Supposons maintenant que l'on connaisse l'intégrale générale de l'équation (8), et proposons-nous de déterminer les quantités u , v , w , ainsi que les neuf cosinus directeurs α , β , γ , α' , β' , γ' , α'' , β'' , γ'' .

Soient Y et Z deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (8); l'équation (3) admettra les trois intégrales

$$u = YZ, \quad v = \frac{i}{2}(Y^2 + Z^2), \quad w = \frac{1}{2}(Y^2 - Z^2),$$

vérifiant la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Réciproquement, les formules précédentes donnent tous les systèmes d'intégrales de l'équation (3) vérifiant la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, pourvu que l'on prenne pour Y et Z deux intégrales quelconques distinctes de l'équation (8). Voyons comment il faudra prendre ces deux intégrales. Soient Y_0 , Z_0 , u_0 , v_0 , w_0 les fonctions conjuguées de Y , Z , u , v , w ; on a

$$u_0 = Y_0 Z_0, \quad v_0 = -\frac{i}{2}(Y_0^2 + Z_0^2), \quad w_0 = \frac{1}{2}(Y_0^2 - Z_0^2),$$

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

$$\alpha = \frac{u + u_0}{2}, \quad \beta = \frac{v + v_0}{2}, \quad \gamma = \frac{w + w_0}{2},$$

$$\alpha'' = \frac{u - u_0}{2i}, \quad \beta'' = \frac{v - v_0}{2i}, \quad \gamma'' = \frac{w - w_0}{2i}.$$

D'autre part, on doit avoir les relations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

$$\alpha d\alpha'' + \beta d\beta'' + \gamma d\gamma'' = 0,$$

dont les trois premières ont une signification évidente; la dernière exprime que les deux cônes ayant pour sommet l'origine et pour directrices les deux courbes sphériques décrites par les deux points de coordonnées (α, β, γ) et

$(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sont supplémentaires. En tenant compte des relations

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0, \quad u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

ces conditions se réduisent à deux

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= 2, \\ u du_0 + v dv_0 + w dw_0 &= 0; \end{aligned}$$

mais nous avons

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= \mathbf{YZY}_0\mathbf{Z}_0 + \frac{1}{4}(\mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2)(\mathbf{Y}_0^2 + \mathbf{Z}_0^2) + \frac{1}{4}(\mathbf{Y}^2 - \mathbf{Z}^2)(\mathbf{Y}_0^2 - \mathbf{Z}_0^2) \\ &= \frac{(\mathbf{YY}_0 + \mathbf{ZZ}_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u du_0 + v dv_0 + w dw_0 &= \mathbf{YZ}(\mathbf{Y}_0 d\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_0 d\mathbf{Y}_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2)(\mathbf{Y}_0 d\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}_0 d\mathbf{Z}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{Y}^2 - \mathbf{Z}^2)(\mathbf{Y}_0 d\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Z}_0 d\mathbf{Z}_0) \\ &= (\mathbf{YY}_0 + \mathbf{ZZ}_0)(\mathbf{Y} d\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z} d\mathbf{Z}_0), \end{aligned}$$

et les conditions précédentes deviennent

$$(9) \quad \mathbf{YY}_0 + \mathbf{ZZ}_0 = 2,$$

$$(10) \quad \mathbf{Y} d\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z} d\mathbf{Z}_0 = 0.$$

La condition (10) peut être regardée comme la condition nécessaire et suffisante; en effet, si elle est remplie, on aura aussi

$$\mathbf{Y}_0 d\mathbf{Y} + \mathbf{Z}_0 d\mathbf{Z} = 0$$

et, par suite,

$$d(\mathbf{YY}_0 + \mathbf{ZZ}_0) = 0, \quad \mathbf{YY}_0 + \mathbf{ZZ}_0 = k.$$

La constante k étant nécessairement réelle et positive, en multipliant les intégrales par un même facteur réel et positif, on aura

$$k = 2.$$

4. On obtiendra, comme il suit, un système d'intégrales vérifiant les relations (9) et (10). Entre les intégrales \mathbf{Y} et \mathbf{Z} , on a, d'après un théorème général, une relation de la forme

$$\mathbf{Y}d\mathbf{Z} - \mathbf{Z}d\mathbf{Y} = \mathbf{C}V ds,$$

\mathbf{C} désignant un facteur constant. De même, les fonctions conjuguées \mathbf{Y}_0

et Z_0 vérifient l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 Y_0}{ds^2} = \frac{V'_0}{V_0} \frac{dY_0}{ds} - \frac{1}{4} V V_0 Y,$$

et l'on aura

$$Y_0 dZ_0 - Z_0 dY_0 = C_0 V_0 ds.$$

Posons

$$\frac{1}{Y_0} \frac{dZ}{ds} = - \frac{1}{Z_0} \frac{dY}{ds} = \rho,$$

$$\frac{1}{Y} \frac{dZ_0}{ds} = - \frac{1}{Z} \frac{dY_0}{ds} = \rho_0,$$

et remplaçons dY , dY_0 , dZ , dZ_0 par leurs valeurs dans les formules précédentes, elles deviennent

$$(YY_0 + ZZ_0)\rho = CV,$$

$$(YY_0 + ZZ_0)\rho_0 = C_0 V_0;$$

on en déduit, en tenant compte de la relation (9),

$$\rho = \frac{C}{2} V, \quad \rho_0 = \frac{C_0}{2} V_0.$$

Nous voyons, par conséquent, que Y et Z_0 doivent vérifier les deux équations simultanées

$$\frac{dY}{ds} = - \frac{C}{2} V Z_0,$$

$$\frac{dZ_0}{ds} = \frac{C_0}{2} V_0 Y;$$

de même, les fonctions Y_0 et Z devront vérifier le système conjugué du précédent

