

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Pierre BÉRARD & Bernard HELFFER

**Edited extracts from Antonie Stern's thesis**

Volume 32 (2014-2015), p. 39-72.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2014-2015\\_\\_32\\_\\_39\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2014-2015__32__39_0)

© Institut Fourier, 2014-2015, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## EDITED EXTRACTS FROM ANTONIE STERN'S THESIS

Pierre Bérard & Bernard Helffer

ABSTRACT. — The main purpose of these notes is to provide a reproduction, with some editing, of the first part of Antonie Stern's 1924 PhD thesis which deals with the construction of higher energy eigenfunctions with a prescribed number of nodal domains, in contrast with Courant's nodal domain theorem. A. Stern considers both Dirichlet eigenfunctions for the square membrane – her main result in this framework is mentioned in the second edition of the classical book by R. Courant and D. Hilbert – and eigenfunctions of the spherical Laplacian, her spherical results seem to have been overlooked in the literature, until very recently.

### Preamble

Antonie Stern defended her thesis [4] in Göttingen in July 1924, under the guidance of Professor Richard Courant. The thesis addresses questions related to nodal lines and nodal domains (Part I), and to the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions (Part II).

These notes contain a reproduction of the Introduction and Part I of A. Stern's thesis, as a complement to our papers [2, 3, 1]. We have also included the résumé (“Lebenslauf”) which Stern provides in her thesis.

For the convenience of the reader, we have edited the thesis with tags and highlighting, in order to point out the main assertions and ideas. Tags [S] refer to page numbers in the printed original; the other tags ([E] for ‘Einleitung’, [K] for ‘Kugel’, [Q] for ‘Quadrat’ and [I] for ideas) refer to the main assertions and ideas. In order to make cross referencing easier, we have numbered some of the equations with the numbers of the corresponding figures.

---

*Keywords:* Nodal domains, Nodal lines, Courant theorem.

*Math. classification:* 35P15, 49R50.

*Acknowledgements:* The authors would like to thank A. Vogt for providing biographical information concerning A. Stern.

We have reproduced Stern's original pictures. In the appendix, we provide Maple computations of the nodal sets which appear in Stern's figures, with some comments.

In Part I of her thesis, A. Stern provides examples of spherical harmonics of any degree  $\ell$ , with exactly two (when  $\ell$  is odd) or three (when  $\ell$  is even) nodal domains. For any positive integer  $n$ , she also provides a Dirichlet eigenfunction of the square with side  $\pi$ , associated with the eigenvalue  $4n^2 + 1$ , with exactly two nodal domains. These examples are in contrast with Sturm's result for self-adjoint Sturm–Liouville problems, and complement Courant's nodal domain theorem. See the tag [E1] in the Introduction to the thesis.

The following biographical information was provided by A. Vogt [5].

Antonie (Toni) Stern (1892 Dortmund - after 1967 Israel) studied mathematics. In 1925 she received the doctoral degree (Dr. phil.) at the Göttingen University, her advisor was Richard Courant. Obviously she could not find an academic position as a female mathematician, but she was a member of the German Mathematical Society (DMV) from 1926 until 1939 when she managed to escape Nazi Germany, and went into exile to Palestine, where her sister Ilse (b. 1900) was living already since 1924. After her thesis, she changed her scientific field, and she became a researcher in the Kaiser Wilhelm Institute for Applied Physiology (occupational physiology) in Dortmund, from 1929 until 1933. Because of the Nazi's, she had to leave the KWI in late 1933. She was born in a Jewish family, the antisemitic laws in Nazi Germany were introduced in April 1933. What she did between 1933 and 1938 is not known. In the end of 1938 (after the November 1938 pogrom in Germany, called "Reichskristallnacht"), she emigrated from Dortmund to Palestine. In 1967 she was living in Rehovot. Among the many female women scientists she belongs to the many emigrées, and partly she had the possibility to work successfully.

**Bemerkungen über asymptotisches Verhalten  
von Eigenwerten und Eigenfunktionen.**

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung der Doktorwürde  
der  
Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Georg August-Universität zu Göttingen  
vorgelegt von  
Antonie Stern  
aus Dortmund.

---

Göttingen 1925.

Druck der Dieterichschen Univertisäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 30 Juli 1924.

Referent: Professor Dr. Courant.

### Einleitung.

Die folgenden Bemerkungen beschäftigen sich mit einer Reihe von Fragen, die nur in losem Zusammenhang zu einander stehen, jedoch alle dem gleichen Problemkreis angehören. Ihre Untersuchung dient dem Zweck, Material über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen partieller elliptischer, sich selbst adjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu sammeln. Dabei sind unter Eigenwerten diejenigen Konstanten  $\lambda_n$  verstanden, für die die vorgelegte Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda ku = 0,$$

in der  $L(u)$  einen sich selbst adjungierten partiellen elliptischen Differentialausdruck bezeichnet, bei vorgegebener Randbedingung auf dem Rande des betrachteten Gebiets  $G$  eine nicht identisch verschwindende, im Innern und auf dem Rande von  $G$  stetige Lösung besitzt; die Eigenfunktionen  $u_n$  sind die zu diesen Werten  $\lambda_n$  gehörigen Lösungen der Differentialgleichung.

Zunächst behandeln wir das Problem der Knoten der Eigenfunktionen d. h. der Linien bzw. Flächen, auf denen die Eigenfunktionen verschwinden, und zwar für die Gleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  im Quadrat bei der Randbedingung  $u = 0$  bzw. auf der Kugelfläche, wobei an Stelle der Randbedingung die Forderung der Stetigkeit auf der ganzen Kugelfläche tritt. **[E1]** *Im eindimensionalen Fall wird nach den Sätzen von Sturm<sup>(1)</sup> das Intervall durch die Knoten der  $n$ ten Eigenfunktion in  $n$  Teilgebiete zerlegt. Dies Gesetz verliert seine Gültigkeit bei mehrdimensionalen Eigenwertproblemen*, wie im erster Teil dieser Arbeit, der der Untersuchung dieser und daran anschließender Fragen gewidmet ist, nachgewiesen wird; *es läßt sich beispielweise leicht zeigen, daß auf der Kugel bei jedem Eigenwert die Gebietszahlen 2 oder 3 auftreten, und daß bei Ordnung nach wachsenden Eigenwerten auch beim Quadrat die Gebietszahl 2 immer wieder vorkommt*. Im Anschluß hieran werden die Gestalt der Knotenlinien für bisher nicht in der Literatur behandelte Fälle diskutiert und Gesetzmäßigkeiten über die Gebietsanzahl gesammelt. Die Suche nach einem asymptotischen Gesetz wird sich als gegenstandlos erweisen.

<sup>(1)</sup> Journal de Mathématiques, T.1, 1836, p. 106–186, 269–277, 375–444.

Im zweiten Teil werden wir eine asymptotische Eigenschaft der Eigenwerte nicht in ihrer Abhängigkeit von der Stellenzahl sondern von der Randbedingung ableiten, und zwar werden bei der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$$

für  $\sigma \rightarrow -\infty$  die Gesamtheit der positiven und negativen Eigenwerte in Bezug auf ihre Größenordnungen miteinander vergleichen.

Die der Fakultät eingereichte Dissertation enthielt ferner zwei einfache Verallgemeinerungen von Resultaten der Courantschen Abhandlung: Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik<sup>(2)</sup>, sowie eine Untersuchung der Frage, ob und inwiefern für den Mittelwert  $\iint_{G'} \bar{u}_n^2 dg$ , wo  $G'$  ein Teilgebiet von  $G$  und  $\bar{u}_n$  die normierte  $n$ te Eigenfunktion bezeichnet,  $\iint_{G'} \bar{u}_n^2 dg = 1$ , für  $n \rightarrow \infty$  ein von  $n$  unabhängiger Grenzwert existiert. Da diese Frage im allgemeinen zu verneinen ist, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden; doch wollen wir kurz über die Ergebnisse der oben erwähnten Untersuchungen berichten. Courant betrachtet in der zitierten Abhandlung das Eigenwertproblem der Differentialgleichung  $L(u) + \lambda ku = 0$ :

$$p\Delta u + p_x u_x + p_y u_y + (-q + \lambda k)u = 0$$

in einem ebenen Gebiet  $G$ , wo  $p > 0$ ,  $p_x, p_y, q$  und  $k > 0$  stetige Funktionen in  $G$  sein sollen, bei irgend einer homogenen Randbedingung und definiert die Eigenwerte durch ein Maximum-Minimumproblem. Die erwähnten Verallgemeinerungen betrafen 1. die Aufhebung der Vorzeichenbeschränkung  $k > 0$  und 2. die Übertragung auf geschlossene krumme Flächen, wobei an Stelle der Randbedingung die Forderung der Stetigkeit auf der ganzen Fläche trat.

Im ersten Falle konnte, falls  $q = 0$  und die in der Randbedingung auftretende Funktion  $\sigma \geq 0$  gesetzt wurde, der  $n$ te positive bzw. negative Eigenwert je durch ein Maximum-Minimumproblem bestimmt werden, sodaß sich die ausschließlich auf der Maximum-Minimumdefinition der Eigenwerte beruhenden Sätze der Courantschen Abhandlung sinngemäß übertragen ließen. Dann ergab sich bei jeder der betrachteten Randbedingungen, falls mit  $G_I$  und  $G_{II}$  die Teilgebiete von  $G$  bezeichnet wurden, in denen  $k \geq 0$  bzw.  $k \leq 0$  ist, und  $A(\lambda)$  die Zahl der positiven Eigenwerte  $\leq \lambda$  darstellt, für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G_I} \frac{k}{p} dx dy$$

<sup>(2)</sup> Mathematische Zeitschrift, Bd. 7, 1920, S. 1–57.

und entsprechen für die Zahl  $B(\lambda)$  der negativen Eigenwerte, die absolut genommen  $\leq \lambda$  sind

$$B(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G_{II}} \frac{|k|}{p} dx dy.$$

Die Gesamtanzahl  $A^*(\lambda)$  der Eigenwerte der Differentialgleichung, die absolut genommen  $\leq \lambda$  sind, ist daher bei allen in Betracht kommenden Randbedingungen durch

$$A^*(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{|k|}{p} dx dy$$

gegeben, während  $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy$  die Differenz der asymptotischen Anzahlen von positiven und negativen Eigenwerten bestimmt. Ist demnach  $\iint_G \frac{k}{p} dx dy = 0$ , so gibt es asymptotisch gleich viel positive und negative Eigenwerte.

