Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Simon Raulot

La première valeur propre d'opérateurs de Dirac sur les variétés à bord et quelques applications

Volume 26 (2007-2008), p. 91-121.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2007-2008__26__91_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 26 (2007-2008) 91-121

LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE D'OPÉRATEURS DE DIRAC SUR LES VARIÉTÉS À BORD ET QUELQUES APPLICATIONS

Simon Raulot

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on s'intéresse à l'aspect conforme du spectre d'opérateurs de Dirac dans le cadre des variétés à bord. Dans un premier temps, on étudie la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition associée à un opérateur de chiralité conduisant à la définition d'un nouvel invariant spinoriel conforme. Dans la dernière partie, on s'intéresse à l'opérateur de Dirac du bord en reliant sa première valeur propre à des invariants reflétant la géométrie extrinsèque du bord. Dans cette section, on s'appuiera en grande partie sur les travaux de Hijazi, Montiel et Zhang [25] et [26].

1. Introduction

Le théorème de Lichnerowicz peut être formulé comme une estimation non optimale de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac.

THÉORÈME 1.1. — ([31]) *Sur une variété riemannienne spinorielle compacte (sans bord) (M^n, g) à courbure scalaire R strictement positive, la première valeur propre $\lambda_1(D)$ de l'opérateur de Dirac statisfait :*

$$\lambda_1(D)^2 > \frac{1}{4} \inf_M R. \tag{1.1}$$

Une conséquence fondamentale de ce résultat est donnée par l'existence d'obstructions topologiques à l'existence de métriques à courbure scalaire strictement positive. En effet, si la dimension de la variété est paire, le fibré des spineurs complexes se décompose en deux composantes irréductibles sous l'action de son élément de volume. Sous cette décomposition,

Crédits : L'auteur est financé par le Fonds National Suisse, grant 20-118014/1.

l'opérateur de Dirac s'écrit $D = D^+ + D^-$ et l'indice analytique de D^+ est donné par :

$$\operatorname{Ind} D^+ = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-.$$

Le Théorème 1.1 implique alors que si la courbure scalaire est strictement positive, l'indice de D^+ est nul. D'autre part, par le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer [6], on sait que l'indice analytique de D^+ est égal à l'indice topologique de M qui doit donc s'annuler si M possède une métrique à courbure scalaire strictement positive.

Le caractère non optimal de l'estimation (1.1) conduit cependant à la question naturelle suivante : peut-on obtenir un inégalité optimale pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac ? Dans [16], Friedrich apporte une réponse affirmative à cette question en montrant que :

$$\lambda_1(D)^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)}\inf_M R. \tag{1.2}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si la variété possède un champ de spineurs de Killing réel. En utilisant les propriétés conformes de l'opérateur de Dirac, Hijazi [20] améliore cette estimation en prouvant que :

$$\lambda_1(D)^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)}\lambda_1(L), \tag{1.3}$$

où $\lambda_1(L)$ est la première valeur propre du laplacien conforme, le cas d'égalité étant toujours caractérisé par l'existence d'un champ de spineurs de Killing réel. Une conséquence immédiate de ce résultat est donnée dans [21] par l'inégalité :

$$\lambda_1(D)^2\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{n}{4(n-1)}Y(M) \tag{1.4}$$

où $Y(M)$ est l'invariant de Yamabe de (M,g). Cet invariant ne dépend pas de la métrique g mais seulement de sa classe conforme et il est défini par :

$$Y(M) = \inf_{g_u\in[g]} \frac{\int_M R_u dv_u}{\mathrm{Vol}(M,g_u)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{1.5}$$

où R_u (resp. dv_u) est la courbure scalaire (resp. la forme de volume) de (M^n, g_u) et $g_u = e^{2u}g \in [g] := \{e^{2v}g \,/\, v \in C^\infty(M)\}$. L'étude de cet invariant permet la résolution du célèbre problème de Yamabe qui consiste à prouver l'existence d'une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante (voir [51], [49], [7] et [46]). L'estimation (1.4) conduit à la définition d'un analogue de l'invariant (1.5) dans le cadre spinoriel en posant :

$$\inf_{g_u\in[g]}|\lambda_1(D_u)|\mathrm{Vol}(M,g_u)^{\frac{1}{n}} \tag{1.6}$$

où $\lambda_1(D_u)$ désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac D_u dans la métrique g_u. Cet invariant fait l'objet de nombreux travaux dont une liste non exhaustive est donnée par [2], [3], [4] ou bien encore [5].

Dans cet article, on aborde ce type de problèmes dans le contexte des variétés à bord sous deux aspects différents. En effet, après avoir rappelé les bases de la géométrie spinorielle sur une variété à bord et discuté la notion d'ellipticité de conditions à bord (Section 2), on montre que des estimations du type (1.3) et (1.4) peuvent être obtenues pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de la variété M sous deux conditions à bord. Cela conduit à la définition et l'étude d'un analogue de l'invariant (1.6) dans ce contexte (Section 4). Finalement, dans la partie 5, on s'intéresse à ce type de questions pour l'opérateur de Dirac du bord. On fait en particulier référence au travail [26] où Hijazi, Montiel et Zhang relient sa première valeur propre à un invariant conforme de la variété intervenant dans le problème de Yamabe sur les variétés à bord.

Remerciements. — Je tiens à remercier Gérard Besson pour m'avoir permis d'exposer mon travail au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier de Grenoble.

2. Géométrie spinorielle sur les variétés à bord

2.1. Généralités

On considère (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension n possédant un bord lisse ∂M. Dans toute la suite, on notera par $\sigma := (\mathrm{Spin}\,(M), \eta)$ une structure spinorielle sur M qui est la donnée d'un fibré principal $\mathrm{Spin}\,(M)$ de groupe structural Spin_n et d'un revêtement η à deux feuillets du fibré principal $\mathrm{SO}(M)$ des repères linéaires g-orthonormés par le fibré $\mathrm{Spin}\,(M)$. L'existence d'une telle structure est de nature topologique et elle est équivalente à l'annulation de la deuxième classe de Stiefel-Withney. Notons qu'il peut exister plusieurs structures spinorielles sur une variété et si tel est le cas, on en choisit une et on la fixe pour la suite. En utilisant les résultats classiques sur les représentations complexes du groupe Spin_n, on construit un fibré vectoriel associé au fibré principal $\mathrm{Spin}\,(M)$. Ce fibré est appelé fibré des spineurs complexes (ou fibré des spineurs) et sera noté ΣM. De la même manière, on peut construire un fibré vectoriel dont la fibre au-dessus d'un point est donnée par l'algèbre de Clifford complexe. Ce fibré vectoriel est appelé fibré de Clifford et on le notera $\mathbb{C}l(M)$. Ce fibré agit sur les champs de spineurs par multiplication de Clifford :

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{C}l(M)\otimes\Sigma M & \longrightarrow & \Sigma M \\ & & X\otimes\varphi & \longmapsto & \gamma(X)\varphi. \end{array}$$

