Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Pablo Suárez-Serrato

Atoroïdalité complète et annulation de l'invariant $\bar{\lambda}$ de Perelman

Volume 26 (2007-2008), p. 145-154.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2007-2008__26__145_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 26 (2007-2008) 145-154

ATOROÏDALITÉ COMPLÈTE ET ANNULATION DE L'INVARIANT $\bar{\lambda}$ DE PERELMAN

Pablo Suárez-Serrato

RÉSUMÉ. — On résume les proprietés de l'invariant $\bar{\lambda}$ de Perelman, et en combinaison avec l'invariant de Yamabe on exprime certaines proprietés géométriques des variétés de dimension 3 en fonction de $\bar{\lambda}$. On décrit des exemples d'annulation de $\bar{\lambda}$ en dimension 4, où on trouve des liens entre l'effondrement et l'existence de métriques à courbure scalaire positive. On montre qu'une version d'atoroïdalité qu'on appelle *atoroïdalité complète* est détectée par $\bar{\lambda}$ sur les variétés de courbure négative ou nulle de dimension $\geqslant 3$.

1. Introduction

Soit (V, g) une variété riemannienne lisse, notons pour Ric son tenseur de Ricci. Le système d'équations $\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}\, g(t)$, avec métrique initiale $g = g(0)$ induit un flot sur l'espace de métriques lisses sur V. Il a été introduit par R. Hamilton [8], sous le nom de *flot de Ricci.* L'une de plus profondes contributions de G. Perelman à la compréhension du flot de Ricci a été l'introduction de plusieurs quantités qui évoluent de manière monotone le long du flot. Par exemple, la quantité $\lambda_g \mathrm{Vol}_g^{2/3}$, où λ_g désigne la première valeur propre de l'opérateur $-4\Delta + s_g$. Ici Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami et s_g la courbure scalaire de la métrique g.

L'imagination de Perelman l'a conduit à prendre le supremum de $\lambda_g \mathrm{Vol}_g^{2/3}$ sur toutes les métriques lisses définissent ainsi $\bar{\lambda}$. Il n'est pas clair, au regard de cette définition analytique, de comprendre ce que $\bar{\lambda}$ peut dire des proprietés géométriques. L'objectif de cette note est de montrer qu'en fait $\bar{\lambda}$

Mots-clés : effondrement, courbure scalaire, formes symplectiques, invariantes de Seiberg–Witten, courbure negative ou nulle, invariant de Yamabe invariant, invariant de Perelman.
Classification math. : 53C20, 53C23, 53C44.

exprime numériquement des qualités géométriques précises. En dimension 3 l'invariant $\bar{\lambda}$ de Perelman est capable de détecter soit l'existence d'une métrique de courbure scalaire positive, soit l'existence d'une partie hyperbolique dans la décomposition géometrique ou bien si une telle variété est graphée.

La motivation principale de l'étude de $\bar{\lambda}$ est donnée par :

Théorème 1.1 (Perelman [18] [10]). — *Soit V une variété fermée connexe et orientée de dimension 3.*

a) V admet une métrique g avec $\lambda_g > 0$ si et seulement si V est difféomorphe a une somme connexe finie de $S^1 \times S^2$ et de quotients métriques de la sphère ronde S^3.

b) V est une variété graphée si et seulement si $\bar{\lambda}(V) = 0$.

c) Si $\bar{\lambda}(V) < 0$ et V n'admet aucune métrique lisse g telle que $\lambda_g > 0$, alors il existe une variété N de dimension 3 à courbure constante $-1/4$ qui se plonge dans V. Autrement dit, V contient une partie hyperbolique.

Il est clair que la contribution de $\bar{\lambda}$ à la compréhension du programme de géométrisation de W.T. Thurston [24] est fondamentale.