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{C}{2} V Y_0,$$

$$\frac{dY_0}{ds} = - \frac{C_0}{2} V_0 Z.$$

Réciproquement, si l'on élimine Z_0 entre les deux équations du premier système, on aboutit à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = \frac{V'}{V} \frac{dY}{ds} - \frac{CC_0}{4} V V_0 Y,$$

qui doit être identique avec l'équation (8). Il faudra donc que l'on ait $CC_0 = 1$ ou que C soit de la forme $e^{i\theta}$, θ désignant une constante réelle quelconque. Les systèmes d'équations précédents prennent alors la forme ci-dessous :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{ds} = -\frac{1}{2} e^{i\theta} V Z_0, \\ \frac{dZ_0}{ds} = \frac{1}{2} e^{-i\theta} V_0 Y; \end{array} \right.$$

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dZ}{ds} = \frac{1}{2} e^{i\theta} V Y_0, \\ \frac{dY_0}{ds} = -\frac{1}{2} e^{-i\theta} V_0 Z. \end{array} \right.$$

Les deux systèmes (11) et (11') sont équivalents, et chacun d'eux peut remplacer l'équation (8). Soit donc Y une intégrale particulière de l'équation (8); la seconde des équations (11') nous donne la valeur de Z

$$Z = -\frac{2 e^{i\theta}}{V_0} \frac{dY_0}{ds};$$

il en résulte que, si Y est une intégrale particulière de l'équation (8), la fonction $\frac{1}{V_0} \frac{dY_0}{ds}$ sera aussi une intégrale. Il est facile de le vérifier directement. Si Y vérifie l'équation (8), on aura aussi

$$\frac{d^2 Y_0}{ds^2} = \frac{V'_0}{V_0} \frac{dY_0}{ds} - \frac{1}{4} V V_0 Y_0;$$

en différentiant les deux membres de cette équation et éliminant Y_0 , on parvient à l'équation suivante :

$$V_0 \frac{d^3 Y_0}{ds^3} = \left(2V'_0 + \frac{V'V_0}{V} \right) \frac{d^2 Y_0}{ds^2} + \left(V''_0 - \frac{1}{4} V V_0^2 - \frac{V'V'_0}{V} - 2 \frac{V_0'^2}{V_0} \right) \frac{dY_0}{ds}.$$

Posons maintenant

$$\frac{dY_0}{ds} = V_0 Z,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_0}{ds^2} &= V'_0 Z + V_0 \frac{dZ}{ds}, \\ \frac{d^3 Y_0}{ds^3} &= V''_0 Z + 2V'_0 \frac{dZ}{ds} + V_0 \frac{d^2 Z}{ds^2}; \end{aligned}$$

en faisant la substitution dans l'équation qui précède, on retombe précisément sur l'équation (8). Ainsi, de toute intégrale particulière Y de l'équation (8), on peut déduire une nouvelle intégrale $\frac{1}{V_0} \frac{dY_0}{ds}$, et l'intégrale générale sera

$$CY + \frac{C'}{V_0} \frac{dY_0}{ds},$$

à moins que les deux intégrales ainsi obtenues ne soient pas distinctes. Mais il est toujours possible de trouver des intégrales particulières telles que le rapport $\frac{1}{V_0 Y} \frac{dY_0}{ds}$ ne se réduise pas à une constante. Soient, en effet, Y et Z des intégrales distinctes, telles que

$$\frac{1}{V_0} \frac{dY_0}{ds} = \lambda Y, \quad \frac{1}{V_0} \frac{dZ_0}{ds} = \mu Z,$$

et considérons l'intégrale $aY + bZ$; on aura

$$\frac{1}{V_0} \frac{d(a_0 Y_0 + b_0 Z_0)}{ds} = a_0 \lambda Y + b_0 \mu Z,$$

et, pour que cette intégrale soit identique à la première, il faudra que l'on ait $ab_0 \mu = a_0 b \lambda$, ce qui n'aura pas lieu pour des valeurs arbitraires de a et de b . Plus généralement, pour qu'une intégrale particulière Y soit telle que $\frac{1}{V_0 Y} \frac{dY_0}{ds}$ se réduise à une constante, il faut qu'il y ait une certaine relation entre les quatre constantes *réelles* dont dépend cette intégrale.

En définitive, nous sommes conduits à la règle suivante pour obtenir un système d'intégrales de l'équation (8) vérifiant les relations (9) et (10).

Soit Y une intégrale particulière telle que le rapport $\frac{1}{V_0 Y} \frac{dY_0}{ds}$ ne se réduit pas à une constante; on associera à l'intégrale Y l'intégrale

$$Z = \frac{-2e^{i\theta}}{V_0} \frac{dY_0}{ds}.$$

Les deux intégrales ainsi obtenues vérifient la relation (10), comme il résulte des équations (11) et (11'), et, en les multipliant par une constante réelle convenable, elles vérifieront aussi l'équation (9).

Remarque. — Il peut paraître singulier que la connaissance d'une seule intégrale particulière de l'équation (8) permette de former l'intégrale générale.

rale sans aucune quadrature; mais il est bien aisé de trouver des faits analogues. Considérons une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = a \frac{dy}{ds} + b y,$$

où les coefficients a et b sont des fonctions réelles de la variable s ; si y est une intégrale particulière de cette équation, la fonction conjuguée y_0 sera aussi une intégrale particulière, et l'intégrale générale sera $Cy + C'y_0$. Le procédé est en défaut si y_0 n'est pas distinct de y , c'est-à-dire si y est une fonction réelle ou le produit d'une fonction réelle par une constante. Ce cas exceptionnel correspond à celui qui a été signalé plus haut.

