SUR

L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE,

PAR M. P. APPELL.

L'objet de cette Note est de compléter et de démontrer directement un théorème dont l'énoncé a été indiqué dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 12 mars 1883.

Considérons un fil flexible et inextensible entièrement libre, dont l'élément de longueur ds est sollicité par la force $F\,ds$, ayant pour projections, sur trois axes rectangulaires,

$$X\,ds, \quad Y\,ds, \quad Z\,ds,$$

où X, Y, Z sont des fonctions des seules coordonnées x, y, z du point d'application. Admettons, de plus, qu'il existe une fonction des forces U, c'est-à-dire que

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Si l'on désigne par T la tension, les équations d'équilibre sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(2) \qquad T = -(U + h),$$

h étant une constante arbitraire. Cela posé, pour trouver les intégrales des équations d'équilibre (1), on peut procéder de la façon suivante :

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2=(\mathrm{U}+h)^2, \tag{3}$$

qui définit Θ *comme fonction de* x, y, z, *et supposons que l'on ait trouvé une intégrale complète*

$$\Theta(x, y, z;\ \alpha, \beta, h)$$

de cette équation avec les deux constantes arbitraires α *et* β *distinctes de* h *et de la constante que l'on peut toujours ajouter à* Θ. *Les intégrales des équations d'équilibre* (1) *sont alors les suivantes*

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\alpha', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\beta', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial h}=s+h', \tag{4}$$

α', β', h' *étant de nouvelles constantes et* s *désignant l'arc de la courbe d'équilibre compté positivement dans un sens convenable.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire voir, en suivant la méthode indiquée par Jacobi dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, que les valeurs de x, y, z en fonction de s, tirées des équations (4), vérifient les équations différentielles (1) et l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Calculons d'abord $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; pour cela, il faudra différentier les équations (4) en y considérant x, y, z comme des fonctions implicites de s définies par ces équations. Nous aurons ainsi

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial z}\frac{dz}{ds}=0,\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial z}\frac{dz}{ds}=0,\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial z}\frac{dz}{ds}=1.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

D'autre part, si, dans l'équation différentielle (3), on met à la place de Θ la fonction trouvée

$$\Theta(x, y, z; \alpha, \beta, h),$$

le résultat de la substitution sera identique en $x, y, z, \alpha, \beta, h$. Si nous prenons les dérivées partielles de cette identité (3) par rapport à α, β et h successivement, nous aurons

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\mathrm{U}+h.\end{aligned}\right.$$

Les équations (5) sont trois équations du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et les équations (6) sont du premier degré en $\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}$. De plus, les équations (5) se déduisent des équations (6) par la substitution de

$$(\mathrm{U}+h)\frac{dx}{ds},\quad (\mathrm{U}+h)\frac{dy}{ds},\quad (\mathrm{U}+h)\frac{dz}{ds}$$

à

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial y},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

On aura donc

$$(\mathrm{U}+h)\frac{dx}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial x},\qquad (\mathrm{U}+h)\frac{dy}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial y},\qquad (\mathrm{U}+h)\frac{dz}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

En faisant la somme des carrés de ces trois équations et tenant compte de la relation (3), on trouve la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

qui montre que s est bien l'arc de la courbe. Si, dans les équations ci-dessus, on remplace $\mathrm{U}+h$ par $-\mathrm{T}$, elles deviennent

$$(7)\qquad \mathrm{T}\frac{dx}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial x},\qquad \mathrm{T}\frac{dy}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial y},\qquad \mathrm{T}\frac{dz}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial z};$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{ds},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou, comme $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\mathrm{U}+h}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}$, $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{1}{\mathrm{U}+h}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}$, $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{1}{\mathrm{U}+h}\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}$,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{\mathrm{U}+h}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

mais, en différentiant l'identité (3) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = (\mathrm{U}+h)\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}:$$

donc l'équation précédente devient

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x},$$

et l'on trouverait de même

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y},$$
$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z},$$

équations qui ne sont autre chose que les équations d'équilibre (1). Le théorème est donc démontré.

Supposons que l'on veuille déterminer les constantes qui figurent dans les intégrales (4) par la condition que la courbe passe par deux points

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x_1, y_1, z_1)$$

et ait, entre ces deux points, une longueur l. Alors, en posant

$$\Theta_0 = \Theta(x_0, y_0, z_0; \alpha, \beta, h),$$
$$\Theta_1 = \Theta(x_1, y_1, z_1; \alpha, \beta, h),$$

on aura à résoudre, par rapport à α, β et h, les trois équations

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial\beta} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial h} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial h} = \pm l.$$

On pourrait facilement appliquer la méthode d'intégration que nous venons d'exposer à chacun des cas particuliers suivants :

1° La fonction U dépend uniquement de la distance du point (x, y, z) à un plan fixe;

2° U dépend seulement de la distance du point (x, y, z) à un axe fixe;

3° U dépend seulement de la distance du point (x, y, z) à un point fixe.

Mais les calculs qu'il faudrait faire dans ces trois cas ne seraient que la répétition de ceux de Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, par exemple dans la XXIV[e] Leçon; il serait sans intérêt de les reprendre ici.