Les métriques g qui satisfont les équations $\mathrm{Ric} = \mu g$, pour $\mu \in \mathbf{R}$ fixe sont appelées *métriques d'Einstein*. Le flot de Ricci tend vers les métriques d'Einstein, qui sont aussi des points fixes de celui-ci. Une méthode variationnelle a été proposée par Yamabe pour trouver des métriques d'Einstein. Considérons une classe conforme fixe de métriques γ sur la variété fermée V. La *constante de Yamabe* de (V, γ) est par définition,

$$\mathcal{Y}(V,\gamma) = \inf_{g\in\gamma} \frac{\int\limits_V s_g dvol_g}{(\mathrm{Vol}(V,g))^{2/n}}.$$

Nous définissons ensuite *l'invariant de Yamabe*,

$$\mathcal{Y}(V) = \sup_{\gamma} \mathcal{Y}(V,\gamma),$$

où le supremum est pris sur toutes les classes conformes de métriques sur V. Il est bien connu que $\mathcal{Y}(V) > 0$ si et seulement s'il existe sur V une métrique à courbure scalaire positive (*cf.* [23]).

A. Akutagawa, M. Ishida and C. LeBrun [1] ont demontré que le lien entre ces deux invariants est :

$$\bar{\lambda}(M) = \begin{cases} \mathcal{Y}(M) & \text{quand} \quad \mathcal{Y}(M) \leqslant 0 \\ +\infty & \text{quand} \quad \mathcal{Y}(M) > 0. \end{cases}$$

Nous devons rappeller que calculer l'invariant de Yamabe est en général un problème difficile. Un des résultats le plus générale et fondamentale est due à J. Petean [19], qui prouve que pour toute variété compacte simplement connexe de dimension $\geqslant 5$ l'invariant de Yamabe est positif ou nul. De plus, $\mathcal{Y}$ permet de distinguer parmi les structures différentiables possibles sur une variété topologique fixe, (voir [13]).

Il est aussi connu que $\mathcal{Y}(S^n)$ est une borne supérièure pour l'invariant de Yamabe d'une variété lisse et compacte de dimension n quelconque. Rappelons que $\mathcal{Y}(S^n) = n(n+1)\mathrm{Vol}(S^n)^{2/n}$, où le volume est calculé avec la métrique ronde (*cf.* [23]).

Notre premier objectif est de comprendre les cas où l'invariant de Perelman s'annule en dimension 4. Pour cela on utilisera un outil introduit par M. Gromov [6] appelé une $\mathcal{F}$–structure, qui est une généralisation de l'action d'un cercle.

Définition 1.2. — *Une $\mathcal{F}$–structure sur une variété fermée V est donnée par :*

(1) *Un recouvrement fini $\{U_1, \dots, U_N\}$;*

(2) $\pi_i \colon \widetilde{U}_i \to U_i$ *un revêtement fini avec groupe de Galois*
$$\Gamma_i, 1 \leqslant i \leqslant N;$$

(3) *Une action lisse du tore de dimension k_i avec noyau fini,*
$$\phi_i \colon T^{k_i} \to \mathrm{Diff}(\widetilde{U}_i), 1 \leqslant i \leqslant N;$$

(4) *Un homomorphisme $\Psi_i \colon \Gamma_i \to \mathrm{Aut}(T^{k_i})$ telle que*
$$\gamma(\phi_i(t)(x)) = \phi_i(\Psi_i(\gamma)(t))(\gamma x)$$
pour tout $\gamma \in \Gamma_i$, $t \in T^{k_i}$ et $x \in \widetilde{U}_i$;

(5) *Pour chaque sous-collection finie $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_l}\}$ telle que $U_{i_1\dots i_l} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_l} \neq \emptyset$ on a la condition de compatibilité suivante : soit $\widetilde{U}_{i_1\dots i_l}$ l'ensemble des points $(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) \in \widetilde{U}_{i_1} \times \ldots \times \widetilde{U}_{i_l}$ tels que $\pi_{i_1}(x_{i_1}) = \dots = \pi_{i_l}(x_{i_l})$. L'ensemble $\widetilde{U}_{i_1\dots i_l}$ recouvre $\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_1\dots i_l}) \subset \widetilde{U}_{i_j}$ pour toute $1 \leqslant j \leqslant l$, alors ϕ_{i_j} laisse $\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_1\dots i_l})$ invariant et qui relève en une action sur $\widetilde{U}_{i_1\dots i_l}$ telle que toutes ces actions relevèes commutent.*