Durch Anwendung der Resultate von §9 der Courantschen Abhandlung auf die Differentialgleichung  $L(u) + \lambda ku = 0$  ergab sich die genauere Abschätzung

$$A^*(\lambda) \leq \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{|k|}{p} dx dy + C \left( \frac{|k|_{\text{Max}}}{p_{\text{Min}}} \right)_G \sqrt{\lambda} \log \lambda,$$

wo  $C$  eine allgemeine von  $k$  und  $p$  unabhängige Konstante ist.

Die Übertragung auf geschlossene krumme Flächen erfolgte mittels konformer Abbildung einzelner Teile der Fläche auf die Ebene; die durch diese konforme Abbildung transformierte Differentialgleichung in der Ebene besitzt dann die gleichen Eigenwerte wie die ursprüngliche Differentialgleichung auf der Fläche. Weiter lassen sich die in der Ebene gültigen Sätze über die zu den Randbedingungen  $u = 0$  bzw.  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  gehörigen Eigenwerte von Teilgebieten verglichen mit denen des ursprünglichen Gebiets auf die geschlossene Fläche übertragen. Auf Grund dieser beiden Tatsachen ergibt sich dann leicht, wenn  $F$  die geschlossene Fläche und  $d\sigma$  das Flächenelement bezeichnet, die asymptotische Verteilungsformel

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_F \frac{k}{p} d\sigma,$$

die sich für die Differentialgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  auf der Kugelfläche unmittelbar verifizieren läßt.

**I. Über die Knotenlinien der zu der Differentialgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  gehörigen Eigenfunktionen des Quadrats und der Kugelfläche.**

**§1. Nichtgültigkeit der Sturm'schen Satzes für partielle Differentialgleichungen; Vorkommen der Gebietszahlen 2 und 3 und aller Gebietszahlen  $\equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$  auf der Kugelfläche.**

Eines der wichtigsten Resultate der Sturm–Liouvilleschen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist folgender Satz:

Ordnet man die Eigenfunktionen der selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda ku = (pu')' - qu + \lambda ku = 0, \quad p(x) > 0, \quad k(x) > 0$$

für ein gegebenes Intervall  $a \leq x \leq b$  und gegebene homogene Randbedingungen nach wachsenden Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , so teilen die Nullstellen der  $n$ ten Eigenfunktion  $u_n$  das Intervall in genau  $n$  Teilintervalle.

Daß die eine Hälfte dieses Satzes allgemein bei partiellen Differentialgleichungen bestehen bleibt, nämlich daß  $n$  immer eine obere Schranke für die Anzahl der Teilgebiete ist, in die das Grundgebiet durch Nullstellen der  $n$ ten Eigenfunktion zerlegt wird, hat Courant<sup>(3)</sup> bewiesen. Ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Ordnung der Differentialgleichung sowie über die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen zeigte er, daß bei Ordnung nach wachsenden Eigenwerten die  $n$ te Eigenfunktion  $u_n$  einer sich selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda ku = 0, \quad k > 0$$

für ein Gebiet  $G$  bei homogenen Randbedingungen durch ihre Nullstellen das Gebiet  $G$  in nicht mehr als  $n$  Teilgebiete teilt.

*Die andre Hälfte des Sturm–Liouvilleschen Satzes, daß die Anzahl der betreffenden Teilgebiete mindestens  $n$  ist, gilt für partielle Differentialgleichungen nicht mehr, wie hier an den einfachsten Beispielen, den einzigen, in denen man die Eigenwerte explicite kennt, gezeigt werden soll.*

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

---

<sup>(3)</sup> Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Göttinger Nachrichten 1923, Math.-phys. Klasse, S. 81–84.



wo  $\Delta u$  den Laplaceschen Differentialausdruck darstellt, auf der Kugel von Radius 1; die Eigenwerte sind

$$\lambda_n = \ell(\ell + 1) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

die Eigenfunktionen abgesehen von der Normierung

$$P_{\ell,m}(\cos \vartheta) \cos m\varphi \text{ und } P_{\ell,m}(\cos \vartheta) \sin m\varphi,$$

wo  $\vartheta$  den Polabstand und  $\varphi$  die Länge bezeichnet,  $0 \leq m \leq \ell$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  und

$$P_{\ell,m}(z) = C_m (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\ell(z)}{dz^m}$$

$$P_{\ell,0}(z) = P_\ell(z) = C_0 \frac{d^\ell (z^2 - 1)^\ell}{dz^\ell}$$

ist. Hiernach ist  $P_\ell$  eine ganze rationale Funktion  $\ell$  ten Grades von  $\cos \vartheta$ ,  $P_{\ell,m}$  eine solche  $(\ell - m)$  ten Grades, multipliziert mit  $\sin^m \vartheta$ , und der Eigenwert  $\lambda_n = \ell(\ell + 1)$  ist  $(2\ell + 1)$  fach, da  $2\ell + 1$  linear unabhängige Eigenfunktionen zu ihm gehören.

Das Knotenliniensystem der Funktionen  $P_{\ell,m}(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi$  besteht aus  $(\ell - m)$  Breitenkreisen und  $m$  gleichmäßig verteilten Meridianen, also speziell das von

$$P_{\ell,\ell}(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} \ell\varphi \text{ aus } \ell \text{ Meridianen, das von}$$

$$P_\ell(\cos \vartheta) \text{ aus } \ell \text{ Breitenkreisen.}$$

Zunächst *wollen wir zeigen, daß es zu jedem Eigenwert Eigenfunktionen gibt, deren Nulllinien die Kugelfläche nur in zwei oder drei Gebiete teilen.* [K1]

Hierzu betrachten wir die Eigenwerte

$$\lambda_n = (2r + 1)(2r + 2) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

und die Funktionen

$$P_{2r+1,2r+1}(\cos \vartheta) \cos(2r + 1)\varphi \text{ und } P_{2r+1}(\cos \vartheta),$$

deren Nulliniensystem aus  $2r + 1$  Meridianen bzw. Breitenkreisen besteht. In den von den Nulllinien begrenzten Gebieten ist  $P_{2r+1,2r+1}(\cos \vartheta) \times \cos(2r + 1)\varphi$  bzw.  $P_{2r+1}(\cos \vartheta)$  abwechselnd positiv und negativ. *Legen wir die beiden Knotenliniensysteme übereinander und schraffieren wir die Gebiete, in denen beide Funktionen gleiches Vorzeichen haben, so kann die Knotenlinie der Kugelfunktion* [I1]

$$(1) \quad P_{2r+1,2r+1}(\cos \vartheta) \cos(2r + 1)\varphi + \mu P_{2r+1}(\cos \vartheta), \quad \mu > 0$$

*nur in den nichtschraffierten Gebieten verlaufen und zwar für hinreichend kleine  $\mu$  in beliebiger Nachbarschaft der Knotenlinien von  $P_{2r+1,2r+1}(\cos \vartheta)$*

[I3]  $\cos(2r+1)\varphi$ , d. h. der  $2r+1$  Meridiane, da sich *bei stetiger Änderung von  $\mu$  das Knotenliniensystem stetig ändert* (Fig. 1). Da *die Knotenlinie ferner durch die  $2(2r+1)^2$  Schnittpunkte der Nulllinien der beiden obenstehenden Kugelfunktionen* gehen muß, während die Pole ihr nicht mehr angehören können, – die Summe der beiden Funktionen verschwindet in ihnen nicht, – kann sie nur den gezeichneten Verlauf haben; sie besteht also aus einem Zuge und teilt die Kugelfläche in zwei Gebiete.

[K1] *Die Gebietszahl zwei tritt somit bei allen Eigenwerten  $\lambda_n = (2r+1)(2r+2)$ ,  $r = 1, 2, \dots$  auf*; ebenso *wollen wir jetzt zeigen, daß die Gebietszahl drei bei allen Eigenwerten*

$$\lambda_n = 2r(2r+1) \quad r = 1, 2, \dots$$

*immer wieder vorkommt.* Demnach ist die untere Grenze der durch die Nulllinien der Eigenfunktionen bewirkten Gebietseinteilung für alle Eigenwerte zwei bzw. drei.

Die Kugelfunktion

$$(2) \quad P_{2r,2r}(\cos \vartheta) \cos 2r\varphi + \mu P_{2r,1}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2r}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

hat die Pole zu einfachen Nullstellen; die zugehörige Knotenlinie muß also die Pole einmal enthalten. Das Vorzeichen der Größe  $\mu$  hat auf den Charakter der Knotenlinie keinen Einfluß, da die Verteilung der schraffierten und nichtschraffierten Gebiete auf der Kugelfläche vollkommen symmetrisch ist; ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir daher immer  $\mu > 0$  annehmen. (Die Schraffierung wird weiterhin fortgelassen, um die Figuren übersichtlicher zu gestalten.) Für hinreichend kleine  $\mu$  läuft die vom Nordpol ausgehende und längs der Meridiane verlaufende Knotenlinie zum Nordpol zurück (Fig. 2). Die entsprechende, in sich geschlossene Knotenlinie geht auf der Hinterseite der Kugel vom Südpol aus und zum Südpol zurück. Da das Restgebiet auf der Kugel zusammenhängend ist, erhalten wir die Gebietszahl drei für alle Eigenwerte  $\lambda_n = 2r(2r+1) \quad r = 1, 2, \dots$

[K3] Von den letzten Figur ausgehend *wollen wir jetzt zeigen, daß alle ungeraden Zahlen  $\equiv 3 \pmod{4}$  sich als Gebietszahlen auf der Kugelfläche immer wiederholen.*

Hierzu betrachten wir für ungerade  $s$  die Kugelfunktion

$$(3) \quad P_{2r,s,2rs}(\cos \vartheta) \cos 2rs\varphi + \mu P_{2r,s,s}(\cos \vartheta) \cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

bei der die Pole nur noch  $s$  fache Nullstellen sind (Fig. 3). Deren Nullliniensystem teilt für hinreichend kleine  $\mu$  bei festem  $s$  für alle  $r$  die Kugel in

$2s + 1$  Gebiete, da immer  $2r$  Meridiane von  $P_{2rs,2rs}(\cos \vartheta) \cos 2rs\varphi$  zwischen je zwei Meridianen von

$$P_{2rs,s}(\cos \vartheta) \cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right)$$

liegen, sodaß alle von den Polen ausgehenden und längs der Meridiane verlaufenden Nulllinien infolge der ungeraden Anzahl  $(2r-1)s$  der Breitenkreise zu den Polen zurücklaufen. Wegen der ungeraden Gebietszahl zwischen zwei Meridianen von  $P_{2rs,s}(\cos \vartheta) \cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right)$  müssen die Knotlinien abwechselnd vom Nord- und Südpol ausgehen. Sie umschließen  $2s$  Gebiete, und da das Restgebiet auf der Kugel zusammenhängend ist, zerfällt diese in  $2s + 1$  Teile für alle  $r$ .