5. Supposons que l'on ait choisi les intégrales Y et Z comme il vient d'être expliqué, de façon qu'elles vérifient les équations (9), (10), (11) et (11'). Les formules du n° 3 nous font connaître u , v , w et, par suite, α , β , γ , α'' , β'' , γ'' . Le point de coordonnées (α, β, γ) décrit sur la sphère de rayon égal à l'unité, ayant pour centre l'origine, une certaine courbe Σ ; le point de coordonnées $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ décrit sur la même sphère une seconde courbe Θ . Les deux cônes, ayant pour bases ces deux courbes Σ et Θ et pour sommet l'origine, sont supplémentaires. Je dirai, pour abrégé, que les deux courbes Σ et Θ sont supplémentaires. On sait que les tangentes en deux points correspondants de ces deux courbes sont parallèles à la droite, ayant pour cosinus directeurs α' , β' , γ' . Cela posé, considérons la courbe gauche C , représentée par les formules

$$x = f\alpha ds, \quad y = f\beta ds, \quad z = f\gamma ds,$$

dont l'arc sera évidemment égal à s . Soient R_1 et T_1 les rayons de courbure et de torsion de C , σ et τ les arcs des courbes sphériques Σ et Θ ; on aura

$$R_1 = \frac{ds}{d\sigma}, \quad T_1 = \frac{ds}{d\tau}.$$

Il est facile de calculer $d\sigma$ et $d\tau$; on a, par exemple,

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{1}{4}[(du + du_0)^2 + (dv + dv_0)^2 + (dw + dw_0)^2].$$

Or

$$du + du_0 = YdZ + ZdY + Y_0dZ_0 + Z_0dY_0$$

ou, en remplaçant les différentielles par leurs valeurs déduites des for-

mules (11) et (11'),

$$du + du_0 = \frac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta})(YY_0 - ZZ_0) ds;$$

on trouve de même

$$dv + dv_0 = \frac{i}{2}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta})(ZY_0 - YZ_0) ds,$$

$$dw + dw_0 = \frac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta})(YZ_0 + ZY_0) ds$$

et, par suite,

$$d\mathfrak{s}^2 = \frac{1}{16}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta})^2(YY_0 + ZZ_0)^2 ds^2,$$

$$d\mathfrak{s} = \frac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta}) ds.$$

On en déduit

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0e^{-i\theta}) = \frac{\cos \theta}{R} - \frac{\sin \theta}{T},$$

et un calcul tout pareil donne

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2i}(Ve^{i\theta} - V_0e^{-i\theta}) = \frac{\sin \theta}{R} + \frac{\cos \theta}{T}.$$

Pour que R_1 et T_1 aient les valeurs demandées, il faut et il suffit que l'on prenne $\theta = 0$ dans les formules (11) et (11'). Nous sommes ainsi conduits à la règle définitive suivante :

Soit Y une intégrale particulière de l'équation (8) telle que le rapport $\frac{1}{V_0Y} \frac{dY_0}{ds}$ ne se réduit pas à une constante; on posera

$$Z = \frac{-2}{V_0} \frac{dY_0}{ds}$$

et l'on multipliera les intégrales Y et Z par un facteur positif, de façon que $YY_0 + ZZ_0 = 2$. Cela fait, les neuf cosinus directeurs seront donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= R \left[-\frac{2}{V_0} Y \frac{dY_0}{ds} \right], & \beta &= \frac{1}{2} R \left[iY^2 + \frac{4i}{V_0^2} \left(\frac{dY_0}{ds} \right)^2 \right], & \gamma &= \frac{1}{2} R \left[Y^2 - \frac{4}{V_0^2} \left(\frac{dY_0}{ds} \right)^2 \right], \\ \alpha' &= R \left[\frac{YY_0 - ZZ_0}{2} \right], & \beta' &= R \left[\frac{i(ZY_0 - YZ_0)}{2} \right], & \gamma' &= R \left[\frac{YZ_0 + ZY_0}{2} \right], \\ \alpha'' &= R \left[\frac{2iY}{V_0} \frac{dY_0}{ds} \right], & \beta'' &= \frac{1}{2} R \left[Y^2 + \frac{4}{V_0^2} \left(\frac{dY_0}{ds} \right)^2 \right], & \gamma'' &= -\frac{1}{2} R \left[iY^2 - \frac{4i}{V_0^2} \left(\frac{dY_0}{ds} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

le signe R désignant ici la partie réelle d'une quantité imaginaire.

6. Pour satisfaire aux équations (9), (10) et (11) de la façon la plus générale, supposons qu'on ait trouvé un premier système de solutions Y et Z. Si nous prenons pour Y l'intégrale $\lambda Y + \mu Z$, nous devons remplacer Z par

$$-\frac{2}{V_0} \left(\lambda_0 \frac{dY_0}{ds} + \mu_0 \frac{dZ_0}{ds} \right) = -\lambda_0 \frac{2}{V_0} \frac{dY_0}{ds} - \mu_0 \frac{2}{V_0} \frac{dZ_0}{ds},$$

c'est-à-dire par $\lambda_0 Z - \mu_0 Y$. Pour que ces fonctions vérifient l'équation (9), il faudra, en outre, que l'on ait

$$\lambda \lambda_0 + \mu \mu_0 = 1.$$

La solution générale dépendra donc de trois constantes réelles arbitraires. On vérifiera facilement que ces trois constantes arbitraires correspondent à la rotation la plus générale autour de l'origine.

Nous avons complètement négligé jusqu'à présent le signe de R et de T; mais, au point de vue auquel nous nous sommes placés, ce signe est indifférent. On sait, en effet, que la tangente à une courbe gauche et la binormale n'ont pas de *direction* déterminée. Si l'on change la direction de la tangente, cela revient à changer R en $-R$ dans les formules (1) dont nous sommes partis; de même on changera la direction de la binormale en changeant T en $-T$. On obtiendra donc la même courbe, quel que soit le signe que l'on prenne pour R et T.

