

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Hélène EYNARD-BONTEMPS

**Centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite**

Volume 27 (2008-2009), p. 117-129.

<[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2008-2009\\_\\_27\\_\\_117\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2008-2009__27__117_0)>

© Institut Fourier, 2008-2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## CENTRALISATEURS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA DEMI-DROITE

Hélène Eynard-Bontemps

RÉSUMÉ. — Soit  $f$  un difféomorphisme lisse de  $\mathbb{R}_+$  fixant seulement l'origine, et  $\mathcal{Z}^r$  son centralisateur dans le groupe des difféomorphismes  $\mathcal{C}^r$ . Des résultats classiques de Kopell et Szekeres montrent que  $\mathcal{Z}^1$  est toujours un groupe à un paramètre. En revanche, Sergeraert a construit un  $f$  dont le centralisateur  $\mathcal{Z}^\infty$  est réduit au groupe des itérés de  $f$ . On présente ici le résultat principal de [3] :  $\mathcal{Z}^\infty$  peut en fait être un sous-groupe propre et non-dénombrable (donc dense) de  $\mathcal{Z}^1$ .

ABSTRACT. — Let  $f$  be a smooth diffeomorphism of the half-line fixing only the origin and  $\mathcal{Z}^r$  its centralizer in the group of  $\mathcal{C}^r$  diffeomorphisms. According to well-known results of Szekeres and Kopell,  $\mathcal{Z}^1$  is a one-parameter group. On the other hand, Sergeraert constructed an  $f$  whose centralizer  $\mathcal{Z}^\infty$  reduces to the infinite cyclic group generated by  $f$ . We present here the main result of [3]:  $\mathcal{Z}^\infty$  can actually be a proper and uncountable (hence dense) subgroup of  $\mathcal{Z}^1$ .

### 1. Introduction

Soit  $f$  un difféomorphisme lisse de  $\mathbb{R}_+$  ayant pour seul point fixe 0. Le but de cet exposé est de comprendre à quoi peut ressembler l'ensemble des difféomorphismes lisses de  $\mathbb{R}_+$  qui commutent avec  $f$ . C'est une question qui apparaît de façon naturelle (comme sous-question) lorsqu'on s'intéresse aux actions lisses de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $[0, 1]$  ou sur le cercle (préservant l'orientation). Il s'avère judicieux de commencer par regarder le centralisateur  $\mathcal{C}^1$  de  $f$ , que la théorie classique décrit complètement.

On note  $\mathcal{D}^r$ ,  $r \geq 1$  (resp.  $r = 0$ ), le groupe des difféomorphismes  $\mathcal{C}^r$  (resp. des homéomorphismes) de  $\mathbb{R}_+$ , muni de la topologie de la convergence  $\mathcal{C}^r$

---

*Mots-clés* : difféomorphisme de l'intervalle, centralisateur, commutant, nombre de Liouville.

*Classification math.* : 37E05.

sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ , et  $\mathcal{Z}_f^r$  le centralisateur de  $f$  dans  $\mathcal{D}^r$ , muni de la topologie induite :

$$\mathcal{Z}_f^r = \{g \in \mathcal{D}^r \mid g \circ f = f \circ g\} \subset \mathcal{D}^r.$$

### 1.1. Centralisateur $\mathcal{C}^0$

En guise d'échauffement, commençons par décrire  $\mathcal{Z}_f^0$ . On suppose dorénavant, pour fixer les idées, que  $f(x) < x$  pour tout  $x > 0$ . Soit  $g \in \mathcal{Z}_f^0$  et  $x = g(1)$ . Comme  $g$  commute avec  $f$ ,

$$g(f(1)) = f(g(1)) = f(x),$$

donc  $g$  induit un homéomorphisme entre les domaines fondamentaux  $[f(1), 1]$  et  $[f(x), x]$ . Réciproquement, soit  $x > 0$  et  $g$  un homéomorphisme quelconque de  $[f(1), 1]$  dans  $[f(x), x]$  préservant l'orientation. Il existe un unique  $\tilde{g} \in \mathcal{Z}_f^0$  induisant  $g$  sur  $[f(1), 1]$ ; c'est l'homéomorphisme défini par :

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{g}|_{[f^{n+1}(1), f^n(1)]} = f^n \circ g \circ f^{-n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

(ces relations déterminent complètement  $\tilde{g}$ , les intervalles  $]f^{n+1}(1), f^n(1)[$  constituant une partition de  $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$ , et on vérifie facilement que  $\tilde{g}$  est bien un homéomorphisme). On exhibe alors aisément un homéomorphisme (non canonique) entre  $\mathcal{Z}_f^0$  et  $\mathbb{R} \times \text{Homeo}(J)$ , pour un segment  $J$  quelconque. Il existe ainsi une description générale des centralisateurs  $\mathcal{Z}_f^0$ , valable pour tout  $f \in \mathcal{D}^\infty$  fixant seulement 0. On va voir que c'est aussi le cas pour  $\mathcal{Z}_f^1$ .