Ähnlich können wir zeigen, daß auch *alle graden Zahlen als Gebietszahlen auf der Kugelfläche unendlich oft vorkommen*. Hierzu konstruieren wir zunächst einen andern Typus für ein Gebietszahl zwei mit Hilfe der Kugelfunktion

[K4]

$$(4) \quad \mu P_{2r+1,2r+1}(\cos \vartheta) \cos(2r+1)\varphi + P_{2r+1,1}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2r+1}\right), \\ 0 < \varepsilon < 1,$$

für hinreichend kleine  $\mu$  (Fig. 4). Die Knotenlinie verläuft im Zickzack längs der Parallelkreise auf jeder Halbkugel vom Nord- zum Südpol; sie besteht demnach aus einem Zuge und teilt die Kugel in zwei Gebiete.

Betrachten wir nun die Kugelfunktion

$$(5) \quad \mu P_{s(2r+1),s(2r+1)}(\cos \vartheta) \cos s(2r+1)\varphi \\ + P_{s(2r+1),s}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right), \\ 0 < \varepsilon < 1,$$

für hinreichend kleine  $\mu$ , so zerlegt die zugehörige Knotenlinie bei festem  $s$  für alle Werte  $r$  die Kugelfläche in  $2s$  Gebiete (Fig. 5).

Da zwischen je zwei Meridianen von  $P_{s(2r+1),s}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$   $2r + 1$  Meridiane von  $P_{s(2r+1),s(2r+1)}(\cos \vartheta) \cos s(2r+1)\varphi$  liegen, läuft die Knotenlinie im Zickzack längs der Breitenkreise zwischen je zwei Meridianen von  $P_{s(2r+1),s}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$  vom Nord- zum Südpol. Das Knotenliniensystem ist daher ein stetiges Bild des Meridiansystems von  $P_{s(2r+1),s}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$ , d. h. der  $s$  Meridiane und teilt demnach die Kugel in  $2s$  Gebiete für alle Werte  $r$ .

Von dem ersten Typus für die Gebietszahl zwei aus können wir auch noch auf andre Weise einen Typus für die Gebietszahl drei gewinnen, und zwar

mit Hilfe der Kugelfunktion

$$(6) \quad \mu P_{4r+2}(\cos \vartheta) + P_{4r+2,4r+1}(\cos \vartheta) \cos(4r+1)\varphi$$

für hinreichend kleine  $\mu$ , wie unmittelbar aus der Figur 6 ersichtlich ist. Einen Verallgemeinerung dieses Typs auf beliebige Zahlen ist aber nicht möglich, da für  $\ell \rightarrow +\infty$  bei festem  $s$  die  $s$  Wurzeln von  $P_{\ell,\ell-s}(\cos \vartheta)$  alle gegen null konvergieren.

## §2. Vorkommen der Gebietszahl zwei beim Quadrat.

[Q1] *Wir wollen nun zeigen, daß beim Quadrat die Gebietszahl zwei immer wieder auftritt.*

Hat das Quadrat die Seitenlänge  $\pi$ , so sind bei der Randbedingung  $u = 0$  die zugehörigen Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{\ell,m} = \ell^2 + m^2 \quad \ell, m = 1, 2, \dots,$$

die Eigenfunktionen

$$u_n = u_{\ell,m} = \frac{2}{\pi} \sin \ell x \sin m y.$$

Nur für  $\ell = m$  ist der zugehörige Eigenwert einfach; für  $\ell \neq m$  ist er mindestens zweifach; denn es gehören zu ihm die linear unabhängigen Eigenfunktionen  $u_{\ell,m}$  und  $u_{m,\ell}$  und damit alle geeignet normierten linearen Kombinationen dieser Funktionen.

Die zum Eigenwert  $\lambda_n = \lambda_{\ell,m} = \ell^2 + m^2$  gehörigen Knotenlinien sind allgemein in der Form

$$\begin{aligned} \sin \ell x \sin m y + \mu \sin m x \sin \ell y &= 0, \\ u_{\ell,m} + \mu u_{m,\ell} &= 0, \\ |\mu| &\leq 1 \end{aligned}$$

gegeben; die Werte  $|\mu| > 1$  brauchen nicht berücksichtigt zu werden; die Knotenlinien für diese Werte von  $\mu$  werden durch Vertauschung von  $x$  und  $y$ , d. h. Spiegelung an der Quadrat-diagonalen aus den früheren erhalten.

Um den typischen Verlauf der Knotenlinie zu bestimmen, haben wir ähnliche Anhaltspunkte wie auf der Kugelfläche.

- [I1] *Legen wir die Knotenliniensysteme von  $u_{\ell,m}$  ( $\ell - 1$  Parallelen zur  $y$ -Achse,  $m - 1$  zur  $x$ -Achse) und  $u_{m,\ell}$  ( $m - 1$  Parallelen zur  $y$ -Achse,  $\ell - 1$  zur  $x$ -Achse) übereinander, so kann für  $\mu > 0$  ( $< 0$ ) die Knotenlinie nur in den Gebieten verlaufen, in denen beide Funktionen verschiedenes (gleiches) Vorzeichen haben. Weiter müssen alle zum Eigenwert  $\lambda_{\ell,m}$  gehörigen Knotenlinien durch die Schnittpunkte der Liniensysteme  $u_{\ell,m} = 0$  and*
- [I2]

$u_{m,\ell} = 0$ , also durch  $(\ell - 1)^2 + (m - 1)^2$  feste Punkte hindurchgehen, da diese Punkte die Gleichung jeder Knotenlinie erfüllen. Dagegen können die  $(\ell - 1)(m - 1)$  Doppelpunkte der Knotenlinie von  $u_{\ell,m}$  für  $\mu \neq 0$  nicht mehr der Knotenlinie angehören. Schließlich schneiden sich zwei bzw. mehrere an dem gleichen Eigenwert gehörige Knotenlinien senkrecht bzw. unter gleichen Winkeln<sup>(4)</sup>. *Wir betrachten die Eigenwerte* [Q2]

$$\lambda_n = \lambda_{2r,1} = 4r^2 + 1, \quad r = 1, 2, \dots$$

und die Knotenlinie der zugehörige Eigenfunktion

$$(7) \quad u_{2r,1} + u_{1,2r} = 0,$$

für die sich, wie leicht mittels graphischer Bilder nachgewiesen werden kann, die Figur 7 ergibt. Die Diagonale

$$y = \pi - x$$

ist enthalten, da  $y = \pi - x$  die Gleichung der Knotenlinie identisch erfüllt. *Lassen wir nur  $\mu$  von  $\mu = 1$  aus abnehmen, so lösen sich die Doppelpunkte der Knotenlinie alle gleichzeitig und im gleichem Sinne auf, und es ergibt sich die Figur 8. Da die Knotenlinie aus einem doppelungspunktlosen Zuge besteht, teilt sich das Quadrat in zwei Gebiete und zwar geschieht dies für alle Werte  $r = 1, 2, \dots$ , also alle Eigenwerte  $\lambda_n = \lambda_{2r,1} = 4r^2 + 1$ .* [Q3]

### §3. Erläuterung der bei den Quadratzeichnungen benutzen Methode.

Im Anschluß an dies Resultat, das, wie die Untersuchungen auf der Kugelfläche, die Nichtigkeit des Sturmischen Satzes für partielle Differentialgleichungen beweist, scheint es von Interesse, die Gestalt der Knotenlinien für Fälle zu untersuchen, die bisher nicht in der Literatur behandelt worden sind und nach Gesetzmäßigkeiten für die Gebietsanzahl zu forschen. Hierzu soll in Folgenden einiges Material zusammengestellt werden, wobei soweit Figuren auf der Kugelfläche in Frage kommen, nur der typische Verlauf der Knotenlinie angegeben werden kann, während *unter Zuhilfenahme graphischer Bilder die Knotenlinien des Quadrats leicht mit beliebiger Genauigkeit gezeichnet werden können*. Die Methode ist im wesentlichen schon an den früheren Beispielen auseinandergesetzt worden; [Q4]

<sup>(4)</sup> Siehe Pockels : Über die Partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891. S. 225.

es bleibt nur ein Wort über die beim Quadrat erwähnten graphischen Bilder zu sagen.