7. Les calculs du n° 5 nous montrent que, si l'on prend pour θ une valeur différente de zéro dans les formules (11) et (11)', on obtiendra une courbe gauche, où les rayons de courbure et de torsion ont les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos \theta}{R} - \frac{\sin \theta}{T}, \quad \frac{1}{T_1} = \frac{\sin \theta}{R} + \frac{\cos \theta}{T}.$$

D'ailleurs, l'équation (8) restant la même quand on change V en $V e^{i\theta}$ et V_0 en $V_0 e^{-i\theta}$, il était évident que l'intégration de cette seule équation devait nous fournir toutes ces courbes, outre la courbe cherchée. On peut, du reste, les déduire bien aisément de la première. Les lettres $x, y, z, \alpha, \beta, \dots$ se rapportant à la courbe C, désignons par les mêmes lettres affectées de l'indice 1 les quantités analogues relatives à la courbe gauche C₁ définie par les équations

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta - \sin \theta \int \alpha'' ds, \\ y_1 = y \cos \theta - \sin \theta \int \beta'' ds, \\ z_1 = z \cos \theta - \sin \theta \int \gamma'' ds. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos \theta dx - \sin \theta \alpha'' ds = (\alpha \cos \theta - \alpha'' \sin \theta) ds, \\ dy_1 &= (\beta \cos \theta - \beta'' \sin \theta) ds, \\ dz_1 &= (\gamma \cos \theta - \gamma'' \sin \theta) ds \end{aligned}$$

et, par suite,

$$ds_1 = ds;$$

ce qui prouve que deux arcs correspondants des deux courbes sont égaux. Les formules précédentes pourront alors s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \cos \theta - \alpha'' \sin \theta, \\ \beta_1 &= \beta \cos \theta - \beta'' \sin \theta, \\ \gamma_1 &= \gamma \cos \theta - \gamma'' \sin \theta, \end{aligned}$$

et une nouvelle différentiation nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'_1}{R_1} &= \frac{\alpha' \cos \theta}{R} - \frac{\alpha' \sin \theta}{T}, \\ \frac{\beta'_1}{R_1} &= \frac{\beta' \cos \theta}{R} - \frac{\beta' \sin \theta}{T}, \\ \frac{\gamma'_1}{R_1} &= \frac{\gamma' \cos \theta}{R} - \frac{\gamma' \sin \theta}{T}; \end{aligned}$$

en élevant au carré et en ajoutant, il vient

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos \theta}{R} - \frac{\sin \theta}{T}, \quad \alpha'_1 = \alpha', \quad \beta'_1 = \beta', \quad \gamma'_1 = \gamma'.$$

Les normales principales aux deux courbes C et C_1 sont parallèles, tandis que la direction de la tangente à la courbe C_1 s'obtient en faisant tourner la tangente à la courbe C d'un angle égal à θ autour de la normale principale. Il est clair que la même rotation appliquée à la binormale de C donnera la direction de la binormale de C_1 ; on aura donc

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &= \alpha \sin \theta + \alpha'' \cos \theta, \\ \beta''_1 &= \beta \sin \theta + \beta'' \cos \theta, \\ \gamma''_1 &= \gamma \sin \theta + \gamma'' \cos \theta. \end{aligned}$$

On en déduit, en différentiant et faisant la somme des carrés,

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\sin \theta}{R} + \frac{\cos \theta}{T}.$$

Je dirai, pour abrégier, que toutes les courbes ainsi obtenues sont les *associées* de la courbe C. Si nous prenons, en particulier, $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons une certaine courbe C_2 donnée par les formules

$$x_2 = -f\alpha'' ds, \quad y_2 = -f\beta'' ds, \quad z_2 = -f\gamma'' ds;$$

la tangente à C_2 est parallèle à la binormale à C, et inversement; le rayon de courbure de C_2 est égal au rayon de torsion de C et son rayon de torsion est égal au rayon de courbure de C. Il y a donc réciprocity complète entre ces deux courbes (*voir* BELTRAMI, *Sulle curve a doppia curvatura*). J'appellerai C_2 l'*adjointe* de C. Les courbes associées se déduisent bien facilement des deux adjointes, au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ y_1 &= y \cos \theta + y_2 \sin \theta, \\ z_1 &= z \cos \theta + z_2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Remarquons que la détermination de l'adjointe C_2 exige trois quadratures, mais ne suppose nullement que l'on connaisse l'arc de la courbe primitive.

8. Dans l'équation (8), faisons le changement de variable $s = \varphi(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ désignant une fonction réelle quelconque de la nouvelle variable indépendante σ . On a, d'après les formules pour le changement de variables,

$$\frac{dY}{ds} = \frac{dY}{d\sigma} \frac{1}{\varphi'(\sigma)}, \quad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{\varphi'(\sigma) \frac{d^2Y}{d\sigma^2} - \varphi''(\sigma) \frac{dY}{d\sigma}}{[\varphi'(\sigma)]^3},$$

et la nouvelle équation sera

$$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \left[\frac{\varphi''(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} + \frac{V'}{V} \varphi'(\sigma) \right] \frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4} V V_0 [\varphi'(\sigma)]^2 Y.$$

Cette équation est encore de même forme que la première. Soit, en effet, $V = F(s)$, $V_0 = F_0(s)$; si nous posons

$$\mathfrak{V} = F[\varphi(\sigma)] \varphi'(\sigma), \quad \mathfrak{V}_0 = F_0[\varphi(\sigma)] \varphi'(\sigma),$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{d^2 Y}{d\sigma^2} = \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4} \varphi \varphi_0 Y.$$