*Remarque.* — On ne s'est servi nulle part de la régularité de  $f$  dans ce paragraphe. Elle aura en revanche de l'importance dans le paragraphe suivant.

### 1.2. Centralisateur $\mathcal{C}^1$

Un point remarquable dans l'étude de ces objets est le gouffre qui sépare les régularités  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1$  : le centralisateur  $\mathcal{C}^1$  de  $f$  est beaucoup plus petit que son centralisateur  $\mathcal{C}^0$ , c'est (toujours) un groupe à un paramètre de difféomorphismes  $\mathcal{C}^1$ . Ce fait découle des deux théorèmes suivants. Outre les références originales [9, 6], on peut consulter [7] et [11] par exemple, pour des preuves détaillées (et bien plus).

**THÉORÈME** (Szekeres [9]). — *Tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{D}^r$ ,  $r \geq 2$ , ayant 0 pour seul point fixe est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathcal{C}^{r-1}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .*

THÉORÈME (Lemme de Kopell [6]). — Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de  $\mathbb{R}_+$  qui commutent, de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\mathcal{C}^1$  respectivement. Si  $f$  n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{R}_+^*$  et si  $g$  en a au moins un, alors  $g = \text{id}$ .

Remarque. — Ces énoncés (et leur corollaire) sont faux si l'on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  seulement.

COROLLAIRE. — Soit  $f \in \mathcal{D}^r$ ,  $r \geq 2$ , fixant seulement 0. Il existe un unique champ de vecteurs  $\nu_f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  dont  $f$  soit le flot au temps 1. On l'appellera champ de Szekeres de  $f$ . Le centralisateur  $\mathcal{Z}_f^1$  est réduit au flot de ce champ de vecteurs et est donc un groupe à un paramètre de difféomorphismes  $\mathcal{C}^1$ .

Arrêtons-nous un instant sur ce phénomène. Dans le cas  $\mathcal{C}^0$  traité au paragraphe précédent, le fait que le domaine de  $f$  soit fermé en 0 ne jouait aucun rôle; il serait revenu au même de décrire le centralisateur  $\mathcal{C}^0$  du difféomorphisme  $f^*$  induit par  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Dans le cas  $\mathcal{C}^1$  au contraire, le point fixe change tout. Pour nous en convaincre, intéressons-nous au centralisateur  $\mathcal{C}^1$  de  $f^*$ . On peut procéder comme dans le paragraphe précédent pour construire une multitude de difféomorphismes  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  qui commutent avec  $f^*$ . Pour tout  $x > 0$  et tout  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $g$  de  $[f(1), 1]$  dans  $[f(x), x]$  préservant l'orientation et satisfaisant  $Dg(f(1)) = Dg(1) \frac{Df(x)}{Df(1)}$  (condition nécessaire évidente pour que  $g$  se prolonge en difféomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  commutant avec  $f^*$ ), on vérifie facilement que l'application  $\tilde{g} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  définie par

$$\tilde{g} |_{[f^{n+1}(1), f^n(1)]} = f^n \circ g \circ f^{-n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

est un difféomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  qui commute avec  $f^*$ . Il se prolonge sans problème en homéomorphisme de  $\mathbb{R}_+$ , mais il n'y a en revanche aucune raison que le prolongement soit  $\mathcal{C}^1$  jusqu'en 0. Et de fait, ce qu'affirme le lemme de Kopell, c'est que pour un  $x > 0$  donné, il y a *au plus un*  $g : [f(1), 1] \rightarrow [f(x), x]$  pour lequel  $\tilde{g}$  se prolonge en difféomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+$ .

Essayons de comprendre ce qui se passe sur un exemple simple : prenons pour  $f$  l'homothétie de rapport  $\alpha < 1$ , et pour  $g$  un difféomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $[f(1), 1] = [\alpha, 1]$  dans lui-même,  $\mathcal{C}^1$ -tangent à l'identité au bord. Dans cette situation,  $\tilde{g}$  est simple à décrire :  $\tilde{g} |_{[\alpha^{n+1}, \alpha^n]}$  est conjugué à  $g$  par l'homothétie de rapport  $\alpha^n$ . L'allure d'un tel  $\tilde{g}$  est esquissée sur la figure 1.1.