Da sich die mehrfachen Eigenwerte beim Quadrat der allgemeinen Betrachtung entziehen, beschränken wir uns auf zweifache Eigenwerte, bzw. bei mehrfachen Eigenwerten auf die Knotenlinien, die einparametrischen Scharen zusammengehöriger Eigenfunktionen  $u_{\ell,m}$  und  $u_{m,\ell}$  entsprechen. Ferner dürfen wir uns allgemein auf Eigenwerte beschränken, die relativ primen Wertepaaren  $\ell, m$  zukommen, da falls  $\ell, m = a\ell_1, = am_1$ , und  $\ell_1, m_1$  relativ prim sind, das Quadrat in  $a^2$  Teilquadrate zerfällt, sodaß in jedem von diesen für jeden Wert von  $\mu$  die Knotenlinie den dem Eigenwerte  $\ell_1^2 + m_1^2$  entsprechenden Typus zeigt. Unter dieser Voraussetzung der Teilerfremdheit von  $\ell, m$  spielt das Vorzeichen der Größe  $\mu$  nur eine Rolle, wenn  $\ell, m$  beide ungrade sind; ist eine der beiden Größen grade, so entspricht einer Änderung des Vorzeichens von  $\mu$  eine Spiegelung der Figur an der Graden  $y = \frac{\pi}{2}$  oder  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Ist nun der Eigenwert

$$\lambda_n = \lambda_{\ell,m} = \ell^2 + m^2, \ell > m$$

gegeben, hat also die Knotenlinie die Gleichung

$$\sin \ell x \sin m y + \mu \sin m x \sin \ell y = 0,$$

so haben wir  $m^2$  Teilquadrate, durch deren Ecken die Knotenlinie für alle Werte von  $\mu$  gehen muß, und in deren Innern  $[\frac{\ell}{m}]^2, [\frac{\ell}{m}][\frac{\ell}{m} + 1]$  oder  $([\frac{\ell}{m} + 1])^2$  fest Punkte der Knotenlinie liegen, die auch eine Quadrateinteilung des ursprünglichen Quadrats und zwar in  $\ell^2$  Teilquadrate liefern.

Die Untersuchung, ob in irgend einem dieser Teilquadrate eine bestimmte Parallele zur  $x$ - oder  $y$ -Achse Schnittpunkte mit der Knotenlinie hat, wird folgendermaßen graphisch geführt. Wir zeichnen z. B. für festes  $\bar{y}$  das Kurvenpaar

$$\sin \ell x \sin m \bar{y} \text{ und } -\mu \sin m x \sin \ell \bar{y}.$$

Je nachdem diese Kurven in den Intervallen

$$r \frac{\pi}{\ell} < x < (r+1) \frac{\pi}{\ell}, r = 0, 1, \dots, \ell - 1$$

keinen, einen oder zwei Schnittpunkte, bzw. einen Berührungspunkt gemeinsam haben, hat die Parallele  $y = \bar{y}$  keinen einen oder zwei Schnittpunkte bzw. einen doppelten Schnittpunkt mit der Knotenlinie in den betreffenden Teilquadraten. Im letzten Falle liegt also ein Doppelpunkt der Knotenlinie vor.

Die Abweichung der Knotenlinie bei nicht verschwindendem  $\mu$  von der Graden by  $\mu = 0$  ist aus der Lage der Schnittpunkte dieser zwei Kurven

oder entsprechender Kurven für  $x = \bar{x}$  zu entnehmen. Auf Grund dieser Bemerkung können wir, wie schon oben gesagt, die Knotenlinien des Quadrats mit beliebiger Genauigkeit zeichnen.

Diese Andeutungen mögen genügen; für die weiterhin gegebenen Figuren sind die graphischen Bilder nicht hinzugefügt.

#### §4. Einige Einzelfälle.

Beim Beweise, daß die Gebietszahl zwei beim Quadrat immer wieder vorkommt, hatten wir die den Eigenwerten

$$\lambda_n = \lambda_{2r,1} = 4r^2 + 1$$

entsprechenden Knotenlinien

$$\sin 2rx \sin y + \sin x \sin 2ry = 0$$

und

$$(8) \quad \sin 2rx \sin y + \mu \sin x \sin 2ry = 0,$$

wo  $\mu < 1$  hinreichend nahe an 1 liegt, untersucht. Jetzt wollen wir die entsprechenden Figuren für die Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{2r+1,1} = (2r+1)^2 + 1 = 4r^2 + 4r + 2$$

zeichnen und zwar für  $r = 5$ ,  $\lambda_n = 122$

$$(9) \quad \sin 11x \sin y + \sin x \sin 11y = 0$$

entspricht die Figur 9, während

$$(10) \quad \sin 11x \sin y - \sin x \sin 11y = 0$$

die Figur 10 zukommt. Liegt  $|\mu| < 1$  hinreichend nahe bei 1, so erhalten wir für  $\mu > 0$  ein entsprechendes Bild wie Figur 9, da kein Doppelpunkt vorhanden ist, für  $\mu < 0$  die Figur 11.

Ist  $|\mu|$  hinreichend klein, so ergibt sich für alle

$$\lambda_n = \lambda_{\ell,1} = \ell^2 + 1$$

als Knotenlinie eine Figur, in der die  $\ell - 1$  Parallelen zur  $y$ -Achse durch Schlangelinien mehr oder minder großer Ausbuchtung ersetzt sind (Fig. 12).

Wir betrachten weiterhin den Fall

$$m = \ell - 1$$

d. h.

$$\lambda_n = \lambda_{\ell,m} = \lambda_{\ell,\ell-1} = \ell^2 + (\ell - 1)^2 = 2\ell(\ell - 1) + 1$$

z. B. für  $\ell = 7$ ,  $\lambda_n = 85$  (Fig. 13).

Hier enthält jedes der 36 Teilquadrate in seinem Innern einen festen Punkt der Knotenlinie, während die 30 Doppelpunkte der Knotenlinie von  $u_{7,6}$  auf den horizontalen, die von  $u_{6,7}$  auf den vertikalen Seiten liegen. Hierdurch ist der Verlauf der Knotenlinie für  $\mu \neq 0$  vollkommen festgelegt; wir erhalten ein Gebilde von 11 Kurvenzügen ohne Doppelpunkte, die das Quadrat in 12 Gebiete teilen, allgemein bei beliebigen  $\ell$  ein Gebilde von  $2\ell - 3$  doppelpunktlosen Kurvenzügen und  $2\ell - 2 = 2m$  Teilgebiete des Quadrats.

Ist ferner

$$m = 2,$$

so dürfen wir nach S. 12  $\ell$  auf ungrade Werte beschränken :  $\ell = 2r + 1$ . Wie sich aus der Formel

$$\sin(2r + 1)x \sin 2y \pm \sin 2x \sin(2r + 1)y = 0$$

ergibt, enthält die Knotenlinie für  $\mu = \pm 1$  eine Diagonale. Den Größen  $\ell = 11$ ,  $m = 2$ ,  $\lambda_n = 125$  entspricht für  $\mu = -1$  die Figur 14.

Wesentlich andere Typen ergeben sich, wenn wir weiterhin die Werte  $m$  und  $[\frac{\ell}{m}]$  betrachten und dann  $m$  oder  $[\frac{\ell}{m}]$  festhalten und  $[\frac{\ell}{m}]$  oder  $m$  variieren. Wir zeichnen z. B. die Fälle

- $\ell = 13$ ,  $m = 8$ ,  $[\frac{\ell}{m}] = 1$ ,  $\lambda_n = 233$  (Fig. 15)

$$\sin 13x \sin 8y - \sin 8x \sin 13y = 0.$$

- $\ell = 13$ ,  $m = 5$ ,  $[\frac{\ell}{m}] = 2$ ,  $\lambda_n = 194$  (Fig. 16)

$$\sin 13x \sin 5y + \sin 5x \sin 13y = 0.$$

- $\ell = 15$ ,  $m = 4$ ,  $[\frac{\ell}{m}] = 3$ ,  $\lambda_n = 241$  (Fig. 17)

$$\sin 15x \sin 4y - \sin 4x \sin 15y = 0.$$

- $\ell = 14$ ,  $m = 3$ ,  $[\frac{\ell}{m}] = 4$ ,  $\lambda_n = 205$  (Fig. 18)

$$\sin 14x \sin 3y - \sin 3x \sin 14y = 0.$$

Bei festem  $[\frac{\ell}{m}]$  und veränderlichem  $m$  bleiben die verschiedenen Typen der Knotenlinie in den einzelnen Teilquadraten erhalten, je nachdem sie  $[\frac{\ell}{m}]^2$ ,  $[\frac{\ell}{m}]([\frac{\ell}{m}] + 1)$  oder  $([\frac{\ell}{m}] + 1)^2$  feste Punkte der Knotenlinie enthalten. In den Quadraten mit  $[\frac{\ell}{m}]^2$  bzw.  $([\frac{\ell}{m}] + 1)^2$  festen Punkte zeigt die Knotenlinie ähnlichen Typen wie die von  $\lambda_{[\frac{\ell}{m}]+1,1}$  bzw.  $\lambda_{[\frac{\ell}{m}]+2,1}$ . Aus der Lage der Extremalwerte entsprechender Kurvenpaare für  $|\mu| = 1$



ist ersichtlich, ob die den Doppelpunkte von  $\lambda_{[\frac{\ell}{m}]+1,1}$  bzw.  $\lambda_{[\frac{\ell}{m}]+2,1}$  entsprechenden Doppelpunkte sich noch nicht oder schon für  $|\mu| < 1$  gebildet haben.

### §5. Obere und untere Grenze der Gebietsanzahl.

Wir sahen, daß auf der Kugelfläche die untere Grenze für die Gebietsanzahl bei jedem Eigenwert die festen Werte zwei oder drei besitzt. Beim Quadrat ist es ebenfalls leicht, einen Wert für die untere Grenze der Gebietsanzahl anzugeben. Heißt der Eigenwert

$$\lambda_n = \lambda_{\ell,m} = \ell^2 + m^2, \ell > m,$$

so wird jedes der  $m^2$  Teilquadrate durch die Knotenlinie in mindestens zwei Gebiete zerlegt, und da die Seiten dieser Teilquadrate nicht zur Knotenlinie gehören, ist somit die Gebietszahl

$$A \geq 2m^2 - 2m(m-1) = 2m.$$

Diese untere Grenze  $2m$  der Anzahl der Teilgebiete wird, wie wir oben sahen, bei den Eigenwerten

$$\lambda_n = (2r)^2 + 1,$$

für die der Wert zwei als Gebietszahl immer wieder auftritt, und bei den Eigenwerten

$$\lambda_n = \ell^2 + (\ell-1)^2, m = \ell-1$$

erreicht. Aus diesem Gesetz folgt, daß die Anzahl der Teilgebiete  $\rightarrow +\infty$  strebt wenn beide Indizes  $\ell, m \rightarrow +\infty$  wachsen; konvergiert nur der Index  $\ell \rightarrow +\infty$ , so gilt dies nicht, wofür die Knotenlinie von  $\lambda_{2r,1}$ ,  $r = 1, 2, \dots$  ein Beispiel bilden.