Cette définition est équivalente à la version plus élégante donnée par Gromov. La formulation présente est néanmoins plus facile à utiliser. Nos arguments se basent sur le résultat suivant :

Théorème 1.3 (Paternain–Petean [15]). — *Si la variété lisse et fermée V admet une $\mathcal{F}$-structure, alors $\mathcal{Y}(V) \geqslant 0$.*

Regroupons ces informations dans un lemme :

Lemme 1.4 (annulation de $\bar{\lambda}$). — *Si la variété lisse et fermée V admet une $\mathcal{F}$-structure et n'admet aucune métrique lisse à courbure scalaire positive, alors $\bar{\lambda}(V) = 0$.*

Démonstration. — L'invariant de Yamabe est positif si et seulement si V admet une métrique à courbure scalaire positive. Donc on a $\mathcal{Y}(V) \leqslant 0$ et le résultat de Akutagawa–Ishida–LeBrun nous dit que $\mathcal{Y}(V) = \bar{\lambda}(V)$.

Par contre, le théorème de Paternain–Petean implique que $\mathcal{Y}(V) \geqslant 0$, d'ou $\bar{\lambda}(V) = 0$. □

Au cas où V admet une métrique à courbure scalaire positive on obtient d'aprés [1] :

Lemme 1.5. — $\bar{\lambda}(V) = +\infty$ *si et seulement si V admet une métrique à courbure scalaire positive.*

Établir des conditions qui empêchent l'existence d'une métrique à courbure scalaire positive est une problème classique, mais qui reste ouvert en général. Les invariants de Seiberg–Witten peuvent s'utiliser en dimension 4 pour trouver de telles restrictions. Dans la deuxième section nous combinons ce point de vue avec des constructions de $\mathcal{F}$–structures pour donner des exemples où $\bar{\lambda}$ s'annule.

En dimension arbitraire M. Gromov et B. Lawson [7] ont demontré que les variétés à courbure négative ou nulle n'admettent aucune métrique à courbure scalaire positive.

Du lemme d'annulation de $\bar{\lambda}$ on obtient immédiatement une preuve du résultat suivant :

Lemme 1.6. — *Si V admet une métrique à courbure négative ou nulle et admet une $\mathcal{F}$–structure, alors $\bar{\lambda}(V) = 0$.*

Dans la troisiéme section on donnera des exemples concrets où on peut utiliser ce dernier lemme. La conclusion géométrique qu'on obtient est que $\bar{\lambda}$ détecte les parties qu'on appelle *complètement atoroïdales* dans les variétés à courbure négative ou nulle.

Théorème 1.7. — *Soit V une variété compacte muni d'une métrique à courbure négative ou nulle et qui admet une décompisition de Leeb-Scott non-triviale. Si $\bar{\lambda}(V) \neq 0$ alors V admet une partie N complètement atoroïdale dans sa décomposition de Leeb-Scott.*

La décomposition que B. Leeb et P. Scott [14] ont trouvé pour toute variété lisse et compacte munie d'une métrique à courbure négative ou nulle est une décomposition analogue à celle de Jaco-Shalen-Johanson en dimension 3. Les définitions pertinentes et la démonstration se trouvent dans la troisième section.

L'auteur remercie A. Verjovky, J. Seade, A. Guillot et toute l'unité de Cuernavaca de l'IMATE UNAM pour leur générosité et leur hospitalité. Avec l'appui du projet CONACyT México 55084.

2. Dimension 4

Les invariants de Seiberg-Witten ont été introduits par E. Witten [26]. Quand V est une variété compacte lisse orientée de dimension 4 et

$$b_2^+ := \frac{1}{2}(\mathrm{rang} H^2(V;\mathbf{R}) + \mathrm{signature}(V))$$

est au moins 2, ces invariants définissent une application SW_V définie sur les classes d'équivalence de *jauge* des structures Spin^c sur V à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Les détails de cette théorie sophistiquée peuvent être trouvés dans les exposés de S. Dondaldson [3] et D. Kotschick [11], où dans l'article original de E. Witten [26].