En particulier,  $D\tilde{g} \circ f^n = D\tilde{g}$  pour tout  $n$ . Notons encore  $\tilde{g}$  le prolongement de  $\tilde{g}$  en homéomorphisme de  $\mathbb{R}_+$ , et supposons que ce prolongement est  $\mathcal{C}^1$ . La dérivée de  $\tilde{g}$  en 0 est nécessairement 1, puisque 0 est un point

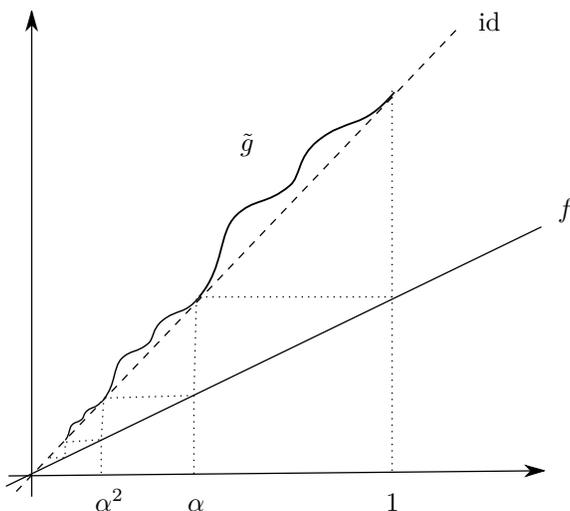


FIGURE 1.1. Homothétie

d'accumulation de points fixes de  $\tilde{g}$ . Mais pour tout  $x > 0$  et pour tout  $n$ ,  $D\tilde{g}(x) = D\tilde{g}(\alpha^n x)$ , donc

$$D\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} D\tilde{g}(\alpha^n x) = D\tilde{g}(0) = 1$$

puisque  $\tilde{g}$  est  $\mathcal{C}^1$ , ce qui signifie que  $\tilde{g}$  est l'identité.

La preuve complète du Lemme de Kopell (que nous venons de démontrer pour les homothéties) demande un peu plus d'efforts, mais le cas particulier ci-dessus permet déjà d'entrevoir la différence entre le problème  $\mathcal{C}^0$  et le problème  $\mathcal{C}^1$ , et de constater qu'elle se concentre au voisinage du point fixe de  $f$ .

Maintenant, comment caractériser les rares  $g$  qui se prolongent en éléments de  $\mathcal{Z}_f^1$ ? Ou, de façon équivalente, à quoi ressemble le fameux champ de Szekeres  $\nu_f$  qui engendre tout le centralisateur  $\mathcal{C}^1$  de  $f$ ? On peut l'exprimer de façon « explicite » :

$$(1.1) \quad \nu_f = \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} (f^k)^* \eta$$

où

$$\eta = (f - \text{id})\partial_x, \quad \lambda = \begin{cases} \frac{\log Df(0)}{Df(0)-1} & \text{si } Df(0) \neq 1 \\ 1 & \text{si } Df(0) = 1 \end{cases}$$

et  $(f^k)^* \eta$  désigne le tiré en arrière du champ de vecteurs  $\eta$  par le  $k$ -ième itéré de  $f$ . Pour un  $f$  dilatant (i.e. tel que  $f(x) > x$  pour tout  $x > 0$ ), il

faut remplacer  $+\infty$  par  $-\infty$  dans l'expression (1.1). La preuve du théorème de Szekeres consiste à montrer que la suite de champs de vecteurs  $(f^k)^*\eta$  converge en topologie  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathcal{C}^{r-1}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En revanche, comme le sous-entend l'énoncé, on ne peut en général pas espérer de convergence plus forte sur  $\mathbb{R}_+$  (ce qui motive le paragraphe suivant).

### 1.3. Centralisateur $\mathcal{C}^\infty$

On veut maintenant décrire  $\mathcal{Z}_f^\infty$  (pour un  $f$  lisse). On peut déjà faire deux remarques élémentaires :

- $\mathcal{Z}_f^\infty$  est inclus dans  $\mathcal{Z}_f^1$  (et constitué des temps du flot de  $\nu_f$  qui sont lisses) ;
- $\mathcal{Z}_f^\infty$  contient tous les itérés de  $f$  et de son inverse.

Et c'est en fait tout ce qu'on peut dire (qui soit vrai pour tout  $f$ ). En effet, les deux cas limites permis par les inclusions :

$$\mathbb{Z} \cong \{f^n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{Z}_f^\infty \subset \mathcal{Z}_f^1 \cong \mathbb{R}$$

peuvent se produire. Si le champ de Szekeres de  $f$  est lisse, alors bien entendu  $\mathcal{Z}_f^\infty = \mathcal{Z}_f^1$ . D'après un résultat de F. Takens [10], c'est notamment le cas si  $f$  n'est pas infiniment tangent à l'identité en 0. D'après F. Sergeraert [8, §3], c'est aussi le cas si  $f$  est infiniment tangent à l'identité en 0 mais n'oscille pas trop au sens où