Sur ΣM, on a un produit hermitien, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, qui satisfait :

$$\langle\gamma(X)\psi,\varphi\rangle = -\langle\psi,\gamma(X)\varphi\rangle, \tag{2.1}$$

pour tout $X\in\Gamma(TM)$ et pour tout $\psi,\varphi\in\Gamma(\Sigma M)$. D'autre part, la 1-forme de connexion induite par la connexion de Levi-Civita riemannienne ∇ agissant sur le fibré tangent se relève en une connexion sur le fibré principal des repères spinoriels. Cette 1-forme de connexion permet alors de construire la dérivée covariante associée, appelée connexion de Levi-Civita spinorielle et notée :

$$\nabla:\Gamma(\Sigma M)\longrightarrow\Gamma(T^*M\otimes\Sigma M).$$

Si U est un ouvert de trivialisation de ΣM, la connexion de Levi-Civita est localement donnée par :

$$\nabla_X\psi = X(\psi)+\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} g(\nabla_X e_i,e_j)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\psi,$$

pour tout $\psi\in\Gamma(\Sigma M)$, $X\in\Gamma(TM)$ et où $\{e_1,...,e_n\}$ est un repère g-orthonormé local de TM. On peut vérifier que cette connexion est compatible avec la multiplication de Clifford et avec le produit hermitien, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \nabla_X\big(\gamma(Y)\varphi\big) &= \gamma(\nabla_X Y)\varphi+\gamma(Y)\nabla_X\varphi \\ X\langle\varphi,\psi\rangle &= \langle\nabla_X\varphi,\psi\rangle+\langle\varphi,\nabla_X\psi\rangle \end{aligned}$$

pour tout φ, $\psi\in\Gamma(\Sigma M)$ et X, $Y\in\Gamma(TM)$. Le tenseur de courbure spinoriel associé à ∇ défini par :

$$\mathfrak{R}_{X,Y} := [\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]},$$

est, quant à lui, localement donné par :

$$\mathfrak{R}_{X,Y}\psi = \frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} g(Riem_{X,Y}e_i,e_j)\gamma(e_i)\gamma(e_j)\psi,$$

où *Riem* est le tenseur de courbure de Riemann de (M^n,g). L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel elliptique d'ordre un agissant sur les champs de spineurs défini par :

$$D:=\gamma\circ\nabla,$$

et dont l'expression locale est :

$$D\psi = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\gamma(e_i)\nabla_{e_i}\psi.$$

Remarque 2.1. — Si la variété est de dimension paire, le fibré des spineurs se décompose en deux facteurs irréductibles :

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M, \tag{2.2}$$

avec $\Sigma^\pm M = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm \omega_n^{\mathbb{C}})\Sigma M$ et où :

$$\omega_n^{\mathbb{C}} = i^{[\frac{n+1}{2}]}\gamma(e_1)\cdots\gamma(e_n)$$

est l'élément de volume complexe de ΣM. On vérifie dans ce cas que l'opérateur de Dirac échange cette décomposition :

$$D : \Gamma(\Sigma^\pm M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^\mp M).$$

On s'intéresse maintenant au bord ∂M de la variété M que l'on considére comme une hypersurface orientée de M. Le bord ∂M hérite de façon naturelle de la structure riemannienne de M que l'on notera $g := g_{|\partial M}$. De plus, puisque le bord est orienté (par l'orientation de M) il existe un champ de vecteurs unitaire ν normal à ∂M (que l'on choisit rentrant à ∂M). Ce champ de vecteurs permet en premier lieu d'identifier le fibré principal des repères linéaires g-orthonormés au-dessus de ∂M (noté $\mathrm{SO}(\partial M)$) comme un sous-fibré du fibré $SO(M)_{|\partial M}$. Cette identification, donnée par l'application :

$$\begin{aligned}\Phi \quad : \qquad \mathrm{SO}(\partial M) &\longrightarrow \mathrm{SO}(M)_{|\partial M}\\ (e_1, ..., e_{n-1}) &\longmapsto (e_1, ..., e_{n-1}, \nu),\end{aligned}$$

permet ainsi de munir ∂M d'une structure spinorielle. En effet, il suffit pour cela de remarquer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}\,(\partial M) := \Phi^*\big(\mathrm{Spin}(M)_{|\partial M}\big) \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(M)_{|\partial M} \arrow[d] \\
\mathrm{SO}(\partial M) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathrm{SO}(M)_{|\partial M}
\end{tikzcd}$$

On peut alors définir le fibré des spineurs extrinsèque au bord comme étant la restriction à ∂M du fibré ΣM c'est-à-dire $\mathbf{S} := \Sigma M_{|\partial M}$. Ce fibré est, de la même manière que ΣM, muni d'une multiplication de Clifford $\gamma^{\mathbf{S}}$, d'une métrique hermitienne $\langle\, ,\, \rangle$ et d'une dérivée covariante $\widetilde{\nabla}$ compatible avec $\langle\, ,\, \rangle$ et $\gamma^{\mathbf{S}}$. Par analogie avec le fibré des spineurs ΣM, on définit l'opérateur de Dirac du bord comme composé de la multiplication de Clifford et de la dérivée covariante de $\mathbf{S}$, *i.e.* $\widetilde{D} = \gamma^{\mathbf{S}} \circ \widetilde{\nabla}$. Cet opérateur définit un opérateur différentiel elliptique d'ordre un et son spectre est constitué d'une suite de nombres réels tendant (en valeur absolue) vers $+\infty$ et symétrique par rapport à zéro. Pour cela, il suffit de remarquer que l'action de ν par multiplication de Clifford anti-commute avec $\widetilde{D}$, *i.e.* :

$$\widetilde{D}\big(\gamma(\nu)\varphi\big) = -\gamma(\nu)\widetilde{D}\varphi.$$

Comme dans le cadre riemannien, on peut relier multiplication de Clifford et dérivée covariante ambiantes restreintes au bord avec celles définies sur $\mathbf{S}$. En effet, on a :

$$\gamma^{\mathbf{S}}(X) = \gamma(X)\gamma(\nu)$$

et la formule de Gauss spinorielle :

$$\nabla_X\varphi = \widetilde{\nabla}_X\varphi + \frac{1}{2}\gamma\big(A(X)\big)\gamma(\nu)\varphi,$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$, $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$ et où $A(X) = -\nabla_X\nu$ est l'application de Weingarten. Cette formule permet en particulier de relier l'opérateur de Dirac ambiant D restreint au bord avec l'opérateur de Dirac du bord par :

$$\widetilde{D}\varphi = \frac{n-1}{2}H\varphi - \gamma(\nu)D\varphi - \nabla_\nu\varphi, \tag{2.3}$$

où $H = \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,(A)$ est la courbure moyenne de ∂M.

Remarque 2.2. — Puisque le bord est une variété spinorielle, on a un fibré des spineurs intrinsèque $\Sigma(\partial M)$ au-dessus de ∂M qui ne dépend pas de sa géométrie extrinsèque. Ce fibré est un fibré de Dirac : il est muni d'une multiplication de Clifford $\gamma^{\partial M}$, d'une métrique hermitienne $\langle\, ,\, \rangle$ et d'une dérivée covariante $\nabla^{\partial M}$ compatible avec la multiplication de Clifford et la métrique hermitienne. On notera $D^{\partial M} := \gamma^{\partial M} \circ \nabla^{\partial M}$ l'opérateur de Dirac intrinsèque de ∂M. Un point important ici est de remarquer que l'on peut identifier de manière canonique le fibré des spineurs intrinsèque $\Sigma(\partial M)$ de ∂M et son fibré extrinsèque $\mathbf{S}$. En effet, on a :

(1) Si la dimension n de la variété M est impaire :

$$(\mathbf{S}, \gamma^{\mathbf{S}}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \equiv (\Sigma(\partial M), \gamma^{\partial M}, \nabla^{\partial M}, D^{\partial M}),$$

et la décomposition $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ donnée par

$$\mathbf{S}^\pm := \{\varphi \in \mathbf{S} \ :\ i\gamma(\nu)\varphi = \pm\varphi\}$$

correspond à la décomposition chirale (2.2) du fibré des spineurs $\Sigma(\partial M)$. L'opérateur $\widetilde{D}$ échange alors les sous-fibrés $\mathbf{S}^+$ et $\mathbf{S}^-$.