Witten [26] a démontré que si $b_2^+(V) > 0$ et s'il existe un invariant de Seiberg-Witten de V non-trivial, alors V n'admet aucune métrique à courbure scalaire positive.

PROPOSITION 2.1. — *Soit V une variété lisse compacte et orientable de dimension 4. Supposons que les invariantes de Seiberg-Witten de V ne sont pas tous triviaux, $b_2^+(V) > 0$ et V admet une $\mathcal{F}$–structure. Alors*

$$\bar{\lambda}(V) = 0.$$

Démonstration. — Les deux premières hypothèses impliquent que V n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive, d'où $\mathcal{Y}(V) \leqslant 0$ et $\mathcal{Y}(V) = \bar{\lambda}(V)$. Si, de plus, V admet une $\mathcal{F}$-structure, on obtient $\mathcal{Y}(V) \geqslant 0$ d'après Paternain–Petean. On conclut que $\bar{\lambda}(V) = 0$. □

2.1. Surfaces complexes

2.1.1. Surfaces Kähleriennes

Une surface compacte et complexe est Kählerienne si et seulement si le premier nombre de Betti est pair [2].

Lemme 2.2. — *Soit X une surface Kählerienne compacte que n'est ni rationnelle ni reglée, et qui admet une $\mathcal{F}$-structure. Alors, $\bar{\lambda}(X) = 0$.*

Démonstration. — R. Friedman et J. Morgan [4] ont démontré que si une surface Kählerienne admet une métrique à courbure scalaire positive alors elle est rationnelle ou réglée. Donc on sait que X n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive. L'hypothèse que X admet une $\mathcal{F}$-structure force $\bar{\lambda}(X) = 0$, d'après le lemme 4. □

Soit V la variété lisse sous-jacente à une surface complexe compacte algébrique (et donc Kählerienne), notons K le fibré canonique. La *dimension de Kodaira* de V est par définition [2]

$$\kappa(V) := \limsup \frac{\log h^0(V, K^{\otimes l})}{\log l}.$$

Proposition 2.3. — *Soit V comme dans le paragraphe ci-dessus. Si $\kappa(V)$ est 0 ou 1, alors $\bar{\lambda}(V) = 0$.*

Démonstration. — D'après C. LeBrun [13] si $\kappa(V) \geqslant 0$ alors $\mathcal{Y}(V) \leqslant 0$. Par contre Paternain–Petean [16] ont prouvé que de telles V admettent une $\mathcal{F}$-structure si et seulement si $\kappa(V) \neq 2$. En conclusion $\mathcal{Y}(V) \geqslant 0$ et en consequénce $\bar{\lambda}(V) = 0$. □

2.2. Variétés symplectiques

Des exemples où les résultats précédents s'appliquent sont donnés par les variétés symplectiques de dimension 4 :

Lemme 2.4. — *Soit V une variété symplectique de dimension 4 telle que $b_2^+(V) > 1$ et qui admet une $\mathcal{F}$–structure. Alors, $\bar{\lambda}(V) = 0$.*

Démonstration. — C.H. Taubes [22] a démontré que pour de telles variétés l'invariant de Seiberg–Witten évalué dans la classe canonique de V est non-trivial. Alors le lemme est vrai d'après la proposition 8. □

2.3. Variétés géométriques (à la Thurston)

Aprés le progrès du programme de géométrisation de Thurston en dimension 3, il est naturel de penser aux géométries modèles en dimension supérieure.

Définition 2.5. — *Une paire* (X, G) *est appelée une* géométrie modèle *si :*

- *X est un espace topologique simplement connexe.*
- *G est un groupe de Lie, agissant sur X effectivement et transitivement, avec des stabiliseurs compacts, et qui est maximale pour ces propriétés.*
- *Il existe un sous-groupe Γ de G tel que $V = X/\Gamma$ est compact.*

En dimension 4, les géométries modèles ont été classifiées par Filipkiewicz ; une bonne source d'information est J. Hillman [9]. Les quotients $V = X/\Gamma$ avec Γ sous-groupe discret de G sont appelés *variétés géométriques*. On notera $\mathbb{E}^n$ la géométrie euclidienne et $\mathbb{H}^n$ la géométrie hyperbolique.