$$(1.2) \quad \sup_{0 < y \leq x} (y - f(y)) = O(x - f(x)).$$

Mais dans le même article, il construit un difféomorphisme  $f$  dont le centralisateur  $\mathcal{C}^2$  est strictement contenu dans  $\mathcal{Z}_f^1$  (ce qui signifie en particulier que  $\nu_f$  n'est pas  $\mathcal{C}^2$ ), et on peut en fait vérifier que dans son exemple,  $\mathcal{Z}_f^2$  (et a fortiori  $\mathcal{Z}_f^\infty$ ) est réduit au groupe engendré par  $f$ . Autrement dit,  $\nu_f$  est un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  dont seuls les temps entiers du flot sont  $\mathcal{C}^2$  (et en fait lisses). Le coeur de cet exposé va consister à montrer qu'il peut se passer des choses encore plus compliquées :

**THÉORÈME 1.** — *Il existe un difféomorphisme lisse  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  fixant seulement l'origine, dont le centralisateur  $\mathcal{C}^r$ , pour tout  $2 \leq r \leq \infty$ , est un sous-groupe propre et non dénombrable du groupe à un paramètre  $\mathcal{Z}_f^1$ .*

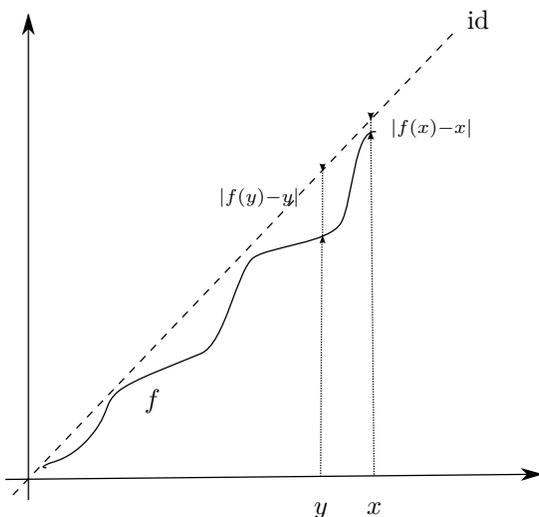
Ce théorème découle de la proposition suivante, en prenant pour  $f$  le temps 1 du champ de vecteurs qu'elle fournit.

PROPOSITION 2. — *Il existe un champ de vecteurs  $\nu$  complet  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annulant qu'en 0 dont le flot  $f^t$  au temps  $t$  n'est pas  $\mathcal{C}^2$  en 0 pour  $t = 1/2$  mais est lisse sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $t \in \mathbb{Z} \oplus \sum_{\tau \in K} \tau\mathbb{Z}$ , où  $K \subset \mathbb{R}$  est un ensemble de Cantor.*

Ce résultat fait l'objet de l'article [3]. Le point clef de la preuve, esquissée dans les deux sections suivantes, est d'interpréter la construction de Sergeraert évoquée précédemment en termes de déformation par conjugaisons successives, ce qui permet de l'enrichir par des techniques de type Anosov–Katok [1] pour obtenir la proposition 2 (on pourra consulter [5] pour une présentation des méthodes « à la Anosov–Katok », et pour d'autres références sur le sujet).

## 2. Construction de Sergeraert

On explique ici comment Sergeraert construit un difféomorphisme lisse  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  sans autre point fixe que 0 dont le centralisateur  $\mathcal{C}^\infty$  est réduit au groupe des itérés de  $f$ . Notons que d'après le théorème de Takens évoqué précédemment et le critère (1.2) de Sergeraert qui le suit, ce  $f$  va nécessairement être infiniment tangent à l'identité en 0, tout en « oscillant » (cf. figure ci-dessous).



Sergeraert part d'un difféomorphisme  $f_0$  qui est le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs lisse  $\nu_0$  « bien choisi » (décrit plus loin). Il lui fait subir

une infinité de « petites » perturbations (explicites) à supports disjoints de plus en plus proches de 0, notées  $\gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , de sorte que

$$f = f_0 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k$$

soit encore un difféomorphisme lisse de  $\mathbb{R}_+$  (il suffit pour cela que la somme converge en topologie  $\mathcal{C}^\infty$  et soit  $\mathcal{C}^1$ -petite par rapport à  $f_0$ ), mais que son champ de Szekeres, lui, ne soit plus lisse. Plus précisément, il fait en sorte que le temps 1/2 du champ ainsi obtenu ne soit pas  $\mathcal{C}^2$ .

*Remarque.* — D’après le théorème de Szekeres, le champ de Szekeres de  $f$  et son flot au temps 1/2 sont lisses sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Leur défaut de régularité se situe en 0.