(2) Si la dimension n de la variété M est paire :

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}, \gamma^{\mathbf{S}}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \equiv \big(\Sigma(\partial M) \oplus \Sigma(\partial M), \gamma^{\partial M} \oplus -\gamma^{\partial M},\\ \nabla^{\partial M} \oplus \nabla^{\partial M}, D^{\partial M} \oplus -D^{\partial M}\big)\end{aligned}$$

et la décomposition chirale (2.2) du fibré des spineurs ΣM induit une décomposition orthogonale, $\gamma^{\mathbf{S}}$ et $\widetilde{D}$-invariante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-,$$

où $\mathbf{S}^\pm := \Sigma^\pm M_{|\partial M}$. De plus, les fibrés $\mathbf{S}^+$ et $\mathbf{S}^-$ sont isomorphes par l'action de ν :

$$\gamma(\nu) : \mathbf{S}^\pm \longrightarrow \mathbf{S}^\mp.$$

2.2. Covariance conforme de l'opérateur de Dirac

La construction du fibré des spineurs fait intervenir de manière claire la métrique riemannienne sur M. Ainsi si on change cette métrique, le fibré des spineurs associé à la nouvelle métrique change lui aussi. On a alors une identification canonique entre ces deux fibrés des spineurs qui, lorsque les métriques sont dans la même classe conforme, est décrite dans le paragraphe ci-dessous. Pour le cas général, le lecteur intéressé pourra consulter [11].

Soit u une fonction lisse partout non nulle sur la variété M et soit $g_u = u^2 g$ une métrique conforme à g. On commence tout d'abord par remarquer qu'on peut identifier les deux SO_n-fibrés principaux des repères g et g_u-orthonormés, notés respectivement $\mathrm{SO}(M)$ et $\mathrm{SO}_u(M)$, par :

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(M) &\longrightarrow \mathrm{SO}_u(M) \\ e = (e_1, \dots, e_n) &\longmapsto e_u = \big((e_1)_u = u^{-1}e_1, \dots, (e_n)_u = u^{-1}e_n\big). \end{aligned}$$

On peut ainsi, en relevant cet isomorphisme, identifier les Spin_n-fibrés principaux $\mathrm{Spin}\,(M)$ et $\mathrm{Spin}_u\,(M)$ des repères spinoriels et on obtient une isométrie de fibrés :

$$\begin{aligned} \Sigma M &\longrightarrow \Sigma_u M \\ \varphi &\longmapsto \varphi_u \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\Sigma_u M$ est le fibré des spineurs au-dessus de la variété M munie de la métrique g_u. Cette identification permet de relier les connexions de Levi-Civita correspondantes ainsi que les multiplications de Clifford. En effet, si on note par ∇^u (resp. γ_u) la dérivée covariante (resp. la multiplication de Clifford) agissant sur le fibré $\Sigma_u M$, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \nabla^u_X \psi_u &= \Big(\nabla_X \psi - \frac{1}{2}\gamma(X)\gamma(\nabla u)\psi - \frac{1}{2}X(u)\psi\Big)_u \\ \gamma_u(X_u)\psi_u &= (\gamma(X)\psi)_u \\ \langle \psi_u, \varphi_u \rangle_u &= \langle \psi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant ces identités, on obtient une formule qui relie les opérateurs de Dirac d'une variété munie de deux métriques conformes (voir [27], [20]). On a :

$$D_u\psi_u = \Big(u^{-\frac{n+1}{2}}D(u^{\frac{n-1}{2}}\psi)\Big)_u, \tag{2.5}$$

pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ et où D_u désigne l'opérateur de Dirac dans la métrique g_u. Un changement conforme de métriques sur M induit aussi un changement conforme sur le bord ∂M. L'identification (2.4) induit alors une isométrie entre les fibrés $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}_u := \Sigma_u M_{|\partial M}$ permettant ainsi de relier leurs connexions et leurs multiplications de Clifford par :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^u_X\psi_u &= \Big(\widetilde{\nabla}_X\psi - \frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}(X)\gamma^{\mathbf{S}}(\widetilde{\nabla}u)\psi - \frac{1}{2}X(u)\psi\Big)_u\\ \gamma^{\mathbf{S}}_u(X_u)\psi_u &= (\gamma^{\mathbf{S}}(X)\psi)_u,\end{aligned}$$

pour tout $X \in \Gamma(T(\partial M))$ et $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$. On obtient un analogue de l'identité (2.5) pour les opérateurs de Dirac du bord :

$$\widetilde{D}_u\psi_u = \Big(u^{-\frac{n}{2}}\widetilde{D}(u^{\frac{n-2}{2}}\psi)\Big)_u, \tag{2.6}$$

pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ et où $\widetilde{D}_u$ désigne l'opérateur de Dirac du bord agissant sur le fibré $\mathbf{S}_u$.

2.3. Formule de Reilly spinorielle

Un des principaux outils pour obtenir des minorations de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac est la célèbre formule de Schrödinger-Lichnerowicz. Ce type de relations s'inscrit dans un cadre général qui consiste, étant donné un opérateur elliptique P agissant sur les sections d'un certain fibré vectoriel E muni d'une connexion ∇, à exprimer l'opérateur P^*P en fonction du laplacien brut $\nabla^*\nabla$. Dans ce cadre général, ces formules sont du type :

$$P^*P = \nabla^*\nabla + \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est un endomorphisme du fibré E. Il s'avère que pour l'opérateur de Dirac on obtient la très esthétique formule [31] :

$$D^2\varphi = \nabla^*\nabla\varphi + \frac{R}{4}\varphi$$

pour tout $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$, où R désigne la courbure scalaire de la variété (M, g). La formule de Reilly spinorielle est alors obtenue en intégrant cette identité sur M. À l'aide du théorème de Stokes, on vérifie que pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, on a :

$$\int_M \big(|\mathcal{P}\psi|^2 + \frac{1}{4}R|\psi|^2 - \frac{n-1}{n}|D\psi|^2\big)dv = \int_{\partial M} \Big(\langle \widetilde{D}\psi, \psi\rangle - \frac{n-1}{2}H|\psi|^2\Big)ds, \tag{2.7}$$

où dv (resp. ds) désigne l'élément de volume riemannien de (M^n, g) (resp. de $(\partial M, g)$). Dans l'expression précédente, $\mathcal{P}$ est l'opérateur de twisteurs (ou opérateur de Penrose) :

$$\mathcal{P} : \Gamma(\Sigma M) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M)$$

localement donné par :

$$\mathcal{P}\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (\nabla_{e_i}\psi + \frac{1}{n}\gamma(e_i)D\psi).$$

On trouvera une preuve de (2.7) dans [25] par exemple.

2.4. Conditions à bord elliptiques

Dans cette section, on donne un bref rappel sur la notion d'ellipticité au sens de Lopatinsky-Shapiro pour des conditions à bord à imposer à des opérateurs différentiels linéaires et elliptiques. Ces notions étant assez courantes dans la littérature, on donnera seulement les principaux résultats nécessaires à la suite de ce travail. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter [32], [48], [10] ou encore [24].