On déduit de là la conclusion suivante. Étant donnée une courbe gauche C , pour laquelle les rayons de courbure et de torsion sont des fonctions connues de l'arc, $R = \pi(s)$, $T = \pi_1(s)$, on peut en déduire par des quadratures une nouvelle courbe gauche C_1 , telle que les rayons de courbure et de torsion s'expriment en fonction de l'arc σ de cette courbe par les formules

$$R_1 = \pi[\varphi(\sigma)] \frac{1}{\varphi'(\sigma)}, \quad T_1 = \pi_1[\varphi(\sigma)] \frac{1}{\varphi'(\sigma)},$$

$\varphi(\sigma)$ désignant une fonction réelle quelconque de σ . Il est facile de le vérifier. Supposons $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ connus en fonction de s , et soit C_1 la courbe gauche définie par les formules

$$x_1 = \int \frac{\alpha ds}{\varphi'(\sigma)}, \quad y_1 = \int \frac{\beta ds}{\varphi'(\sigma)}, \quad z_1 = \int \frac{\gamma ds}{\varphi'(\sigma)},$$

où l'on a remplacé partout s par $\varphi(\sigma)$. On aura

$$dx_1 = \frac{\alpha}{\varphi'(\sigma)} ds, \quad dy_1 = \frac{\beta}{\varphi'(\sigma)} ds, \quad dz_1 = \frac{\gamma}{\varphi'(\sigma)} ds, \quad ds_1^2 = d\sigma^2, \quad ds_1 = d\sigma.$$

Faisons correspondre les points des deux courbes pour lesquels les arcs s et σ seront liés par la relation $s = \varphi(\sigma)$; les formules précédentes nous donnent

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma,$$

ce qui montre qu'aux points correspondants les tangentes aux deux courbes sont parallèles. On en déduit, en différentiant,

$$\frac{\alpha'_1}{R_1} = \frac{\alpha'}{R} \varphi'(\sigma), \quad \frac{\beta'_1}{R_1} = \frac{\beta'}{R} \varphi'(\sigma), \quad \frac{\gamma'_1}{R_1} = \frac{\gamma'}{R} \varphi'(\sigma)$$

et, par suite,

$$R_1 = \frac{R}{\varphi'(\sigma)} = \pi[\varphi(\sigma)] \frac{1}{\varphi'(\sigma)}.$$

Les tangentes aux deux courbes C et C_1 étant parallèles, on sait qu'aux points correspondants les deux courbures sont proportionnelles; on aura

donc

$$\frac{T_1}{T} = \frac{R_1}{R} = \frac{1}{\varphi'(\sigma)};$$

d'où

$$T_1 = \frac{T}{\varphi'(\sigma)} = \pi_1[\varphi(\sigma)] \frac{1}{\varphi'(\sigma)}.$$

Remarque. — Les fonctions $\pi(s)$ et $\pi_1(s)$ étant supposées connues, on peut déterminer la fonction φ par des quadratures, de façon que l'un des deux rayons de courbure de la nouvelle courbe soit une fonction donnée de σ . Par exemple, on pourra calculer φ de façon que R_1 ou T_1 soit constant.

9. L'équation (8) s'intègre immédiatement lorsque R et T sont constants ou lorsque le rapport $\frac{R}{T}$ est constant, et il serait facile d'en déduire les théorèmes classiques de Puiseux et de M. Bertrand sur l'hélice. En général, si R et T sont des fonctions réelles quelconques de s , on ne pourra intégrer l'équation au moyen de quadratures. Voici un cas particulier où l'on pourra effectuer l'intégration. Supposons que V soit de la forme

$$V = A \frac{d\varphi}{ds} e^{i\varphi(s)},$$

$\varphi(s)$ désignant une fonction réelle quelconque, et A une constante réelle; l'équation (8) prend la forme

$$(13) \quad \frac{d^2 Y}{ds^2} = \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + i\varphi' \right) \frac{dY}{ds} - \frac{1}{4} A^2 \varphi'^2 Y.$$

Cherchons si elle admet une intégrale de la forme $e^{ai\varphi(s)}$; nous sommes conduits à l'équation du second degré

$$a^2 - a - \frac{1}{4} A^2 = 0.$$

Désignons par a et b les deux racines de cette équation, qui sont réelles et distinctes; l'intégrale générale de l'équation (13) sera

$$Y = C e^{ai\varphi(s)} + C' e^{bi\varphi(s)}.$$

La forme de V conduit à une interprétation géométrique intéressante; on aura

$$\int V ds = \int \frac{ds}{R} + \sqrt{-1} \int \frac{ds}{T} = \frac{A}{\sqrt{-1}} e^{i\varphi(s)} + \sigma_0 + \sqrt{-1} \tau_0;$$

appelons σ et τ les arcs des deux courbes sphériques Σ et Θ . La formule précédente nous donne

$$\sigma + \sqrt{-1}\tau = \frac{\Lambda}{\sqrt{-1}} e^{\sqrt{-1}\varphi(s)} + \sigma_0 + \sqrt{-1}\tau_0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\sigma - \sigma_0 &= \Lambda \sin \varphi(s), \\ \tau - \tau_0 &= -\Lambda \cos \varphi(s), \\ (\sigma - \sigma_0)^2 + (\tau - \tau_0)^2 &= \Lambda^2.\end{aligned}$$

Soit $m = \frac{\Lambda\sqrt{2}}{\sqrt{\Lambda^2 + 4a^2}}$; on aura deux intégrales Y et Z vérifiant les conditions (9) et (10) en prenant

$$Y = me^{ai\varphi}, \quad Z = -\frac{2ami}{\Lambda} e^{bi\varphi},$$

et les valeurs de u , v , w seront les suivantes :

$$u = -\frac{2am^2}{\Lambda} ie^{i\varphi}, \quad v = i\frac{m^2}{2} \left(e^{2ai\varphi} - \frac{4a^2}{\Lambda^2} e^{2bi\varphi} \right), \quad w = \frac{m^2}{2} \left(e^{2ai\varphi} + \frac{4a^2}{\Lambda^2} e^{2bi\varphi} \right).$$