Il n’est pas évident (même quand on connaît leur expression) de comprendre pourquoi les perturbations  $\gamma_k$  ont cet effet sur le champ de Szekeres de  $f_0$  et sur le temps 1/2 de son flot. Pour mieux voir ce qui se passe, on va traduire la construction de Sergeraert en termes de « déformation par conjugaison ». Pour cela, on oublie ce qui précède, et on reprend la construction depuis le début, dans un langage différent.

On commence avec le même champ de vecteurs lisse  $\nu_0$  (celui de Sergeraert, décrit ci-dessous) et on va cette fois construire le champ  $\nu$  recherché (i.e un champ dont le flot est lisse au temps 1 et pas  $\mathcal{C}^2$  au temps 1/2) comme limite d’une suite de déformations  $\nu_k$ , chaque  $\nu_k$  étant le tiré-en-arrière  $h_k^* \nu_0$  de  $\nu_0$  par un difféomorphisme lisse  $h_k$  de  $\mathbb{R}_+$ . Le flot  $f_k^t$  de  $\nu_k$  est alors relié au flot  $f_0^t$  de  $\nu_0$  par  $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$ . Il s’agit donc de construire les conjugaisons  $h_k$  de sorte que  $f_k^1$  converge en topologie  $\mathcal{C}^\infty$  mais que  $f_k^{1/2}$  ne converge qu’en topologie  $\mathcal{C}^1$  (en particulier les  $h_k$  doivent diverger en topologie  $\mathcal{C}^2$ ). Pour cela, l’allure du champ initial est déterminante : il ne s’annule qu’en 0, est négatif ailleurs, et son graphe a l’allure d’un paysage sous-marin formé d’une alternance de fosses  $L_n$  et de plateaux  $H_n$  dont les altitudes respectives  $-v_n$  et  $-u_n$  (mesurées depuis la surface, de sorte

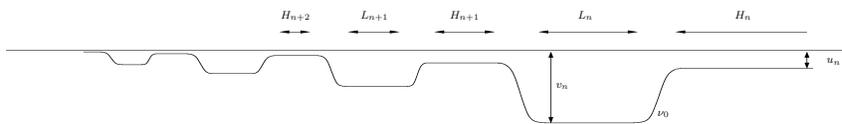


FIGURE 2.1. Allure de  $\nu_0$ .

que  $0 < u_n < v_n$ ), tendent vers 0 très vite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (si bien que  $\nu_0$  est infiniment plat en 0), mais oscillent violemment au sens où les quotients  $v_n/u_n$  tendent vers l'infini (concrètement, dans l'exemple de Sergeraert,  $u_n = 2^{-n^4}$ ,  $v_n = 2^{-n^2}$ , et  $L_n$  est situé entre les abscisses  $2^{-n-1}$  et  $2^{-n}$ , où sont centrés les plateaux  $H_{n+1}$  et  $H_n$  respectivement).

Il découle de ce comportement que si un élément  $f_0^t$  du flot envoie un segment  $S \subset L_n$  (resp.  $H_n$ ) dans la région  $L_n$ , alors sa restriction à  $S$  est la translation  $x \mapsto x - tv_n$  (resp. une application affine de grande pente  $v_n/u_n$ ). C'est une conséquence directe de l'invariance de  $\nu_0$  par son flot :  $\nu_0 \circ f_0^t = \nu_0 \times Df_0^t$ .

Voyons maintenant en quoi ceci va nous aider à construire les conjugaisons  $h_k$  souhaitées. On définit les  $h_k$  inductivement. On construit à l'étape  $k$  un difféomorphisme  $g_k$ , et on définit  $h_k = g_k \circ h_{k-1}$  et  $\nu_k = h_k^* \nu_0 = h_{k-1}^* g_k^* \nu_0$ , si bien que les flots de  $\nu_k$  et  $\nu_{k-1}$  sont donnés respectivement par

$$f_k^t = h_{k-1}^{-1} \circ (g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k) \circ h_{k-1}$$

et

$$f_{k-1}^t = h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}.$$

Intuitivement, ce qu'on veut c'est donc construire  $g_k$  de sorte que  $g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k - f_0^1$  soit très petit en norme  $\mathcal{C}^k$  (disons borné par  $2^{-k}$ ) mais que  $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$  soit grand en norme  $\mathcal{C}^2$  (le domaine  $\mathbb{R}_+$  n'étant pas compact, cela n'a pas de sens de parler de norme  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}_+$  ; mais comme on s'intéresse seulement au voisinage de 0, on peut se limiter à la norme  $\mathcal{C}^k$  sur  $[0, 1]$  par exemple).