Nicht ganz so einfach ist eine obere Grenze der Gebietszahl als Funktion des Eigenwerts beim Quadrat anzugeben. Bei den einfachen Eigenwerten

$$\lambda_n = 2\ell^2,$$

bzw. bei den zweifachen Eigenwerten

$$\lambda_n = \ell^2 + (\ell-1)^2, m = \ell-1$$

für die Eigenfunktionen  $u_{\ell,\ell-1}$  oder  $u_{\ell-1,\ell}$  zerfällt das Quadrat in  $\ell^2$  Teilquadrate bzw. in  $\ell(\ell-1)$  Rechtecke d. h. in  $\left[\frac{\ell^2+m^2}{2}\right]$  Gebiete. Die obere Grenze  $G$  für die Anzahl der Teilgebiete ist also

$$G \geq \left\lceil \frac{\ell^2 + m^2}{2} \right\rceil.$$

Derselbe Wert der oberen Grenze gilt für die durch die Knotenlinien der Funktionen  $u_{\ell,m}$  oder  $u_{m,\ell}$  bewirkte Zerlegung des Quadrats, bei der das Quadrat in  $\ell \cdot m$  Teilgebiete zerfällt,

$$\ell \cdot m \leq \left\lceil \frac{\ell^2 + m^2}{2} \right\rceil$$

ist. Es läßt sich nachweisen, daß dieser Wert allgemein die obere Grenze für die Anzahl der zum Eigenwert  $\ell^2 + m^2$  gehörigen möglichen Teilgebiete des Quadrats darstellt :

$$G = \left\lceil \frac{\ell^2 + m^2}{2} \right\rceil ;$$

doch soll hier nur die Methode angegeben nicht der Beweis in allen Einzelheiten dargestellt werden.

Um die zu den Eigenfunktionen  $u_{\ell,m} + \mu u_{m,\ell}$  für alle Werte  $0 \leq |\mu| \leq 1$  gehörigen Knotenlinien berücksichtigen zu können, müssen wir die für diese Werte  $\mu$  auftretenden Doppelpunkte kennen. Die größte Gebietszahl ergibt sich in dem irrealen Fall, daß alle diese Doppelpunkte gleichzeitig auftreten; wir erhalten so eine obere Schranke. Es folgt leicht, daß der Ausdruck

$$\frac{[\frac{\ell}{m}]^2}{4} + \frac{[\frac{\ell}{m}]}{2} + \frac{9}{4}$$

im allgemeinen das Maximum der Anzahl der in den  $m^2$  Teilquadraten auftretenden Gebiete ist, und hieraus ergibt sich bei Berücksichtigung der Zusammenhangverhältnisse – falls mehrfach zusammenhängende Gebiete auftreten, sind nicht immer alle Seiten der Quadrattteilung zu subtrahieren –, daß für  $[\frac{\ell}{m}] \geq 3$  die Gebietsanzahl,

$$A \leq \left\lceil \frac{\ell^2 + m^2}{2} \right\rceil$$

ist. Die Fälle  $[\frac{\ell}{m}] = 1, 2$  liefern bei getrennter Untersuchung das gleiche Resultat.

Da für das Quadrat der Seitenlänge  $\pi$  asymptotisch

$$\lambda_n \sim \frac{4}{\pi}n + \vartheta c \sqrt{n}, \quad c = Const., \quad -1 < \vartheta < 1,$$

also

$$\left\lceil \frac{\ell^2 + m^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda_n}{2} \right\rceil \sim \frac{2}{\pi}n + \theta' c \sqrt{n}$$

gilt, ist für große zweifache Eigenwerte die obere Grenze der Gebietszahl sicher  $< n$ ; für große zweifache Eigenwerte ist der Sturmische Werte  $n$  somit ausgeschlossen.

Auf der Kugelfläche kann bei der jetzigen Kenntnis der Kugelfunktionen die obere Grenze der Gebietszahl als Funktion des betreffenden Eigenwerts nicht festgestellt werden; hierzu müßten genaue Sätze über die Lage der Nullstellen von  $P_{\ell,m}$ ,  $\ell > m$ ,  $\ell, m = 1, 2, \dots$  bekannt sein. Der dem Quadrat entsprechende Wert

$$\left[ \frac{\ell^2 + \ell}{2} \right] = \left[ \frac{\lambda_n}{2} \right]$$

ist jedenfalls nicht gültig, da die Knotenlinie der Kugelfunktion  $P_{2r+1,r+1}(\cos \vartheta) \cos(r+1)\varphi$  ( $\lambda_n = (2r+1)(2r+2)$ ) die Kugelfläche in

$$\left[ \frac{\ell^2 + 2\ell + 1}{2} \right] = \left[ \frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n + 1}}{2} \right]$$

Gebiete teilt; die obere Grenze ist also mindestens gleich diesem Wert. Der asymptotische Wert dieses Ausdrucks als Funktion des Stellenzeichens  $n$  des Eigenwerts  $\lambda_n$  ist auf der Kugel

$$\left[ \frac{\ell^2 + 2\ell + 1}{2} \right] = \left[ \frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n + 1}}{2} \right] \sim \frac{n}{2} + \vartheta'' \sqrt{n} \quad 0 < \vartheta'' < 1;$$

der Wert  $\frac{2}{\pi}n + \vartheta' c\sqrt{n}$  beim Quadrat ist also größer. Ob dieser asymptotische Wert der oberen Grenze der Gebietsanzahl auf der Kugelfläche bestehen bleibt, kann vorläufig nicht festgestellt werden.

## §6. Unmöglichkeit eines asymptotischen Gesetzes der Gebietsanzahl.

Daß kein streng gültiges Gesetz für die Abhängigkeit der Gebietszahl vom Stellenzeichen des Eigenwerts besteht, ist nach den obigen Ausführungen ersichtlich; doch liegt es nahe, nach einem asymptotischen Gesetz für die Gebietsanzahl zu suchen.

Da es hier wesentlich auf die Größenordnung der Abhängigkeit ankommt, so ergibt sich der einfache Nachweis, daß auf der Kugelfläche bei allen Eigenwerten Gebietszahlen ganz verschiedener Größenordnungen auftreten, die Unmöglichkeit eines asymptotischen Gesetzes für die Gebietsanzahl. Die große Regellosigkeit, die der Verlauf der Knotenlinien auf der Kugelfläche zeigt, hat ihren Grund darin, daß die Vielfachheit der Eigenwerte  $\lambda_n$  mit  $\lambda_n$  wie  $2[\sqrt{\lambda_n}] + 1$  ins Unendliche wächst. Daß die Zahlen zwei oder drei bei jedem Eigenwert als Gebietszahlen vorkommen, haben wir S. 7, 8 gesehen, doch gibt es auch immer Gebietszahlen der Größenordnungen

$$\ell = [\sqrt{\lambda_n}] \sim \sqrt{n}$$

und

$$\ell^2 \sim \lambda_n \sim n.$$

Beispiele hierfür bieten die Nulliniensysteme von

$$\left. \begin{array}{l} P_\ell(\cos \vartheta) \text{ mit } \ell + 1 = [\sqrt{\lambda_n}] + 1 \text{ Gebieten und} \\ P_{\ell, \ell}(\cos \vartheta) \cos \ell \varphi \text{ mit } 2\ell = 2[\sqrt{\lambda_n}] \text{ Gebieten} \end{array} \right\} \lambda_n = \ell(\ell + 1)$$

sowie von zahlreichen linearen Kombinationen wie z. B.

$$(19) \quad P_{2r+1,1}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2r}\right) + \mu P_{2r+1,2r}(\cos \vartheta) \cos 2r\varphi, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

für hinreichend kleine  $\mu$  mit der Gebietszahl  $\ell + 1 = [\sqrt{\lambda_n}] + 1$  (Fig. 19),

$$(20) \quad P_{4r,4r-1}(\cos \vartheta) \cos(4r - 1)\varphi + \mu P_{4r}(\cos \vartheta)$$

mit der Gebietszahl  $2\ell + 1 = 2[\sqrt{\lambda_n}] + 1$  (Fig. 20),

$$(21) \quad P_{2r,2r}(\cos \vartheta) \cos(2r)\varphi + \mu P_{2r}(\cos \vartheta)$$

mit der Gebietszahl  $\ell + 1 = [\sqrt{\lambda_n}] + 1$  (Fig. 21), und

$$(22) \quad P_{2r+1,r}(\cos \vartheta) \cos r\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{r+1}\right) + \mu P_{2r+1,r+1}(\cos \vartheta) \cos(r+1)\varphi,$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

für hinreichende kleine  $\mu$ . Da sich die Nullstellen dieser beiden Funktionen  $P_{2r+1,r}$  und  $P_{2r+1,r+1}$  trennen, erhalten wir die Figur 22 mit der Gebietszahl  $\ell + 1 = [\sqrt{\lambda_n}] + 1$ .

Bei der Kugelfunktion

$$(23) \quad P_{2r,2r-1}(\cos \vartheta) \cos(2r - 1)\varphi + \mu P_{2r,1}(\cos \vartheta) \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2r-1}\right),$$

$$0 < \varepsilon < 1,$$

ist der Äquator Nulllinie für beide Summanden, daher bildet er auch einen Bestandteil des Knotenliniensystems der Summe. Die Gebietszahl ist für hinreichend kleine  $\mu$ :  $2\ell = 2[\sqrt{\lambda_n}]$  (Fig. 23).

Die Größenordnung  $\lambda_n \sim n$  für die Gebietszahl liefern beispielsweise die Knotenliniensysteme der Funktionen  $P_{2r,r}(\cos \vartheta) \cos r\varphi$  mit  $2r^2 + 4r = \left[\frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n}}{2}\right]$  Gebieten und  $P_{2r+1,r+1}(\cos \vartheta) \cos(r+1)\varphi$  mit  $2r^2 + 4r + 2 = \left[\frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n + 1}}{2}\right]$  Gebieten.