L'étude de conditions à bord “satisfaisantes” pour un opérateur différentiel elliptique $\mathcal{D}$ (qu'on supposera d'ordre un) agissant sur les sections lisses d'un fibré vectoriel hermitien $E \to M$ a été entreprise dans les années cinquante par Lopatinsky et Shapiro. Cependant, le principal outil fut découvert par Calderón dans les années soixante et est désormais appelé *projecteur de Calderón*. Cet opérateur différentiel d'ordre zéro est défini par :

$$\mathcal{P}_+(\mathcal{D}) : H^{\frac{1}{2}}(E_{|\partial M}) \longrightarrow \{\psi_{|\partial M} \ / \ \psi \in H^1(E),\ \mathcal{D}\psi = 0\}$$

et son symbole principal :

$$\sigma(\mathcal{P}_+(\mathcal{D})) : T(\partial M) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$$

ne dépend que du symbole principal $\sigma(\mathcal{D})$ de l'opérateur $\mathcal{D}$. L'intérêt majeur de cet opérateur est que son symbole principal détecte l'ellipticité de conditions à bord. On rappelle qu'un opérateur différentiel :

$$\mathbb{B} : \mathrm{L}^2(E_{|\partial M}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(V),$$

où $V \to \partial M$ est un fibré vectoriel complexe au-dessus du bord ∂M, est une condition à bord elliptique (globale) lorsque son symbole principal :

$$\sigma(\mathbb{B})(u)_{|Im\ \sigma(P_+(\mathcal{D}))(u)} : \mathrm{Im}\,\sigma(\mathcal{P}_+(\mathcal{D}))(u) \subset E_p \longrightarrow V_p$$

définit un isomorphisme sur l'image $\sigma(\mathbb{B})(u) \subset V_p$ pour tout $u \in T(\partial M) \setminus \{0\}$ et pour tout $p \in \partial M$. De plus, si le rang du fibré V est égal à la dimension de l'image de l'endomorphisme $\sigma(\mathcal{P}_+(\mathcal{D}))(u)$, on dit que $\mathbb{B}$ est une condition à bord elliptique locale. Cette notion d'ellipticité est appelée *ellipticité au sens de Lopatinsky-Shapiro.*

On applique la discussion précédente lorsque l'opérateur considéré $\mathcal{D}$ est l'opérateur de Dirac D et le fibré vectoriel hermitien E est le fibré des spineurs ΣM. Remarquons tout d'abord que contrairement au cas où la variété n'a pas de bord, l'opérateur de Dirac possède en général une image fermée dont la codimension est finie mais un noyau de dimension infinie. Afin de récupérer de bonnes propriétés, on se doit alors d'imposer des conditions sur la restriction au bord des champs de spineurs. Rappelons aussi que dans ce cas, la formule de Stokes permet de détecter un défaut de symétrie de l'opérateur de Dirac. En effet, on a :

$$\int_M \langle D\psi, \varphi\rangle dv - \int_M \langle \psi, D\varphi\rangle dv = -\int_{\partial M} \langle \gamma(\nu)\psi, \varphi\rangle ds,$$

pour tout ψ, $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$. En utilisant alors la définition d'ellipticité pour une condition à bord, et en la spécifiant au cas de l'opérateur de Dirac, on dira qu'un opérateur :

$$\mathbb{B} : \mathrm{L}^2(\mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(V),$$

où V est un fibré vectoriel hermitien au-dessus de ∂M, définit une condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac D de M si et seulement si son symbole principal :

$$\sigma(\mathbb{B}) : T(\partial M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}, V)$$

satisfait les deux conditions suivantes :

(1) $\ker \sigma(\mathbb{B})(u) \cap \Big\{\eta \in \Sigma_p M \ / \ i\gamma(\nu)\gamma(u)\eta = -|u|\eta\Big\} = \{0\}$

(2) $\dim\,\mathrm{Im}\,\sigma(\mathbb{B})(u) = \frac{1}{2}\dim\,(\Sigma_p M) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$.

De plus, si le fibré V est de rang $\frac{1}{2}\mathrm{dim}\ (\Sigma_p M) = 2^{[\frac{n}{2}]-1}$, on a une condition à bord locale.

On rappelle maintenant brièvement les conditions à bord que l'on va étudier dans la suite. On s'intéresse en particulier à deux conditions locales qui, comme on va le voir, possède une propriété d'invariance par changement conforme de métriques.

(1) **La condition (CHI) associée à un opérateur de chiralité.** Ce type de condition à bord recquiert l'existence sur la variété M d'une application linéaire :

$$G : \Gamma(\Sigma M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma M),$$

qui satisfait les relations suivantes :

$$G^2 = Id, \quad \langle G\psi, \qquad G\varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle$$
$$\nabla_X(G\psi) = G\big(\nabla_X\psi\big), \qquad \gamma(X)G(\psi) = -G\big(\gamma(X)\psi\big),$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et tout champ de spineurs $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$. Cet opérateur est appelé opérateur de chiralité puisque lorsque la variété M est de dimension paire, le candidat standard pour G est donné par la multiplication de Clifford par l'élément de volume $\omega_n^{\mathbb{C}}$. Dans ce cas, G n'est rien d'autre que l'opérateur de conjugaison échangeant la décomposition chirale. Un autre cas important où ce type de condition existe toujours est le cadre des hypersurfaces de type-espace d'une variété lorentzienne spinorielle. En effet, dans ce contexte, il existe un vecteur T unitaire, de type-temps et normal à l'hypersurface. On peut alors vérifier que l'opérateur défini par $G = \gamma(T)$ est un opérateur de chiralité. Supposons donc qu'un tel opérateur est donné sur M et considérons l'application :

$$\gamma(\nu)G : \Gamma(\mathbf{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}).$$

Cet endomorphisme est auto-adjoint par rapport au produit hermitien sur $\mathbf{S}$ et il est clairement involutif. Le fibré $\mathbf{S}$ se décompose alors en sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 (isomorphes par l'action de ν). En suivant les notations introduites au début de cette section, on prend pour fibré V le sous-fibré propre $V^\pm$ associé à la valeur propre ± 1 de l'application $\gamma(\nu)G$ et on pose :

$$P^\pm_{CHI} = \frac{1}{2}(Id \pm \gamma(\nu)G),$$

la projection orthogonale sur le sous-fibré propre $V^\pm$. Cet opérateur est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro et son symbole principal $\sigma(P^{\pm}_{CHI})(u)$ (pour $u \in T(\partial M)$) coïncide avec l'opérateur lui-même, c'est-à-dire :

$$\sigma(P^{\pm}_{CHI})(u) = \frac{1}{2}(Id \pm \gamma(\nu)G).$$

On vérifie sans trop de difficultés que l'opérateur $P^{\pm}_{CHI}$ définit une condition à bord locale et elliptique au sens de Lopatinsky-Shapiro. De plus, le spectre de l'opérateur de Dirac sous cette condition à bord est constitué d'une suite de nombres réels non bornée $(\lambda^{\pm}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\begin{cases} D\varphi^{\pm}_k = \lambda^{\pm}_k \varphi^{\pm}_k & \text{sur } M \\ P^{\pm}_{CHI}\varphi^{\pm}_{k\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases}$$