Pour remplir la première de ces deux conditions, on va prendre un  $g_k$  qui :

- commute avec  $f_0^1$  partout sauf dans une petite région : un intervalle fondamental  $S_k$  de  $f_0^1$  situé « au milieu de  $L_k$  » (pour  $k$  assez grand, chaque orbite de  $f_0^1$  a beaucoup de points dans  $L_k$ , deux points successifs étant distant de  $v_k \ll 2^{-k-1}$ ) ;
- est  $\mathcal{C}^k$ -proche de l'identité sur cette région.

Plus précisément, on prend  $g_k$  égal à l'identité près de 0 et de la forme  $\text{id} + \gamma_k$  sur  $S_k$ , où  $\gamma_k$  est une fonction  $\mathcal{C}^k$ -petite à support dans  $S_k$ , dont l'allure sera précisée ultérieurement. Ces informations suffisent à déterminer  $g_k$  sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier (cf. Introduction). En particulier,  $g_k$  vaut nécessairement l'identité sur  $[0, \inf S_k]$ . Bien que ce ne soit pas évident à première vue, le résultat de cette étape  $k$  est précisément :

$$f_k^1 = f_{k-1}^1 + \gamma_k,$$

(et on rejoint ici la première version de la construction de Sergeraert). Justifions-le rapidement. Par construction,  $h_{k-1} = g_{k-1} \circ \dots \circ g_1$  vaut l'identité sur  $L_k$  (puisque pour tout  $j \leq k - 1$ , le support de  $g_j$  est inclus dans  $[\inf S_j, +\infty[ \subset [\inf L_{k-1}, +\infty[$ ). Ainsi, sur  $S_k \subset L_k$ ,

$$\begin{aligned}
 f_k^1 - f_{k-1}^1 &= h_{k-1}^{-1} \circ (g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k) \circ h_{k-1} - h_{k-1}^{-1} \circ f_0^1 \circ h_{k-1} \\
 &= g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k - f_0^1 \\
 (2.1) \quad &= \text{id}^{-1} \circ (\text{id} - v_k) \circ (\text{id} + \gamma_k) - (\text{id} - v_k) \\
 &= \gamma_k.
 \end{aligned}$$

Et en dehors de  $S_k$ , l'hypothèse de commutativité signifie que

$$g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k = f_0^1,$$

donc  $f_k^1 = f_{k-1}^1$ . Ainsi, l'étape  $k$  a un effet *local* sur  $f_{k-1}^1$  (localisé dans  $S_k$ ). Pourtant, observons bien que le difféomorphisme  $g_k$  utilisé pour la conjugaison diffère de l'identité bien au-delà de  $S_k$  (cette affirmation clef va devenir claire dans quelques instants).

Voyons maintenant quelle forme donner à  $\gamma_k$  pour que  $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$  soit grand en norme  $\mathcal{C}^2$ . Le choix de Sergeraert est représenté ci-dessous.

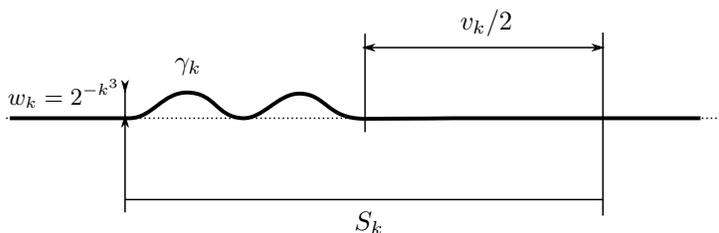


FIGURE 2.2. Allure de  $\gamma_k$

On peut alors visualiser  $g_k$  sur  $L_k$  et  $H_k$ . Sur  $[\sup S_k, \sup L_k]$ ,  $f_0^1$  coïncide avec la translation de  $-v_k$ , donc  $g_k$  commute avec cette translation (cf. figure 2.3).

Plus généralement, pour tout  $p \geq 1$ , si  $S_k^p$  désigne le segment  $f_0^{-p}(S_k)$ ,

$$g_k \mid_{S_k^p} = f_0^{-p} \circ (g_k \mid_{S_k}) \circ f_0^p.$$

Or si  $p$  est tel que  $S_k^p \subset H_k$ , on a vu que la restriction de  $f_0^p$  à  $S_k^p$  était une application affine de la forme

$$x \in S_k^p \mapsto \frac{v_k}{u_k} x + c_k,$$

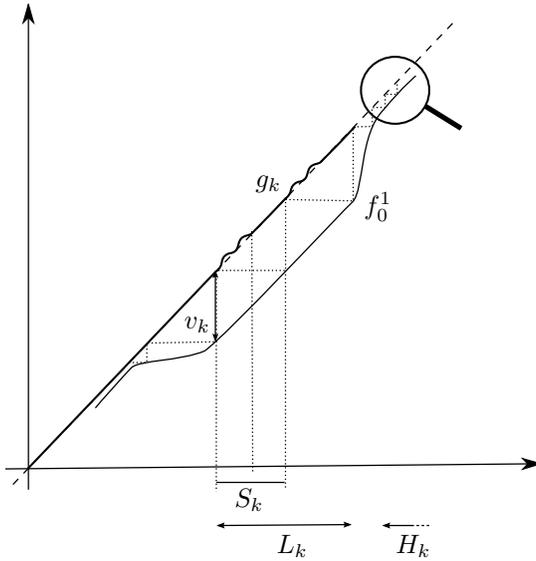


FIGURE 2.3. Allure de  $g_k$  sur  $L_k$ .