Beim Quadrat treffen wir die gleiche Erscheinung z. B. bei den Eigenwerten  $(2r)^2 + 1$  mit den Gebietszahlen 2 und  $2r \sim \sqrt{\frac{4}{\pi}n}$  und den Eigenwerten  $\ell^2 + (\ell - 1)^2$  mit den Gebietszahlen  $2(\ell - 1) \sim \sqrt{\frac{8}{\pi}n}$  und  $\ell(\ell - 1) \sim \frac{2}{\pi}n$  an. Die Suche nach einem asymptotischen Gesetz für die Gebietsanzahl ist also gegenstandslos.

### §7. Bemerkung über dreidimensionale Probleme.

Zum Schluß möchte ich zeigen, daß diese Vorkommnisse nicht auf zweidimensionale Eigenwertprobleme beschränkt sind.

Betrachten wir z. B. die Gleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$ :

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0$$

für den Würfel von Kantenlänge  $\pi$  bei der Randbedingung  $u = 0$ , so sind die zugehörige Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{\ell, m, p} = \ell^2 + m^2 + p^2; \ell, m, p = 1, 2, \dots,$$

die Eigenfunktionen

$$u_n = u_{\ell, m, p} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}} \sin \ell x \sin m y \sin p z,$$

sowie alle geeignet normierten linearen Kombinationen der durch Vertauschung von  $\ell, m, p$  entstehenden Funktionen.

Die Knotenflächen der Eigenfunktionen

$$u_{2r, 1, 1} + \mu u_{1, 2r, 1}$$

sind die Zylinder parallel zur  $z$ -Achse durch die S. 11 betrachteten Knotenlinien des Quadrats. Auch hier kommt also die Gebietszahl zwei immer wieder vor.

Der Übergang von Kugelfläche zur Vollkugel bzw. zum Gesamtraum führt auf die Potentialgleichung, da jede Lösung von  $\Delta u + \lambda y = 0$  für die Kugelfläche, d.h. von

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell + 1)u = 0$$

mit  $r^\ell$  multipliziert eine Lösung der Gleichung

$$\Delta u = 0$$

für den Raum, also ein räumliches Potential ergibt. Wir erhalten daher die Nullflächen dieses Potentials, indem wir durch die Knotenlinien auf der Kugelfläche die Kegel mit Spitze im Kugelmittelpunkt legen. Es gibt demnach Potentiale, und zwar ganze homogene Funktionen von  $x, y, z$  beliebig hoher ungrader bzw. grader Ordnung, deren Nullflächen den Raum in zwei bzw. drei Gebiete zerlegen, und alle Zahlen  $\equiv 0, 2, 3$  (4) wiederholen sich als Gebietszahlen bei wachsender Ordnung des Potentials unendlich oft.

## II. Eine asymptotische Eigenschaft der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der Randbedingung.

[...]

### Lebenslauf.

Ich, Antonie Stern, Tochter des Bankiers Siegfried Stern und seiner Frau Bertha geb. Bendix, bin am 7. Oktober 1892 in Dortmund geboren. Von Ostern 1899 – 1902 besuchte ich die private Vorbereitungsschule von Fräulein Antonie Siedhoff, von Ostern 1902 – 1908 die städtische höhere Mädchenschule zu Dortmund. Ostern 1908 trat ich in die Obersekunda der realgymnasialen Kurse für Mädchen in Bonn, jetzt Studienanstalt, ein und bestand Ostern 1911 am städtischen Realgymnasium in Bonn die Reifeprüfung.

Ostern 1912 bezog ich die Universität Bonn, wo ich Vorlesungen über Mathematik und Physik hörte; Ostern 1913 wurde ich an der Universität Göttingen immatrikuliert, an der ich mich auch dem Studium der Chemie zuwandte. Hier legte ich im Juli 1918 die Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik, Physik und Chemie für die erste Stufe ab. Dann studierte ich noch mit mehrfacher Unterbrechung in Berlin, Münster und wieder in Göttingen.

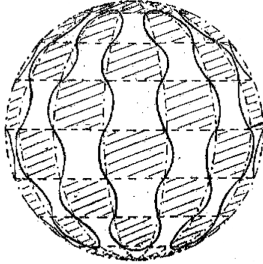
Ich besuchte Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Dozenten:  
in Bonn: Bühler, Hammacher, Hausdorff, Kayser, London, Müller, Strasburger, Study,

in Göttingen: Behrens, Born, Carathéodory, Courant, Debye, Haar, Hartmann, Hecke, Hilbert, Husserl, Klein, Landau, Lietzmann, Mügge, G. E. Müller, Nelson, Riecke, Toeplitz, Voigt, Wallach, Wedekind, Wiechert, Windaus,

in Berlin: Carathéodory, Einstein, Planck, E. Schmidt,

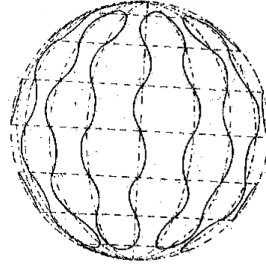
in Münster: Courant, Plaßmann.

Allen meiner Lehrern spreche ich meinen Dank aus; vor allem werde ich Herrn Prof. Carathéodory und Herrn Prof. Courant stets die herzlichste Dankbarkeit bewahren für das freundliche Interesse, das sie mir entgegengebracht haben und die Anleitung, die ich von ihnen empfangen durfte.



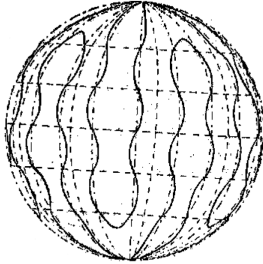
$$P_{7,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + \mu P_7(\cos \vartheta) = 0$$

Figure 1.



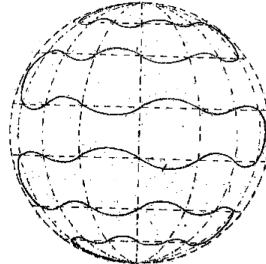
$$P_{8,8}(\cos \vartheta) \cos 8 \varphi + \mu P_{8,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{8} \right) = 0.$$

Figure 2.



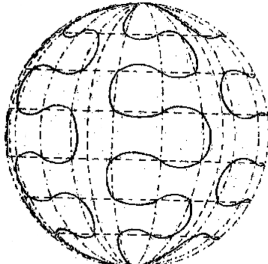
$$P_{10,10}(\cos \vartheta) \cos 10 \varphi + \mu P_{10,6}(\cos \vartheta) \cos 5 \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{10} \right) = 0.$$

Figure 3.



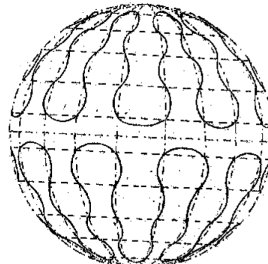
$$\mu P_{7,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + P_{7,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{7} \right) = 0.$$

Figure 4.



$$\mu P_{9,9}(\cos \vartheta) \cos 9 \varphi + P_{9,3}(\cos \vartheta) \cos 3 \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{9} \right) = 0.$$

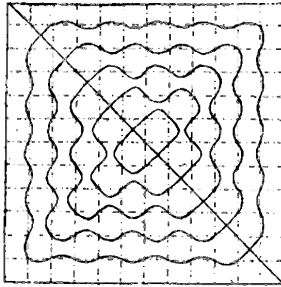
Figure 5.



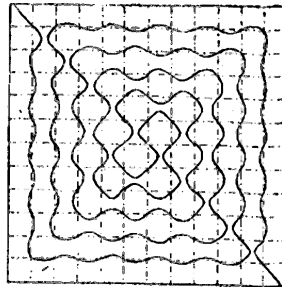
$$\mu P_{10}(\cos \vartheta) + P_{10,9}(\cos \vartheta) \cos 9 \varphi = 0.$$

Figure 6.

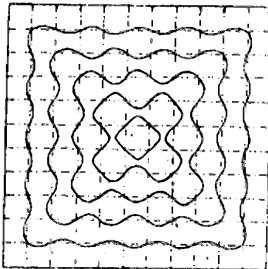
Figure 0.1. Plate reproduced from A. Stern's thesis



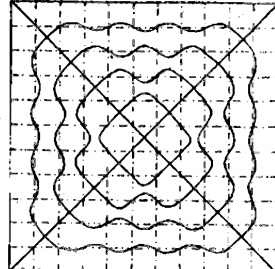
$\sin 12x \sin y + \sin x \sin 12y = 0$ .  
Figur 7.



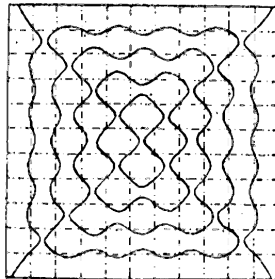
$\sin 12x \sin y - \mu \sin x \sin 12y = 0$ ,  
 $\mu$  hinreichend nahe an 1.  
Figur 8.



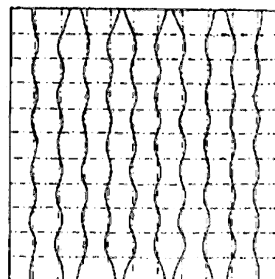
$\sin 11x \sin y + \sin x \sin 11y = 0$ .  
Figur 9.



$\sin 11x \sin y - \sin x \sin 11y = 0$ .  
Figur 10.



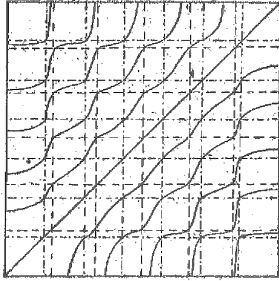
$\sin 11x \sin y - \mu \sin x \sin 11y = 0$ ,  
 $\mu$  hinreichend nahe an 1.  
Figur 11.



$\sin 11x \sin y - \mu \sin x \sin 11y = 0$ ,  
 $\mu > 0$  hinreichend nahe an 0.  
Figur 12.