(2) **La condition** (MIT)**.** Cette condition à bord a été introduite dans les années soixante-dix par des physiciens du Massachusetts Institute of Technology afin de donner un modèle de particules élémentaires situées dans une région finie de l'espace (voir [13], [12] ou [28]). On considère ici l'application :

$$i\gamma(\nu) : \Gamma(\mathbf{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}).$$

Cet endomorphisme étant clairement involutif, le fibré $\mathbf{S}$ se décompose en une somme directe de deux sous-fibrés propres associés aux valeurs propres 1 et -1 (qui ont même multiplicité). De la même manière que dans le cas de la condition (CHI), on note $V^{\pm} \longrightarrow \partial M$ le sous-fibré propre associé à la valeur propre ± 1 au-dessus de ∂M. La condition à bord $P^{\pm}_{MIT}$ est donc définie comme étant la projection orthogonale sur $V^{\pm}$ donnée par :

$$P^{\pm}_{MIT} = \frac{1}{2}(Id \pm i\gamma(\nu)).$$

On vérifie que cet opérateur définit bien une condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac de la variété M en remarquant que son symbole principal est donné par :

$$\sigma(P^{\pm}_{MIT})(u) = \frac{1}{2}(Id \pm i\gamma(\nu)),$$

et qu'il satisfait les conditions d'ellipticité au sens de Lopatinsky-Shapiro.

Remarque 2.3. — Les deux conditions à bord précédemment définies sont invariantes par changement conforme de métriques. En effet, on peut se convaincre assez facilement que si $(P^{\pm}_{CHI})_u$ (resp. $(P^{\pm}_{MIT})_u$) désigne la condition à bord (CHI) (resp. (MIT)) dans une métrique $g_u = e^{2u}g \in [g]$, alors :

$$P^{\pm}_{CHI}\phi_{|\partial M} = 0 \Leftrightarrow (P^{\pm}_{CHI})_u\phi_{u\,|\partial M} = 0,$$
$$P^{\pm}_{MIT}\phi_{|\partial M} = 0 \Leftrightarrow (P^{\pm}_{MIT})_u\phi_{u\,|\partial M} = 0$$

pour $\phi \in \Gamma(\Sigma M)$. Notons que l'opérateur de chiralité qui définit la condition (CHI) dans la métrique g_u est donné par :

$$G_u : \phi_u \longmapsto G_u\phi_u := (G\phi)_u.$$

3. Un petit détour par le problème de Yamabe sur les variétés à bord

Les minorations que l'on va donner relient le spectre d'opérateurs de Dirac et le spectre de différents opérateurs intervenant dans le problème de Yamabe sur les variétés à bord. On consacre donc cette section à la définition de ces opérateurs et on donne quelques éléments de la résolution de ce problème. Le problème de Yamabe dans le contexte des variétés riemanniennes compactes sans bord étant assez couramment traité dans la littérature (voir [19] ou encore [29]), on se contentera de rappeler les grandes étapes de sa résolution et on insistera plus sur le cadre des variétés à bord.

Dans les années soixante, Yamabe (voir [51]) annonce avoir démontré que toute variété riemannienne compacte (M^n, g) possède une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante. Il ramène ce problème de nature géométrique à la résolution d'une équation elliptique non linéaire. Cependant, Trüdinger [49] montre qu'il y a une erreur dans l'article de Yamabe mais prouve que le résultat reste vrai lorsqu'un certain invariant conforme, l'invariant de Yamabe (défini par (1.5)), est négatif ou nul. Le cas où cet invariant est positif a été résolu en deux temps. Tout d'abord par Aubin (voir [7]), dans le cas où la variété n'est pas localement conformément plate et de dimension $n \geqslant 6$, et deuxièment dans les cas restant par Schoen (voir [46]) à l'aide du théorème de la masse positive.

Dans le cadre des variétés à bord, la majeure partie des résultats que nous allons énoncer est dûe à Escobar. On s'intéresse ici aux deux problèmes suivants : sur une variété (M^n, g) de dimension $n \geqslant 3$, riemannienne, compacte et à bord lisse, peut-on trouver une métrique $\overline{g}_i$ $(i = 1, 2)$ conforme à g telle que :

(1) la courbure scalaire est constante et le bord est minimal (*i.e.* la courbure moyenne est nulle) pour la métrique $\overline{g}_1$?

(2) la courbure scalaire est nulle et la courbure moyenne est constante pour la métrique $\overline{g}_2$?

3.1. Déformation conforme à courbure scalaire constante et à courbure moyenne nulle

Le problème posé en (1) ci-dessus se ramène à la résolution d'un problème à bord elliptique non linéaire. En effet, si le système :

$$\begin{cases} Lu := 4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = \mathrm{C}\, u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{sur } M \\ Bu_{|\partial M} := (-\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial \nu} + H)u = 0 & \text{le long de } \partial M, \end{cases} \tag{PY}$$

où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, admet une solution lisse $u > 0$ alors la métrique $g_u = u^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$ est à courbure scalaire constante égale à C et à courbure moyenne nulle. Pour cela, il suffit de remarquer que si $g_f = f^{\frac{4}{n-2}} g$, les courbures scalaires et moyennes de ces deux métriques conformes sont reliées par :

$$R_f = f^{-\frac{n+2}{n-2}} Lf \quad \text{et} \quad H_f = f^{-\frac{n}{n-2}} Bf, \tag{3.1}$$

où R_f (resp. H_f) désigne la courbure scalaire (resp. moyenne) de (M^n, g_f) (resp. de $(\partial M, g_f)$ dans (M^n, g_f)). On rappelle que L est le laplacien conforme et B est l'opérateur de courbure moyenne conforme. On vérifie alors sans trop de difficultés que ce problème possède une solution lisse $u \geqslant 0$ si et seulement si la fonction u est un point critique de la fonctionnelle :

$$\mathrm{Y}(v) = \frac{\int_M \big(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla v|^2 + R\, v^2\big)dv + 2(n-1)\int_{\partial M} H\, v^2 ds}{\Big(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}} dv\Big)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{3.2}$$

La difficulté pour résoudre (PY) vient du problème suivant : l'injection de Sobolev qui intervient dans une approche variationnelle classique est $\mathrm{H}_1^2(M) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ et elle n'est pas compacte, ce qui rend cette approche inefficace. L'idée est de construire, pour tout $2 \leqslant q < \frac{2n}{n-2}$, une famille (u_q) de solutions strictement positives aux équations sous-critiques :

$$\begin{cases} Lu_q = \mathrm{C_q} u_q^{q-1} & \text{sur } M \\ Bu_{q|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M, \end{cases}$$

où $\mathrm{C_q} \in \mathbb{R}$. L'intérêt de considérer ce système vient du fait que l'on récupère la compacité de l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(M) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(M)$ pour tout $2 \leqslant q < \frac{2n}{n-2}$ et qu'on peut ainsi utiliser des méthodes standards pour prouver l'existence de u_q. On montre ensuite que la suite $(u_q)_q$ converge vers une fonction $u \in$

$C^\infty(M)$ strictement positive ou identiquement nulle, solution du problème à bord (PY). Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que la fonction u est strictement positive. Pour cela, Escobar remarque, par analogie avec le cas où la variété est sans bord, que l'on peut résoudre ce problème en étudiant un invariant conforme de (M^n, g), l'invariant de Yamabe. Cet invariant défini par :

$$Y(M, \partial M) = \inf_{v \in \mathrm{C}^1(M)} \mathrm{Y}(v) \tag{3.3}$$

fournit un critère permettant d'exclure la solution $u \equiv 0$. En effet, on a :

$$Y(M, \partial M) < Y(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = n(n-1)\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{2}{n}} \quad \Rightarrow \quad u > 0, \tag{3.4}$$

où $Y(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ est l'invariant de Yamabe de l'hémisphère de dimension n munie de sa métrique standard et $\omega_n = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, g_{st})$. Notons que pour toute variété M muni d'une métrique riemannienne g, on a :

$$Y(M, \partial M) \leqslant Y(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+). \tag{3.5}$$