où  $c_k$  désigne une constante réelle. Ainsi,  $g_k |_{S_k^p}$  est conjugué à  $g_k |_{S_k}$  par une application affine ayant un très grand coefficient directeur :

$$(2.2) \quad (g_k |_{S_k^p})(x) = \left(\frac{v_k}{u_k}\right)^{-1} (g_k |_{S_k}) \left(\frac{v_k}{u_k} x + c_k\right) - \frac{c_k u_k}{v_k}.$$

L'allure de  $g_k$  sur  $H_k$  est donc celle de la figure 2.4.

Grâce à l'allure particulière (disymétrique) de  $\gamma_k$ , un calcul similaire à (2.1) montre que  $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$  est exactement égal à  $g_k - \text{id}$  sur  $J_k^p$ , intervalle moitié de  $S_k^p$  (méditer la figure 2.4). Or à cet endroit, d'après (2.2) et par définition de  $g_k$  (ou, si l'on préfère, d'après la figure 2.4),

$$D^2(g_k - \text{id}) = \frac{v_k}{u_k} D^2 \gamma_k \circ \left(\frac{v_k}{u_k} \text{id} + c_k\right),$$

Mais les paramètres  $u_k$ ,  $v_k$  et  $w_k$  ont justement été choisis pour que  $\frac{v_k}{u_k} \|\gamma_k\|_2$  diverge avec  $k$ . Ainsi, comme on le souhaitait,  $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$  est grand en norme  $\mathcal{C}^2$ . Il s'agit alors de vérifier que lorsqu'on superpose toutes ces perturbations  $g_k$  (i.e lorsqu'on conjugue par  $h_k = g_k \circ \dots \circ g_1$ ) et qu'on fait tendre  $k$  vers l'infini, on obtient bien l'effet souhaité sur le temps 1/2 du flot du champ limite (cf. [4] pour plus de détails).

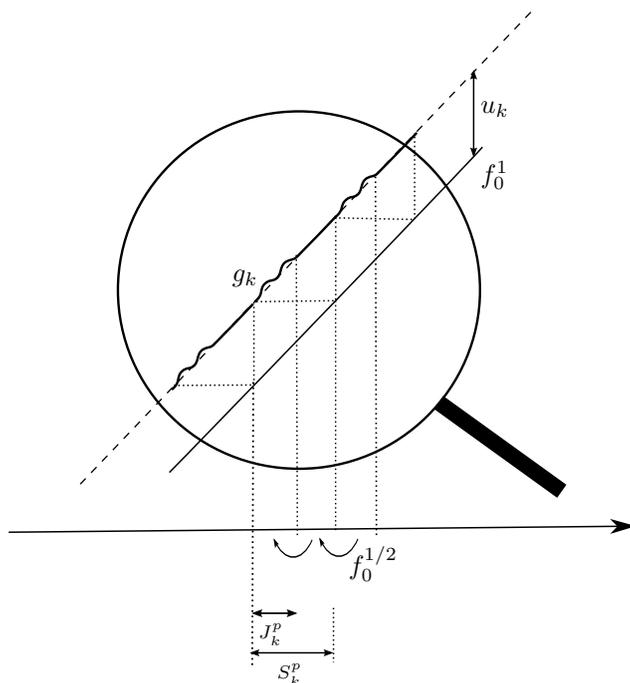


FIGURE 2.4. Allure de  $g_k$  sur  $H_k$ .