On en déduit

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2am^2}{\Lambda} \sin \varphi, \\ \beta = -\frac{m^2}{2} \left(\sin 2a\varphi - \frac{4a^2}{\Lambda^2} \sin 2b\varphi \right), \\ \gamma = \frac{m^2}{2} \left(\cos 2a\varphi + \frac{4a^2}{\Lambda^2} \cos 2b\varphi \right); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'' = -\frac{2am^2}{\Lambda} \cos \varphi, \\ \beta'' = \frac{m^2}{2} \left(\cos 2a\varphi - \frac{4a^2}{\Lambda^2} \cos 2b\varphi \right), \\ \gamma'' = \frac{m^2}{2} \left(\sin 2a\varphi + \frac{4a^2}{\Lambda^2} \sin 2b\varphi \right). \end{array} \right.$$

On voit que les courbes sphériques Σ et Θ ne dépendent pas de la forme de la fonction φ , mais seulement du nombre Λ ; ces courbes ne changent pas lorsqu'on augmente φ d'une constante réelle, ce qui revient à prendre les images sphériques des courbes associées. Il y a parmi ces courbes une infinité de courbes algébriques, que l'on obtient en prenant Λ de telle façon que a et b soient commensurables : ce que l'on peut faire d'une infinité de manières. Toutes ces courbes sont unicursales; en désignant par n le dénominateur commun des nombres fractionnaires $2a$ et $2b$, on voit que les coordonnées seront des fonctions rationnelles de $\tan \frac{\varphi}{2n}$.

On obtiendra la courbe C elle-même par les formules

$$x = f \alpha ds, \quad y = f \beta ds, \quad z = f \gamma ds;$$

si la fonction φ est quelconque, on ne pourra effectuer l'intégration, mais il est facile de former autant d'exemples qu'on le voudra, où l'on pourra pousser les calculs jusqu'au bout. Supposons a et b commensurables, et α, β, γ exprimés rationnellement en $\tan \frac{\varphi}{2n}$; il suffira de prendre la fonction φ de telle façon que $\tan \frac{\varphi}{2n}$ soit ou une fonction rationnelle de s , ou une fonction trigonométrique ou une fonction uniforme doublement périodique, etc.

On obtiendra, en particulier, des courbes intéressantes en prenant

$$\varphi(s) = \arcsin \frac{s}{a};$$

toutes ces courbes sont à courbure constante, et le rayon de torsion est donné par la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a} \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}.$$

10. Le problème traité par M. Hoppe revient à celui-ci : déterminer une courbe sphérique connaissant le rayon de courbure en fonction de l'arc. On a, pour une courbe située sur une sphère de rayon a ,

$$R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 = a^2;$$

si R est connu, on en déduira T , et l'on sera ramené à un cas particulier de la question qui vient d'être traitée. Mais on peut aussi employer une méthode spéciale, tout à fait analogue à la précédente, qui permet d'éviter les quadratures.

Soient, comme plus haut, Σ et Θ deux courbes sphériques supplémentaires situées sur une sphère dont nous prendrons le rayon pour unité, σ et τ les arcs de ces deux courbes, m et n deux points correspondants sur les deux courbes, x, y, z les coordonnées du point m , x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point n . Aux deux points m et n les tangentes aux deux courbes sont parallèles, ainsi que les plans osculateurs. Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette tangente et θ l'angle du plan osculateur avec le rayon Om ;

on aura, d'après le théorème de Meunier,

$$R = \cos \theta, \quad R' = \sin \theta,$$

en désignant par R et R' les rayons de courbure des deux courbes Σ et Θ . Les cosinus directeurs de la normale principale à la courbe Σ seront donnés par les formules

$$\alpha' = -x \cos \theta - x_1 \sin \theta,$$

$$\beta' = -y \cos \theta - y_1 \sin \theta,$$

$$\gamma' = -z \cos \theta - z_1 \sin \theta,$$

et les formules de Serret nous donnent, dans ce cas,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \quad \frac{dx_1}{d\tau} = \lambda, \quad \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\alpha'}{R} = -\frac{x \cos \theta + x_1 \sin \theta}{R},$$

et six autres formules analogues. Remplaçons R et $d\tau$ par leurs valeurs; elles deviennent

$$(15) \quad \frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \quad \frac{d\lambda}{d\sigma} = -x - x_1 \operatorname{tang} \theta, \quad \frac{dx_1}{d\sigma} = \lambda \operatorname{tang} \theta.$$

Ce système est identique au système (1), où l'on aurait fait $R = 1$, $\frac{1}{R} = \operatorname{tang} \theta$. Par conséquent, l'intégration de ce système sera ramenée à la recherche d'une intégrale particulière de l'équation du second ordre

$$(16) \quad \frac{d^2 Y}{d\sigma^2} = \frac{V'}{V} \frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4} V V_0 Y,$$

où

$$V = 1 + i \operatorname{tang} \theta.$$

Tout ce qui a été dit plus haut s'applique sans modification. Comme application, proposons-nous de déterminer les courbes sphériques à torsion constante [voir LACROIX, *Cours de Calcul intégral*, t. II, p. 215 (Notes de Serret)]. Il faudra prendre ici $\theta = \frac{\sigma}{a}$, et l'équation précédente sera de la forme

$$\frac{d^2 Y}{d\sigma^2} = \frac{2i}{a(e^{\frac{2i\sigma}{a}} + 1)} \frac{dY}{d\sigma} - \frac{e^{\frac{2i\sigma}{a}}}{\left(e^{\frac{2i\sigma}{a}} + 1\right)^2} Y;$$

faisons le changement de variable

$$e^{\frac{2i\sigma}{a}} = t.$$

Elle devient

$$\frac{2i}{a} t(t+1)^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{4}{a^2} t(t+1) \frac{dY}{dt} - Y,$$

et il est facile de passer de cette équation à l'équation de la série hypergéométrique.