Une première étape pour montrer que cette inégalité est stricte consiste à trouver des caractères géométriques, invariants par changement conforme, qui différencient toutes variétés de l'hémisphère ronde. On a par exemple les critères suivants :

– Si le bord ∂M possède un point non ombilique ; c'est-à-dire qu'il existe $p \in \partial M$ tel que le tenseur d'ombilicité $\mathcal{O} = A - Hg$ est non nulle au point p.
– Si la variété est non localement conformément plate ; alors il existe un point où le tenseur de Weyl de M est non nulle.
– Si la variété est localement conformément plate et le bord est totalement ombilique, on définit la masse de la variété comme étant le terme constant de la partie régulière du développement de la fonction de Green du laplacien conforme L sous la condition à bord B. Ensuite, le théorème de la masse positive affirme dans ce cas que cette constante est strictement positive à moins que la variété soit conformément difféomorphe à l'hémisphère ronde. Ce résultat est prouvé dans [14] ou bien dans [40] en utilisant les spineurs.

En construisant des fonctions-test adéquates et en utilisant entre autres les propriétés géométriques décrites ci-dessus, Escobar prouve le théorème suivant :

Théorème 3.1. — ([15]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse et de dimension $n \geqslant 3$, il existe alors une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante et dont le bord ∂M*

est minimal, sauf si la variété satisfait les quatre propriétés suivantes à la fois : $n \geqslant 6$, M est non localement conformément plate mais son tenseur de Weyl s'annule sur ∂M qui est ombilique.

Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement à la première valeur propre du laplacien conforme pour la condition B, c'est-à-dire au problème :

$$\begin{cases} Lf_1 = \lambda_1(L) f_1 & \text{sur } M \\ Bf_{1\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases} \tag{PVY}$$

Il est facile de vérifier que ce problème possède une solution lisse f_1 que l'on peut choisir strictement positive. La caractérisation variationnelle de $\lambda_1(L)$ est donnée par le quotient de Rayleigh suivant :

$$\lambda_1(L) = \inf_{v\in \mathrm{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M \left(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla v|^2 + R\,v^2\right)dv + 2(n-1)\int_{\partial M} H\,v^2 ds}{\int_M v^2 dv} \right\}. \tag{3.6}$$

Contrairement à l'invariant de Yamabe, cette valeur propre n'est pas invariante par changement conforme de métriques, mais on peut cependant vérifier que son signe l'est. En effet, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\lambda_1(L) > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0) \\ &\quad \Longleftrightarrow Y(M, \partial M) > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0) \\ &\quad \Longleftrightarrow \exists\ g_f \in [g] \text{ telle que } R_f > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0) \\ &\qquad\quad \text{et } H_f = 0. \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur les démonstrations de ces résultats, on pourra consulter [15].

3.2. Déformation conforme à courbure scalaire nulle et à courbure moyenne constante

Dans [14], Escobar étudie et résout en grande partie le problème (2) (voir aussi [33]). Ce problème se traite de la même manière que précédemment. En effet, un raisonnement analogue permet de constater que la résolution de ce problème est équivalente à prouver l'existence d'une fonction $\widetilde{u} \in C^\infty(M)$ et strictement positive satisfaisant l'équation elliptique non linéaire suivante :

$$\begin{cases} L\widetilde{u} = 0 & \text{sur } M \\ B\widetilde{u}_{|\partial M} = \widetilde{\mathrm{C}}\,\widetilde{u}_{|\partial M}^{\frac{n}{n-2}} & \text{le long de } \partial M \end{cases} \tag{PY2}$$

où $\widetilde{\mathrm{C}} \in \mathbb{R}$. Le fait est, qu'une fois encore, une approche variationnelle classique consistant à prouver l'existence d'une fonction minimisant la fonctionnelle :

$$\mathrm{Q}(v) = \frac{\int_M \left(\frac{2}{n-2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2(n-1)} R\, v^2\right) dv + \int_{\partial M} H\, v^2 ds}{\left(\int_{\partial M} |v|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n-1}}} \tag{3.7}$$

ne donne rien. En effet, cette méthode fait intervenir la trace $\mathrm{H}_1^2(M) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)$ qui est exactement l'injection de Sobolev où on perd la compacité. Cependant, on peut prouver l'existence de solutions à une famille d'équations sous-critiques et on peut montrer, qu'à extraction près d'une sous-suite, cette suite converge vers une solution lisse de l'équation (PY2). Là encore la difficulté provient du fait que la limite peut être identiquement nulle. Cependant un critère analogue à (3.4) permet d'exclure ce cas. En effet, on a :

$$Q(M, \partial M) < Q(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+) = \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{u} > 0, \tag{3.8}$$

où $Q(M, \partial M)$ est l'invariant de type Yamabe défini par :

$$Q(M, \partial M) = \inf_{v \in \mathrm{C}^1(M)} \mathrm{Q}(v). \tag{3.9}$$

Dans la section 5, on s'intéresse plus particulièrement à la première valeur propre associée au problème (PY2), *i.e.* :

$$\begin{cases} L f_2 = 0 & \text{sur } M \\ B f_{2\,|\partial M} = \lambda_1(B) f_{2\,|\partial M} & \text{le long de } \partial M. \end{cases} \tag{PVY2}$$

Cette valeur propre possède les mêmes propriétés conformes que $\lambda_1(L)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(B) > 0 \quad (\text{resp. } < 0,\ = 0) &\Longleftrightarrow Q(M, \partial M) > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, g_f \in [g] \text{ telle que } R_f = 0 \text{ et} \\ &\qquad H_f > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0) \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1(L) > 0 \text{ (resp. } < 0,\ = 0). \end{aligned}$$

La caractérisation variationnelle de $\lambda_1(B)$ est évidemment donnée par :

$$\lambda_1(B) = \inf_{v \in \mathrm{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M \left(\frac{2}{n-2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2(n-1)} R\, v^2\right) dv + \int_{\partial M} H\, v^2 ds}{\int_{\partial M} v^2 dv} \right\}. \tag{3.10}$$

4. Estimations conformes du spectre de l'opérateur de Dirac d'une variété à bord

Dans cette partie, on relie la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord (CHI) avec la première valeur propre $\lambda_1(L)$ du laplacien conforme définie en (3.6). Cette estimation conduit à la définition et à l'étude d'un nouvel invariant spinoriel conforme dans le cadre des variétés à bord. Cette section constitue une partie des résultats obtenus dans [38].

On supposera **dans toute cette section** (sauf mention du contraire) que (M^n, σ, g) est une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse et qu'elle est muni d'un **opérateur de chiralité** G. En particulier, tous les résultats qui suivent sont valables pour les variétés riemanniennes spinorielles de dimension paire puisque dans ce cas, un opérateur de chiralité est donné par l'action de Clifford de l'élément de volume du fibré ΣM.