### 3. Combinaison avec les méthodes de type Anosov–Katok

On explique maintenant de façon succincte (sans les calculs) comment modifier la construction de Sergeraert pour obtenir la proposition 2. On part du même champ de vecteurs  $\nu_0$ , et on définit là aussi  $\nu$  comme limite de déformations  $\nu_k$ , chaque  $\nu_k$  étant le tiré en arrière  $h_k^* \nu_0$  de  $\nu_0$  par un difféomorphisme lisse  $h_k$  de  $\mathbb{R}_+$ . Là encore, le flot  $f_k^t$  de  $\nu_k$  est relié au flot de  $\nu_0$  par  $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$ . Mais cette fois, on construit les  $h_k$  de sorte que les difféomorphismes  $f_k^t$  convergent en topologie  $\mathcal{C}^\infty$  pour un ensemble dense de  $t$ , et seulement en topologie  $\mathcal{C}^1$  pour le temps  $t = 1/2$ . Pour cela, on construit inductivement les difféomorphismes  $g_k = h_k \circ h_{k-1}^{-1}$  de sorte qu'à l'étape  $k$ ,  $g_k$  commute non plus avec  $f_0^1$ , mais avec  $f_0^{1/q_k}$ , pour un certain entier  $q_k$  impair, en dehors d'un intervalle fondamental  $S_k$  de  $f_0^{1/q_k}$  situé dans la région  $L_{n_k}$ , pour un certain entier  $n_k$ , mais ne commute pas avec  $f_0^{1/2q_k}$ . On prend encore  $g_k = \text{id}$  près de 0 et de la forme  $\text{id} + \gamma_k$  sur  $S_k$  (cette fois, les bosses de  $\gamma_k$  ont pour hauteur  $w_{n_k} = 2^{-n_k^3}$  et la largeur de  $S_k$  est  $v_{n_k}/q_k$ ). On impose que la norme  $\mathcal{C}^k$  de  $g_k - \text{id}$  soit suffisamment

petite sur  $S_k$  pour que les normes  $\mathcal{C}^k$  des applications

$$g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k - f_0^t \quad \text{et} \quad h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k - h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}, \quad t \in \frac{1}{q_k} \mathbb{Z} \cap [0, 1],$$

soient strictement inférieures à  $2^{-k}$  (cette contrainte dicte le choix de  $n_k$ ), et on note  $I_k$  un voisinage compact de  $\frac{1}{q_k} \mathbb{Z} \cap ]0, 1[$  tel que l'inégalité large soit vérifiée pour tout  $t \in I_k$ .

LEMME 3. — *Il existe un choix convenable de paramètres  $q_k$  et  $n_k$  pour lesquels l'intersection des compacts  $I_k$  est un ensemble de Cantor  $K$  constitué de temps  $t$  pour lesquels les difféomorphismes  $h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$ ,  $k \geq 1$ , convergent en topologie  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Il faut en particulier choisir à chaque étape  $q_k$  assez grand pour que  $\frac{1}{q_k} \mathbb{Z}$  rencontre chaque composante connexe de  $I_{k-1}$  en au moins deux points. Une fois ce lemme prouvé, l'irrégularité de la limite des  $f_k^{1/2}$  s'obtient exactement comme dans la construction de Sergeraert.

### Remarque et question

On montre dans [4] que les éléments irrationnels du Cantor  $K$  obtenus par une telle construction sont nécessairement des nombres de Liouville, c'est-à-dire des nombres très bien approchés par des rationnels (par opposition aux nombres diophantiens). En fait, *pour tout* nombre de Liouville  $\tau$ , on peut construire un  $\nu$  comme celui de la proposition 2 dont le Cantor  $K$  contient  $\tau$  (cf. [2]). En revanche, on ne sait pas s'il est possible de construire (par une méthode différente) un champ de vecteurs  $\nu$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  dont les temps 1 et  $\alpha$  du flot soient lisses, pour un  $\alpha$  diophantien, mais dont un autre temps ne soit pas  $\mathcal{C}^2$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. V. Anosov and A. B. Katok, *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **23** (1970), 3–36.
- [2] H. Eynard, *An arithmetic result concerning the centralizer of diffeomorphisms of the half-line*, En préparation.
- [3] ———, *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line*, Prépublication Comm. Math. Helv.
- [4] ———, *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies*, Master's thesis, ENS Lyon, 2009, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/>.

- [5] B. Fayad and A. Katok, *Constructions in elliptic dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), no. 5, 1477–1520.
- [6] N. Kopell, *Commuting diffeomorphisms*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 165–184.
- [7] A. Navas, *Groups of circle diffeomorphisms*, chapter 4, [arxiv:math/0607481](https://arxiv.org/abs/math/0607481).
- [8] F. Sergeraert, *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité*, Invent. Math. **39** (1977), no. 3, 253–275.
- [9] G. Szekeres, *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math. **100** (1958), 203–258.
- [10] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vectorfields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), no. 2, 163–195, Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1972).
- [11] J.-C. Yoccoz, *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*, Astérisque (1995), no. 231, 89–242, Petits diviseurs en dimension 1.

Hélène EYNARD-BONTEMPS  
ENS Lyon  
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées  
46 allée d'Italie  
69364 Lyon cedex 07 (France)  
[heywardb@umpa.ens-lyon.fr](mailto:heywardb@umpa.ens-lyon.fr)