11. L'équation (16) est identique à l'équation (8), où l'on aurait fait $R = 1$; il suit de là qu'à toute courbe sphérique on peut faire correspondre par des quadratures une courbe gauche à courbure constante. D'un autre côté, si une courbe gauche est à courbure constante ou à torsion constante, entre les deux courbures d'une courbe associée il existe une relation linéaire; ce sont les courbes considérées par M. Bertrand. Par suite, à toute courbe sphérique on peut faire correspondre un faisceau de courbes associées, telles que, pour chacune d'elles, il existe une relation linéaire entre les deux courbures, et l'on obtient ainsi toutes les courbes jouissant de cette dernière propriété. Il est facile d'établir les équations générales de ces courbes. Soient Σ et Θ deux courbes sphériques supplémentaires situées sur une sphère de rayon a ayant pour centre l'origine, x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe Σ , x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant de la courbe Θ , λ, μ, ν les cosinus directeurs de la tangente à chacune de ces courbes, θ l'angle que fait le plan osculateur à la courbe Σ au point x, y, z avec le rayon de la sphère qui aboutit à ce point, σ l'arc de la courbe Σ . Les équations (15) seront remplacées par les suivantes :

$$(17) \quad \frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \quad \frac{dx_1}{d\sigma} = \lambda \operatorname{tang} \theta, \quad \frac{d\lambda}{d\sigma} = - \frac{x + x_1 \operatorname{tang} \theta}{a^2}$$

et par deux groupes d'équations analogues. Cela posé, considérons la courbe gauche C représentée par les équations

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{a} \int (x \cos \omega - x_1 \sin \omega) d\sigma, \\ Y = \frac{1}{a} \int (y \cos \omega - y_1 \sin \omega) d\sigma, \\ Z = \frac{1}{a} \int (z \cos \omega - z_1 \sin \omega) d\sigma, \end{array} \right.$$

où ω désigne une constante quelconque. On en tire

$$dX = \frac{1}{a}(x \cos \omega - x_1 \sin \omega) d\sigma,$$

$$dY = \frac{1}{a}(y \cos \omega - y_1 \sin \omega) d\sigma,$$

$$dZ = \frac{1}{a}(z \cos \omega - z_1 \sin \omega) d\sigma$$

et, par suite,

$$ds = d\sigma, \quad \text{d'où} \quad s = \sigma.$$

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire

$$\alpha = \frac{1}{a}(x \cos \omega - x_1 \sin \omega),$$

$$\beta = \frac{1}{a}(y \cos \omega - y_1 \sin \omega),$$

$$\gamma = \frac{1}{a}(z \cos \omega - z_1 \sin \omega),$$

et les formules de Serret, jointes aux formules (17), donnent

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{\lambda}{a}(\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tang} \theta),$$

$$\frac{\beta'}{R} = \frac{\mu}{a}(\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tang} \theta),$$

$$\frac{\gamma'}{R} = \frac{\nu}{a}(\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tang} \theta).$$

On en déduit

$$(19) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{a}(\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tang} \theta), \quad \alpha' = \lambda, \quad \beta' = \mu, \quad \gamma' = \nu.$$

D'autre part, les formules de Serret donnent

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{ds}\right)^2$$

et, par suite,

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{a^2}(1 + \operatorname{tang}^2 \theta);$$

il en résulte

$$(20) \quad \frac{I}{T} = \frac{I}{a} (\sin \omega + \cos \omega \operatorname{tang} \theta).$$

On pourrait encore établir cette formule en remarquant que les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ donnent

$$\alpha'' = \frac{I}{a} (x \sin \omega + x_1 \cos \omega),$$

$$\beta'' = \frac{I}{a} (y \sin \omega + y_1 \cos \omega),$$

$$\gamma'' = \frac{I}{a} (z \sin \omega + z_1 \cos \omega)$$

et en opérant comme plus haut. Des valeurs de R et de T on déduit

$$(21) \quad \frac{\cos \omega}{R} + \frac{\sin \omega}{T} = \frac{I}{a}.$$

Si l'on prend $\omega = 0$, on aura une courbe à courbure constante; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on aura une courbe à torsion constante. Nous voyons, de plus, que les équations (18) représentent toutes les courbes qui jouissent de la propriété exprimée par l'équation (21).

12. La combinaison qui nous a conduit à l'équation (8) n'est pas la seule que l'on puisse employer. On en aperçoit immédiatement deux autres conduisant à deux équations analogues du second ordre, qui peuvent être utiles dans certains cas. Posons

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \alpha' \sqrt{-1}, & \frac{I}{R} &= r, & \frac{I}{T} &= t; \\ u_0 &= \alpha - \alpha' \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

le système (1) peut être remplacé par le suivant :

$$\frac{du}{ds} = -iru - it\alpha'', \quad \frac{du_0}{ds} = iru_0 + it\alpha'', \quad \frac{d\alpha''}{ds} = t \frac{u - u_0}{2i}.$$

L'élimination de u_0 et de α'' conduit à l'équation du troisième ordre en u

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^3 u}{ds^3} - \frac{3t'}{t} \frac{d^2 u}{ds^2} + \left[3 \left(\frac{t'}{t} \right)^2 + r^2 + t^2 - \frac{t''}{t} + 2i \frac{t' r - t r'}{t} \right] \frac{du}{ds} \\ + \left[i \frac{t'' r - t r''}{t} + \left(r + 3i \frac{t'}{t} \right) \left(\frac{t r' - t' r}{t} \right) \right] u, \end{aligned} \right.$$

qui se ramène elle-même à l'équation du second ordre

$$(23) \quad \frac{d^2 Y}{ds^2} = \frac{t'}{t} \frac{dY}{ds} - \frac{1}{4} \left(r^2 + t^2 + 2i \frac{t'r - tr'}{t} \right) Y.$$