Le premier résultat que l'on énonce constitue l'analogue de l'inégalité d'Hijazi (1.3) dans le cadre des variétés à bord. Il est à noter que dans le cadre fermé le cas d'égalité est atteint par toute variété qui possède un spineur de Killing réel $\varphi \in \Gamma(TM)$, c'est-à-dire un champ de spineurs propre pour l'opérateur de Dirac associé à la première valeur propre $\lambda_1(D) \neq 0$ satisfaisant :

$$\nabla_X \varphi = -\frac{\lambda_1(D)}{n}\gamma(X)\varphi$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$. La sphère ronde est un exemple de variété possédant ce type de spineurs mais il en existe d'autres (voir [9] pour une classification complète). On montre ici que, sous la condition à bord (CHI), le cas d'égalité est beaucoup plus rigide puisqu'il n'est réalisé que par l'hémisphère ronde. En effet, on a :

Théorème 4.1. — ([39]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n \geqslant 3$, à bord non vide ∂M et possédant un opérateur de chiralité G. Alors, la première valeur propre $\lambda_1^{\pm}$ de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord (CHI) satisfait :*

$$(\lambda_1^{\pm})^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)}\lambda_1(L).$$

De plus, on a égalité si et seulement si (M^n, g) est isométrique à une hémisphère standard.

Schéma de la preuve. — Soit $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ un spineur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition (CHI) associé à $\lambda_1^{\pm}$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} D\varphi = \lambda_1^{\pm}\varphi & \text{sur } M \\ P^{\pm}_{CHI}\varphi_{|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases}$$

Pour $g_f = f^{\frac{4}{n-2}} g$ (où $f \in C^\infty(M)$ et $f > 0$), on pose :

$$\psi_f = \big(f^{-\frac{n-1}{n-2}}\varphi\big)_f \in \Gamma(\Sigma_f M)$$

et ainsi en utilisant la covariance conforme (2.5) de l'opérateur de Dirac D et celle de la condition (CHI) (voir la remarque 2.3), on a :

$$\begin{cases} D_f\psi_f = \lambda_1^{\pm} f^{-\frac{2}{n-2}}\psi_f & \text{sur } M \\ (P^{\pm}_{CHI})_f\psi_{f\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases}$$

On écrit maintenant la formule de Reilly (2.7) dans la métrique g_f et à l'aide de (3.1) et de la condition à bord satisfaite par ψ_f, on obtient directement que :

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n}(\lambda_1^{\pm})^2 \int_M f^{-\frac{4}{n-2}}|\psi_f|_f^2 dv_f \geqslant \frac{1}{4}\int_M & f^{-\frac{n+2}{n-2}}(Lf)|\psi_f|_f^2 dv_f \\ &+ \int_{\partial M} \frac{n-1}{2} f^{-\frac{n}{n-2}}(Bf)|\psi_f|_f^2 ds_f \end{aligned}$$

où dv_f (resp. ds_f) est l'élément de volume de (M, g_f) (resp. $(\partial M, g_f)$. Pour conclure, il suffit de choisir comme poids conforme $f = f_1$ une fonction strictement positive satisfaisant (PVY), c'est-à-dire une fonction propre associée à la première valeur propre du laplacien conforme sous la condition à bord B. Si on a égalité, le champ φ est en fait un spineur de Killing. On considère ensuite la fonction définie par $F = \langle G\varphi, \varphi\rangle$ et on peut vérifier que c'est une fonction propre *non triviale* pour le laplacien sur les fonctions sous la condition à bord de Dirichlet associée à la valeur propre n. On est alors dans le cas d'égalité d'une estimation de Reilly [45] caractérisée par l'hemisphère ronde. Pour la réciproque, on montre dans la suite de cette section qu'il existe des champs de spineurs de Killing sur l'hémisphère qui satisfont la condition (CHI). $\square$

On obtient un résultat analogue en dimension 2. Son énoncé ne nécessite ni l'existence d'une structure spinorielle ni celle d'un opérateur de chiralité puisque ces deux conditions sont automatiquement satisfaites pour $n = 2$. Le résultat suivant constitue l'analogue du résultat de Bär [8] pour les surfaces compactes sans bord :

Théorème 4.2. — *([39]) Soit (M^2, g) une surface riemannienne compacte à bord non vide. La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord (CHI) satisfait :*

$$(\lambda_1^{\pm})^2 \geqslant \frac{2\pi\chi(M^2)}{\mathrm{Aire}(M^2, g)},$$

où $\chi(M^2)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M^2. De plus, on a égalité si et seulement si (M^2, g) est isométrique à une hémisphère ronde.

En utilisant les caractérisations variationnelles (3.6) et (3.3) de $\lambda_1(L)$ et de l'invariant de Yamabe $Y(M, \partial M)$ de (M^n, g), l'inégalité de Hölder donne :

$$\lambda_1(L) \geqslant \frac{Y(M, \partial M)}{\mathrm{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}}$$

et on obtient ainsi :

Corollaire 4.3. — *([39]) Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n \geqslant 2$ dont le bord lisse est non vide. Sous la condition à bord $P^{\pm}_{CHI}$, la première valeur propre $\lambda_1^{\pm}$ de l'opérateur de Dirac satisfait :*

$$(\lambda_1^{\pm})^2 \mathrm{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{n}{4(n-1)} Y(M, \partial M), \tag{4.1}$$

où $Y(M, \partial M)$ est l'invariant de Yamabe de la variété (M^n, g).

Remarque 4.4. — On obtient des résultats analogues aux théorèmes 4.1 et 4.3 pour le spectre de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT. Cependant, sous cette condition à bord, ses valeurs propres forment une suite de nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive ce qui constitue une difficulté supplémentaire par rapport à la condition précédente. Les estimations conformes que l'on obtient dans ce cas ne sont pas optimales. Cependant, dans [37], on obtient une estimation optimale de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous cette condition à bord dans le cadre classique (c'est-à-dire qui ne repose pas sur ses propriétés conformes) et on peut espérer que la méthode employée s'applique dans ce cadre.

Le corollaire 4.3 conduit à la définition d'un nouvel invariant spinoriel conforme sur les variétés à bord. Un invariant similaire a été et est encore l'objet de nombreuses recherches dans le cadre des variétés fermées (voir par exemple [3], [4] ou bien [5]).

DÉFINITION 4.5. — *Soit* $(M^n, \sigma, [g])$ *une variété compacte à bord lisse* ∂M *munie d'une structure spinorielle* σ *et d'une classe conforme de métriques riemanniennes* $[g]$*. On pose :*

$$\lambda_{\min}(M, \partial M) = \lambda_{\min}(M, \partial M, \sigma, [g]) := \inf_{g_u \in [g]} \left\{ |\lambda_1^{\pm}(g_u)| \mathrm{Vol}(M, g_u)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

où $\lambda_1^{\pm}(g_u)$ *est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition* $(P^{\pm}_{CHI})_u$ *sur* (M^n, g_u)*.*

Remarque 4.6. — La définition de l'invariant $\lambda_{\min}(M, \partial M)$ ne dépend pas du choix de $(P^{+}_{CHI})_u$ ou $(P^{-}_{CHI})_u$ et justifie la définition précédente.