Proposition 2.6. — *Soit V une variété géométrique compacte de dimension 4 :*

1. *Si V est modelée sur $\mathbb{E}^4$, $\mathbb{E}^2 \times \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{E} \times \mathbb{H}^3$ alors, $\bar{\lambda}(V) = 0$.*
2. *Supposons que X est modelée sur $\mathbb{E}^2 \times S^2$ ou $\mathbb{H}^2 \times S^2$. Si $V = X/\Gamma$ est telle que $\Gamma \subset G^0_X$, la composante connexe de l'identité de G et $b_2^+(V) > 1$, alors $\bar{\lambda}(V) = 0$.*
3. *Si V est modelée sur $\mathrm{Nil}^3 \times \mathbb{E}$ ou $\mathrm{Sol}^3 \times \mathbb{E}$ et si elle est fibrée sur le tore T^2 et $b_2^+(V) > 1$, alors $\bar{\lambda}(V) = 0$.*

Démonstration. — On a démontré dans [20] que toutes ces variétés admettent une $\mathcal{F}$-structure. Il reste à voir qu'elles n'admettent aucune métrique à courbure scalaire positive.

1. Ces variétés admettent une métrique à courbure négative ou nulle, et on conclut l'argument avec le lemme 6.
2. Ces variétés sont aussi des surfaces complexes Kähleriennes, d'après C.T.C. Wall [25], et on conclut avec le lemme 11.
3. Dans cette situation, toutes ces variétés sont symplectiques (voir [9, p. 264]), alors le résultat est vrai d'après le lemme 11.

□

3. Variétés à courbure négative ou nulle

Comme nous avons fait mention dans l'introduction, B. Leeb et P. Scott [14] ont trouvé que toute variété lisse et compacte munie d'une métrique à courbure négative ou nulle admet une décomposition analogue à la décomposition Jaco-Shalen-Johanson en dimension 3. Rappelons ici quelques une des notions importantes :

Définition 3.1 (Leeb–Scott [14]). — *Une variété de dimension n est un* **fibré de Seifert** *si N fibre sur un orbifold de dimension 2, tel que N est feuilletée par des variétés plates de dimension $n-2$ et chaque feuille F à un voisinage feuilleté qui possède un recouvrement fini où le feuilletage induit est un produit $F \times D^2$.*

Une variété V de dimension n est **atoroïdale en codimension 1** *si toute application d'un tore plat de dimension $n-1$ qui réalise une injection du groupe fondamental est homotope au bord de V.*

Le résultat principal de Leeb–Scott [14] est qu'une variété compacte V munie d'une métrique à courbure négative ou nulle admet une décomposition canonique le long de sous-variétés de codimension 1 plongées dans N qui sont plates par rapport à la métrique donnée. Les parties de cette décomposition sont soit des fibrés de Seifert soit des variétés qui sont atoroïdales en codimension 1.

Suivant l'analogie directe de cette notion d'atoroïdalité, on propose :

Définition 3.2. — *Une variété V de dimension n est* **atoroïdale en codimension** *k si toute application d'un tore plat de dimension $n-k$ qui induit une injection du groupe fondamental est homotope au bord de V.*

Ensuite on combine ces notions pour introduire *l'atoroïdalite complète* :

Définition 3.3. — *Une variété de dimension n est* **complètement atoroïdale** *si elle est atoroïdale en codimension k pour tout k avec $1 \leqslant k \leqslant n-2$.*

Notre contribution dans cette famille des variétés à courbure négative ou nulle est de montrer que l'invariant $\bar{\lambda}$ détecte la présence de parties complètement atoroïdales parmi celles de la décomposition de Leeb-Scott.

Démonstration. — Supposons que V ne contienne aucune partie complétement atoroïdale. Il découle du théorème du tore-plat de Gromoll-Wolf [5] et Lawson-Yau [12] que V se décompose en parties qui sont fibrées de Seifert et/ou parties qui ont un groupe fondamental de centre non-trivial. Les constructions de $\mathcal{F}$-structures pour ces variétés se trouvent dans la démonstration du [21, Theorem 1] et par le théorème 3 on a $\mathcal{Y}(V) \geqslant 0$.