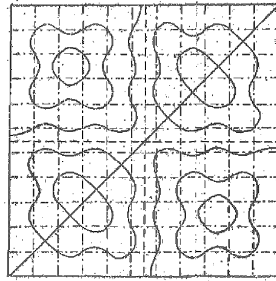
Figure 0.2. Plate reproduced from A. Stern's thesis





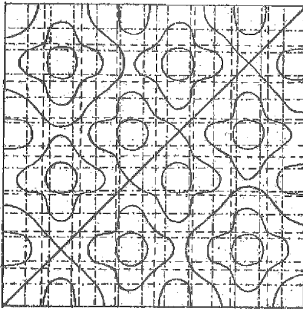
$$\sin 7x \sin 6y - \sin 6x \sin 7y = 0.$$

Figur 13.



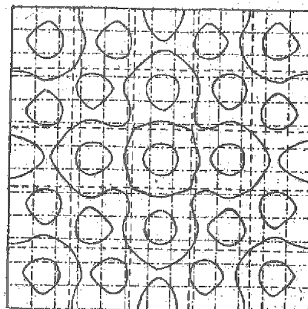
$$\sin 11x \sin 2y - \sin 2x \sin 11y = 0.$$

Figur 14.



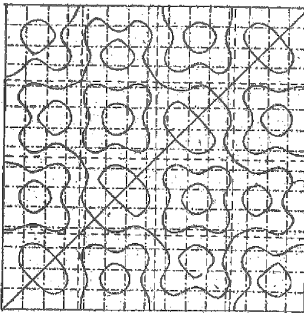
$$\sin 13x \sin 8y - \sin 8x \sin 13y = 0.$$

Figur 15.



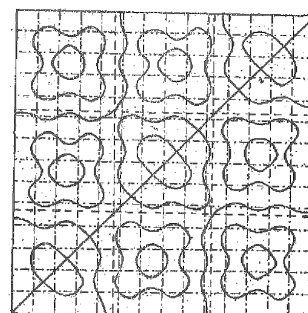
$$\sin 13x \sin 5y + \sin 5x \sin 13y = 0.$$

Figur 16.



$$\sin 15x \sin 4y - \sin 4x \sin 15y = 0.$$

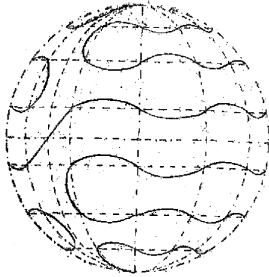
Figur 17.



$$\sin 14x \sin 3y - \sin 3x \sin 14y = 0.$$

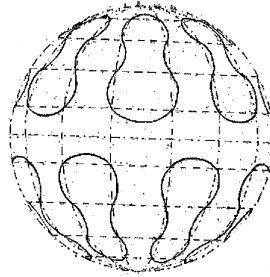
Figur 18.

Figure 0.3. Plate reproduced from A. Stern's thesis



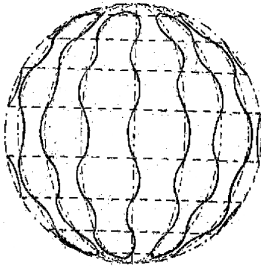
$$P_{7,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{6} \right) + \mu P_{7,6}(\cos \vartheta) \cos 6 \varphi = 0.$$

Figure 19.



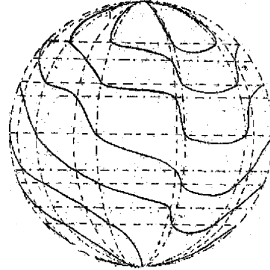
$$P_{8,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + \mu P_8(\cos \vartheta) = 0.$$

Figure 20.



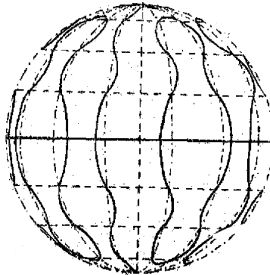
$$P_{8,8}(\cos \vartheta) \cos 8 \varphi + \mu P_8(\cos \vartheta) = 0.$$

Figure 21.



$$P_{5,4}(\cos \vartheta) \cos 4 \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{5} \right) + \mu P_{5,5}(\cos \vartheta) \cos 5 \varphi = 0.$$

Figure 22.



$$P_{8,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + \mu P_{8,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{\varepsilon \pi}{7} \right) = 0.$$

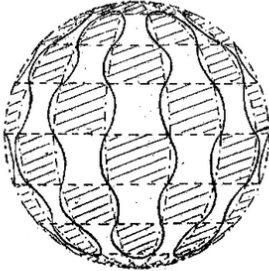
Figure 23.

Figure 0.4. Plate reproduced from A. Stern's thesis

## Appendix A. Other pictures

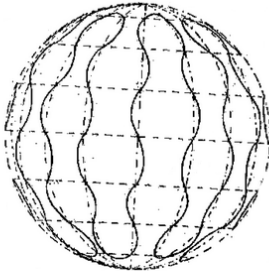
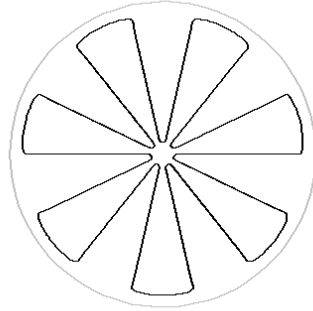
Note that, in the pictures produced with Maple, the nodal sets of spherical harmonics are viewed through the exponential map at the north pole.

The pictures on the left side of Figure A.1 are reproduced from Stern's thesis. The pictures on the right side display the nodal sets of the same spherical harmonics, computed with Maple.



$$P_{7,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + \mu P_7(\cos \vartheta) = 0.$$

Figure 1.



$$P_{8,8}(\cos \vartheta) \cos 8 \varphi + \mu P_{8,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{8\pi}{8} \right) = 0.$$

Figure 2.

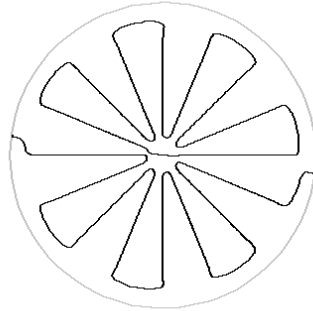


Figure A.1. Maple simulation for Stern's examples (1) and (2)

The pictures in Figure A.2 compare the nodal sets of the spherical harmonic in examples (1) and (2), for both even and odd degrees  $n$ . In the captions,  $e$  stands for  $\varepsilon$ .

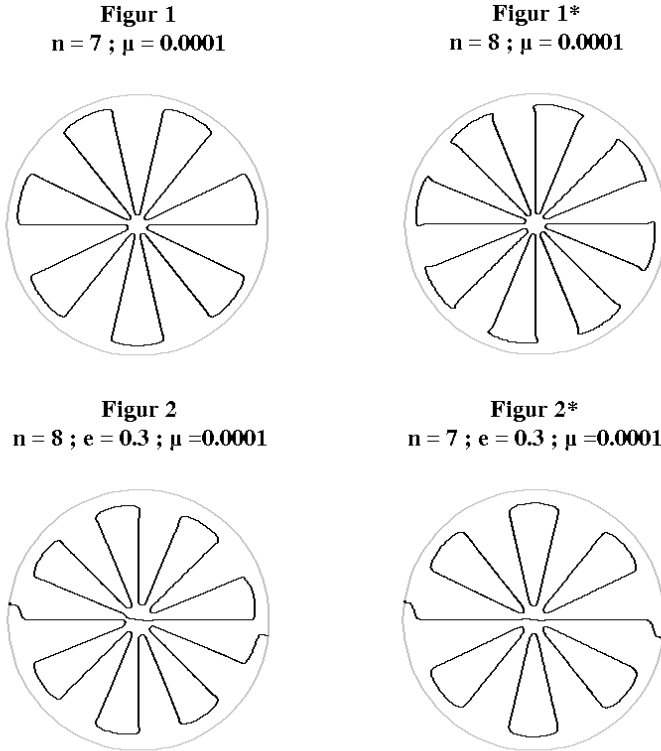


Figure A.2. Examples (1) and (2), simulations for  $n$  even and odd

The pictures on the left side of Figure A.3 are reproduced from Stern's thesis. The pictures on the right side display the nodal sets of the same spherical harmonics, computed with Maple. As the degree increases, the resolution is not always sufficient to see that double points actually disappear, this is clearly the case for the picture on the right in the bottom row.

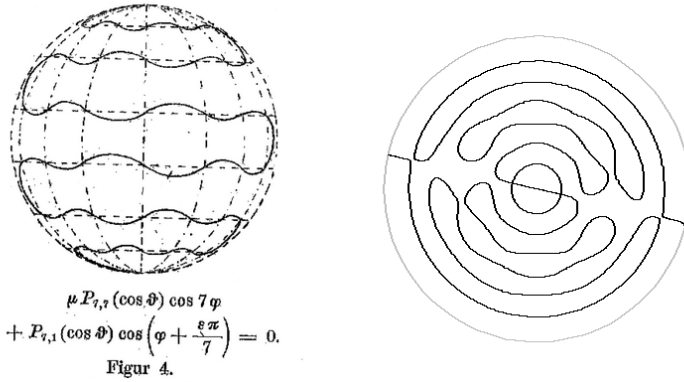
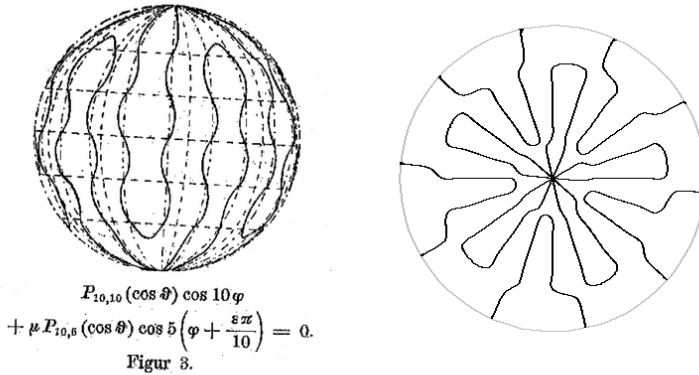
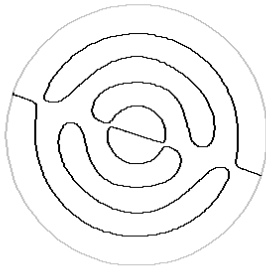


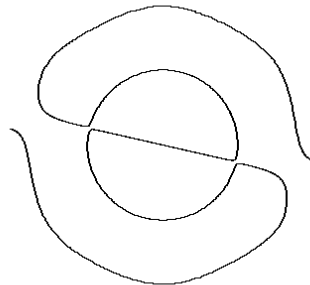
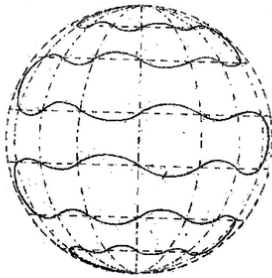
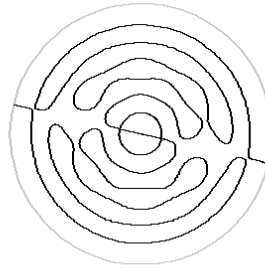
Figure A.3. Simulations for Examples (3) and (4)

Figure A.4 displays Stern's Figure 4 ( $n = 7$ ), and Maple simulations for  $n = 5$  and 7. The disappearance of double points is clear when  $n = 5$ , not so clear in the full picture when  $n = 7$ , but visible in the zoom near the origin in the bottom row (in the captions,  $e$  stands for  $\varepsilon$ ).