De même, en faisant la combinaison $u = \alpha'' + \alpha' \sqrt{-1}$, on serait conduit à une équation analogue à la précédente

$$(24) \quad \frac{d^2 Y}{ds^2} = \frac{r'}{r} \frac{dY}{ds} - \frac{1}{4} \left(r^2 + t^2 + 2i \frac{tr' - t'r}{r} \right) Y.$$

Il nous reste à examiner comment on devra choisir les intégrales particulières de l'une de ces deux équations pour obtenir une courbe gauche répondant à la question. Soit

$$u = \alpha + \alpha' \sqrt{-1}, \quad v = \beta + \beta' \sqrt{-1}, \quad w = \gamma + \gamma' \sqrt{-1};$$

on aura, en désignant par Y et Z deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (23),

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = YZ, \quad v = \frac{i}{2} (Y^2 + Z^2), \quad w = \frac{1}{2} (Y^2 - Z^2), \\ \alpha = \frac{u + u_0}{2}, \quad \beta = \frac{v + v_0}{2}, \quad \gamma = \frac{w + w_0}{2}, \\ \alpha' = \frac{u - u_0}{2i}, \quad \beta' = \frac{v - v_0}{2i}, \quad \gamma' = \frac{w - w_0}{2i}. \end{array} \right.$$

Les équations de condition

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha \frac{d\alpha'}{ds} + \beta \frac{d\beta'}{ds} + \gamma \frac{d\gamma'}{ds} &= -r \end{aligned}$$

donnent, en tenant compte des relations $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, $u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0$,

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= 2, \\ u du_0 + v dv_0 + w dw_0 &= 2ir ds. \end{aligned}$$

Remplaçons $u, v, \omega, u_0, v_0, \omega_0$ par leurs valeurs; il vient

$$(26) \quad \mathbf{Y}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{Z}_0 = 2,$$

$$(27) \quad \mathbf{Y} \frac{d\mathbf{Y}_0}{ds} + \mathbf{Z} \frac{d\mathbf{Z}_0}{ds} = ri.$$

De l'équation (27) on déduit, en prenant les quantités conjuguées,

$$(27') \quad \mathbf{Y}_0 \frac{d\mathbf{Y}}{ds} + \mathbf{Z}_0 \frac{d\mathbf{Z}}{ds} = -ri$$

et, par suite,

$$d(\mathbf{Y}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{Z}_0) = 0$$

ou

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{Z}_0 = \mathbf{K}.$$

Les fonctions \mathbf{Y} et \mathbf{Z} étant des intégrales de l'équation (23), on aura

$$\mathbf{Y} \frac{d\mathbf{Z}}{ds} - \mathbf{Z} \frac{d\mathbf{Y}}{ds} = \mathbf{C}t,$$

$$\mathbf{Y}_0 \frac{d\mathbf{Z}_0}{ds} - \mathbf{Z}_0 \frac{d\mathbf{Y}_0}{ds} = \mathbf{C}_0t.$$

Comparons ces deux équations aux équations (27) et (27'); nous en déduisons

$$(28) \quad \begin{cases} 2 \frac{d\mathbf{Y}}{ds} = -ri\mathbf{Y} - \mathbf{C}t\mathbf{Z}_0, \\ 2 \frac{d\mathbf{Z}_0}{ds} = ri\mathbf{Z}_0 + \mathbf{C}_0t\mathbf{Y}; \end{cases}$$

$$(28') \quad \begin{cases} 2 \frac{d\mathbf{Y}_0}{ds} = ri\mathbf{Y}_0 - \mathbf{C}_0t\mathbf{Z}, \\ 2 \frac{d\mathbf{Z}}{ds} = -ri\mathbf{Z} + \mathbf{C}t\mathbf{Y}_0. \end{cases}$$

Par un calcul tout à fait semblable aux précédents, on trouve qu'il faudra prendre $\mathbf{C} = i, \mathbf{C}_0 = -i$; les équations précédentes deviennent alors

$$(29) \quad \begin{cases} 2 \frac{d\mathbf{Y}}{ds} = -ri\mathbf{Y} - it\mathbf{Z}_0, \\ 2 \frac{d\mathbf{Z}_0}{ds} = ri\mathbf{Z}_0 - it\mathbf{Y}; \end{cases}$$

$$(29') \quad \begin{cases} 2 \frac{d\mathbf{Y}_0}{ds} = ri\mathbf{Y}_0 + it\mathbf{Z}, \\ 2 \frac{d\mathbf{Z}}{ds} = -ri\mathbf{Z} + it\mathbf{Y}_0. \end{cases}$$

Soit Y une intégrale particulière de l'équation (23); on tire des relations précédentes

$$Z = -\frac{i}{t} \left(2 \frac{dY_0}{ds} - riY_0 \right);$$

ce qui prouve que $2 \frac{dY_0}{ds} - riY_0$ sera aussi une intégrale de la même équation, fait que l'on peut vérifier directement. Supposons que ces deux intégrales soient distinctes. Des équations (29) et (29') on déduit

$$\begin{aligned} d(Y Y_0 + Z Z_0) &= 0, \\ Y Y_0 + Z Z_0 &= K; \end{aligned}$$

on peut évidemment supposer $K = 2$, et les mêmes équations donnent alors

$$Y \frac{dY_0}{ds} + Z \frac{dZ_0}{ds} = ri.$$

Les intégrales Y et Z étant choisies de cette façon, les formules (25) donnent α , β , γ , α' , β' , γ' , et la courbe représentée par les équations

$$x = \int \alpha ds, \quad y = \int \beta ds, \quad z = \int \gamma ds$$

satisfait à toutes les conditions du problème.