Il nous reste à voir que V n'admet aucune métrique à courbure scalaire positive. Gromov et Lawson [7] ont déjà démontré que si V admet une métrique à courbure négative ou nulle alors V n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive. Par conséquent $\mathcal{Y}(V) \leqslant 0$, et en conclusion $\bar{\lambda}(V) = 0$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Akutagawa, M. Ishida, C. LeBrun, *Perelman's Invariant, Ricci Flow, and the Yamabe Invariants of Smooth Manifolds*, Arch. Math. 88 (2007) no.1, 71–76.

[2] W.P. Barth, K. Hulek,C.A. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces. Second edition,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, 4. Springer–Verlag, Berlin, 2004.

[3] S.K. Donaldson, *The Seiberg–Witten equations and 4-manifold topology,* Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), no. 1, 45–70.

[4] R. Friedman, J.W. Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg–Witten invariants,* J. Algebraic Geom. 6 (1997), no. 3, 445–479.

[5] D. Gromoll J.A. Wolf, *Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 1971 545–552.

[6] M. Gromov, *Volume and Bounded Cohomology*, Pub. Math. I.H.E.S. tome 56 (1982) 5-99.

[7] M. Gromov, H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete riemannian manifolds*, Pub. Mat. I.H.E.S. 58 (1983) 83–196.

[8] R. Hamilton, *Three–manifolds with positive Ricci curvature*, Journ. Diff. Geom. 17 (1982) 255–306.

[9] J.A. Hillman, *Four–manifolds, Geometries and Knots*, Geometry and Topology Monographs, Volume 5 (2002).

[10] B. Kleiner and J. Lott, *Notes on Perelman's Papers*, Geometry &Topology 12 (2008) 2587–2855.

[11] D. Kotschick, *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds (after C. H. Taubes),* Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque No. 241 (1997), Exp. No. 812, 4, 195–220.

[12] H.B. Lawson, S.T. Yau, *Compact manifolds of nonpositive curvature*, J. Diff. Geom. 7 (1972), 211–228.

[13] C. LeBrun, *Kodaira dimension and the Yamabe problem*, Comm. An. Geom. 7 (1999) 133–156.

[14] B. Leeb, P. Scott, *A geometric characteristic splitting in all dimensions,* Comm. Mat. Helv. 75 (2000) 201–215.

[15] G. Paternain, J. Petean, *Minimal entropy and collapsing with curvature bounded from below*, Invent.Math. 151 (2003) 415–450.

[16] G. Paternain, J. Petean, *Entropy and collapsing of compact complex surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 89 (2004), no. 3, 763–786.

[17] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, Prépublication (2002), `arXiv:math.DG/0211159`.

[18] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, Prépublication (2003), `arXiv:math/0303109`.

[19] J. Petean, *The Yamabe invariant of simply connected manifolds,* J. Reine Angew. Math. 523 (2000), 225–231.

[20] P. Suárez-Serrato, *Minimal entropy and geometric decompositions in dimension four*, Algebraic & Geometric Topology 9 (2009) 365–395.

[21] P. Suárez-Serrato, *Perelman's invariant and collapse via geometric characteristic splittings,* Prépublication (2008), `arxiv:math.DG/0804.4588`.

[22] C. H. Taubes, *The Seiberg–Witten invariants and symplectic forms,* Math. Res. Lett. 1 (1994), no. 6, 809–822.

[23] R. Schoen, *Variational Theory for the Total Scalar Curvature Functional for Riemannian Metrics and Related Topics*, LNM 1365, Springer Verlag, Berlin (1987) 120-154.

[24] W.P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 6 (1982), no. 3, 357–381.

[25] C.T.C. Wall, *Geometric structures on compact complex analytic surfaces*, Topology, Vol.25, No.2 (1986) 119-153.

[26] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds,* Math. Res. Lett. 1 (1994), no. 6, 769–796.

Pablo Suárez-Serrato
CIMAT
CP : 36240, Guanajuato, Gto (México)
p.suarez-serrato@cantab.net