**Figur 4**  
 $n = 5 ; e = 0.5 ; \mu = 0.3$



**Figur 4**  
 $n = 7 ; e = 0.5 ; \mu = 0.8$



$$\mu P_{7,7}(\cos \vartheta) \cos 7 \varphi + P_{7,1}(\cos \vartheta) \cos \left( \varphi + \frac{e \pi}{7} \right) = 0.$$

Figur 4.

Figure A.4. Simulations for Example (4)

Figure A.5 displays a nodal set for Example (5): Stern's picture and Maple simulation. The zoom near the origin, on the right hand side, exhibits the disappearance of double points.

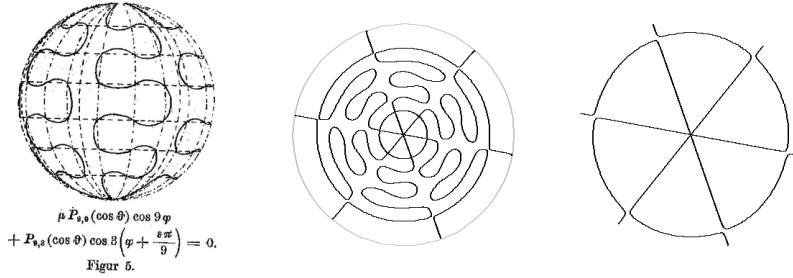
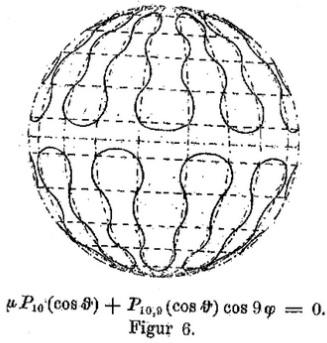
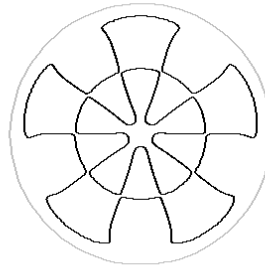


Figure A.5. Example (5), Stern's picture and Maple simulations

Figure A.6 displays nodal sets for Example (6): Stern's picture ( $n = 10$ ) and Maple simulations ( $n = 6$  and  $n = 10$ ). The zoom turns more visible the disappearance of double point near the point  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{9})$  in the case  $n = 10$ .



**Figur 6**  
 $n = 6 ; \mu = 100$



**Figur 6**  
 $n = 10 ; \mu = 1000000$

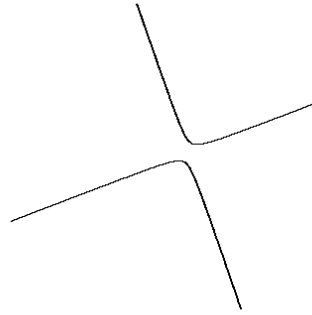
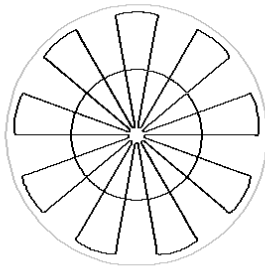


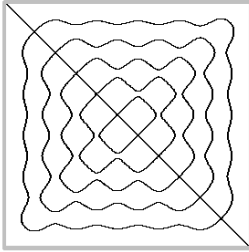
Figure A.6. Example (6): Stern's picture and Maple simulations



The following figures reproduce Stern's pictures for the square, using Maple simulations.

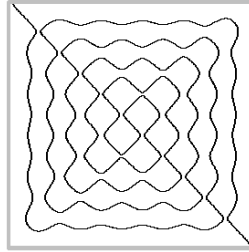
$$\sin(12x) \sin(y) + \sin(x) \sin(12y)$$

Figur 7



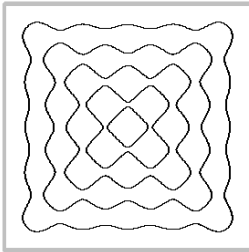
$$\sin(12x) \sin(y) + .95 \sin(x) \sin(12y)$$

Figur 8



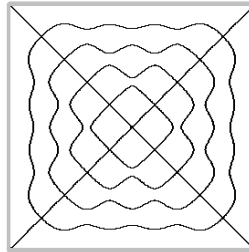
$$\sin(11x) \sin(y) + \sin(x) \sin(11y)$$

Figur 9



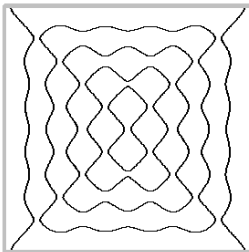
$$\sin(11x) \sin(y) - \sin(x) \sin(11y)$$

Figur 10



$$\sin(11x) \sin(y) - .9 \sin(x) \sin(11y)$$

Figur 11



$$\sin(11x) \sin(y) - .05 \sin(x) \sin(11y)$$

Figur 12

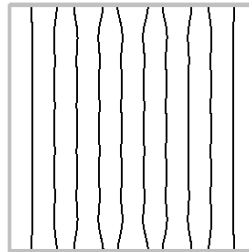
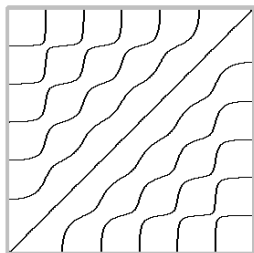


Figure A.7. Nodal sets for the square: Maple simulations

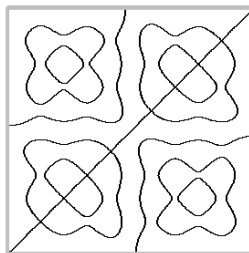
$$\sin(7x) \sin(6y) - \sin(6x) \sin(7y)$$

Figur 13



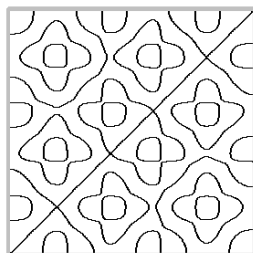
$$\sin(11x) \sin(2y) - \sin(2x) \sin(11y)$$

Figur 14



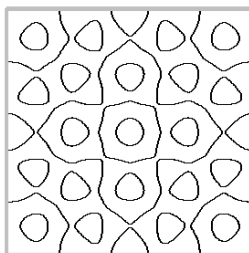
$$\sin(13x) \sin(8y) - \sin(8x) \sin(13y)$$

Figur 15



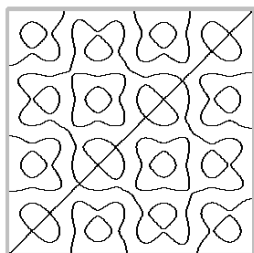
$$\sin(13x) \sin(5y) + \sin(5x) \sin(13y)$$

Figur 16



$$\sin(15x) \sin(4y) - \sin(4x) \sin(15y)$$

Figur 17



$$\sin(14x) \sin(3y) - \sin(3x) \sin(14y)$$

Figur 18

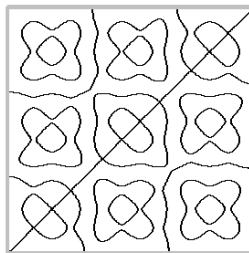


Figure A.8. Nodal sets for the square: Maple simulations

## BIBLIOGRAPHY

- [1] P. BÉRARD & B. HELFFER, “Nodal sets of eigenfunctions, Antonie Stern’s results revisited”, in *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, vol. 32, Institut Fourier, Grenoble, 2014-2015.

- [2] ———, “Dirichlet eigenfunctions of the square membrane: Courant’s property, and A. Stern’s and Á. Pleijel’s analyses”, in *Analysis and Geometry. MIMS-GGTM, Tunis, Tunisia, March 2014. In Honour of Mohammed Salah Baouendi* (A. Baklouti, A. El Kacimi, S. Kallel & N. Mir, eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 127, Springer International Publishing, 2015, p. 69-114.
- [3] ———, “A. Stern’s analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited”, *Monatshefte für Mathematik* **180** (2016), p. 435-468.
- [4] A. STERN, “Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen”, PhD Thesis, Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), Göttingen, Germany, 1925.
- [5] A. VOGT, *Wissenschaftlerinnen in Kaiser-Wilhelm-Instituten. A-Z*, 2nd ed., Veröffentlichungen aus dem Archiv der Max-Planck-Gesellschaft, vol. 12, Archiv der Max-Planck-Gesellschaft, 2008.

Pierre BÉRARD  
Institut Fourier,  
Université Grenoble Alpes, B.P.74,  
38402 Saint-Martin-d’Hères Cedex (France)

Bernard HELFFER  
Laboratoire de Mathématiques,  
Univ. Paris-Sud 11 and CNRS,  
91405 Orsay Cedex (France)  
*and*  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray,  
Université de Nantes,  
44322 Nantes (France)