Cet invariant possède des propriétés analogues à l'invariant de Yamabe de (M^n, g) comme l'invariance par changement conforme de métriques. On peut alors se demander si une estimation du type de (3.5) peut-être obtenue pour $\lambda_{\min}(M, \partial M)$. On montre en effet que c'est le cas :

THÉORÈME 4.7. — *([43]) Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide. Alors si* $n \geqslant 2$*, on a :*

$$\lambda_{\min}(M, \partial M) \leqslant \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.2}$$

où $\omega_n = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, g_{st})$*.*

La démonstration de ce résultat se divise en quatre parties distinctes :

(1) *Trouver une caractérisation variationnelle de* $\lambda_{\min}(M, \partial M)$*.* Ce premier point est obtenu sans trop de difficultés par :

PROPOSITION 4.8. — *([43]) Si on pose :*

$$J(\varphi) = \frac{\left(\int_M |D\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv \right)^{\frac{n+1}{n}}}{\left| \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Re}\langle D\varphi, \varphi \rangle dv \right|},$$

alors $\lambda_{\min}(M, \partial M) = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^{\pm}} J(\varphi)$*.*

Dans l'énoncé précédent, $\mathcal{C}^{\pm}$ désigne le supplémentaire L^2-orthogonal du noyau $\mathrm{Ker}^{\pm}(D)$ de l'opérateur de Dirac sous la condition $P^{\pm}_{CHI}$ dans :

$$\mathcal{H}^{\pm} := \{\varphi \in H_1^2 \ / \ P^{\pm}_{CHI} \varphi_{|\partial M} = 0\}.$$

(2) *L'étude détaillée du cas de l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$*.* On vérifie que sur $(\mathbb{S}^n_+, g_{st})$, il existe un champ de spineurs de Killing $\Phi \in \Gamma(\Sigma \mathbb{S}^n_+)$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla^{st} \Phi = -\frac{1}{2}\gamma(X)\Phi & \text{sur } \mathbb{S}^n_+ \\ P^{\pm}_{CHI} \Phi_{|\partial \mathbb{S}^n_+} = 0 & \text{le long de } \partial \mathbb{S}^n_+, \end{cases}$$

où ∇^{st} est la connexion de Levi-Civita standard sur $\mathbb{S}^n_+$. À l'aide de cette observation et de l'inégalité (4.1), on obtient que :

$$\lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Remarquons que la projection stéréographique :

$$F : (\mathbb{S}^n_+ \setminus \{m\}, g_{st}) \simeq (\mathbb{R}^n_+, f^2 eucl) \longrightarrow (\mathbb{R}^n_+, eucl) \tag{4.3}$$

pour $m \in \partial\mathbb{S}^n_+$ avec $f(x) = 2/(1 + ||x||^2)$ et $||x||^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$ induit une identification (voir (2.4)) des fibrés des spineurs au-dessus de $(\mathbb{S}^n_+ \setminus \{m\}, g_{st})$ et de $(\mathbb{R}^n_+, eucl)$ et que le spineur de Killing Φ sur $\mathbb{S}^n_+$ induit un spineur $\Psi \in \Gamma(\Sigma\mathbb{R}^n_+)$ satisfaisant :

$$D^{eucl}\Psi = \frac{n}{2} f\Psi$$

où D^{eucl} est l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^n_+$ muni de la métrique euclidienne *eucl*.

(3) *La construction d'une trivialisation adaptée du fibré des spineurs au voisinage d'un point $p \in \partial M$.* On considère le système de coordonnées de Fermi au voisinage de $p \in \partial M$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p : U \subset T_pM \simeq \mathbb{R}^n_+ &\longrightarrow V \subset M \\ (x_1, ..., x_{n-1}, t) &\longmapsto q \end{aligned}$$

où $(x_1, ..., x_{n-1})$ est un système de coordonnées normales du bord au point p et $t \mapsto \gamma(t) = t$ désigne la géodésique orthogonale à ∂M paramétrée par la longueur d'arc. Ce système de coordonnées permet ainsi d'identifier (localement) un champ de spineurs sur (V, g) avec un champ sur $(U, eucl)$. On notera cette identification :

$$\begin{aligned} \Sigma U &\longrightarrow \Sigma V \\ \psi &\longmapsto \overline{\psi}, \end{aligned}$$

où ΣV (resp. ΣU) est le fibré des spineurs (trivial) au-dessus de (V, g) (resp. $(U, eucl)$). Notons que grâce à cette identification, on peut relier les opérateurs de Dirac D de (V, g) et D^{eucl} de $(U, eucl)$.

(4) *La construction d'un spineur-test et son évaluation dans la caractérisation variationnelle précédemment obtenue.* Pour cela, on choisit un spineur constant Ψ_0 sur $\mathbb{R}^n_+$ et on pose :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{\frac{n}{2}}(r)\gamma(1 - x)\Psi_0(x) \in \Gamma\big(\Sigma\mathbb{R}^n_+\big), \tag{4.4}$$

où f est la fonction définie par (4.3). En choisissant une fonction η lisse sur M telle que :

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \mathrm{sur} \mathrm{B}_{\mathrm{p}}^{+}(\delta) \\ 0 & \mathrm{sur} \mathrm{M} \setminus \mathrm{B}_{\mathrm{p}}^{+}(2\delta) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad |\nabla\eta| \leqslant \frac{1}{\delta}$$

avec $\mathrm{B}_p^{+}(2\delta) := \{x \in V \,/\, x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + t^2 \leqslant 2\delta,\ t \geqslant 0\} \subset V$, on obtient un champ de spineurs sur M dont le support est contenu dans V en posant :

$$\overline{\varphi}_\varepsilon(x) = \eta(x)\overline{\varphi}(\frac{x}{\varepsilon}) \in \Gamma(\Sigma M).$$

Pour obtenir un “bon” spineur-test, il ne reste plus qu'à montrer que l'on peut choisir $\overline{\varphi}_\varepsilon$ satisfaisant la condition à bord (CHI). On peut s'en assurer à l'aide du lemme suivant :

Lemme 4.9. — *Soit U et V les deux ouverts de trivialisation induits par le système de coordonnées de Fermi. Si $\Psi_0 \in \Gamma\big(\Sigma\mathbb{R}^n_+\big)$ est un spineur constant tel que :*

$$P^{\mp}_{CHI}\overline{\Psi}_0(p) = 0$$

en un point $p \in V \cap \partial M$, alors $P^{\mp}_{CHI}\overline{\Psi}_{0|V\cap\partial M} = 0$.

On obtient ainsi le spineur-test en choisissant dans (4.4) le champ Ψ_0 sur $\mathbb{R}^n_+$ tel que $P^{\mp}_{CHI}\overline{\Psi}_0(p) = 0$ et ainsi le lemme 4.9 assure que $P^{\mp}_{CHI}\overline{\varphi}_{\varepsilon\,|\partial M} = 0$. Après des estimations assez conséquentes, on montre que :

$$\lambda_{\min}(M, \partial M) \leqslant J(\overline{\varphi}_\varepsilon) = \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) + o(1),$$

ce qui prouve le théorème 4.7.

En combinant cette estimation avec l'inégalité d'Hijazi obtenue dans le corollaire 4.3, on obtient une preuve spinorielle de l'inégalité (3.5) de Escobar. Plus précisément :

Corollaire 4.10. — ([43]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide ∂M dont l'invariant de Yamabe $Y(M, \partial M)$ est strictement positif, alors l'inégalité (3.5) est satisfaite. De plus, si :*

$$\lambda_{\min}(M, \partial M) < \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+), \tag{4.5}$$

il existe une métrique conforme à g dans laquelle la courbure scalaire est constante et dont le bord est minimal.

L'inégalité (4.5) fournit un critère analogue à celui obtenu par Escobar pour la résolution du problème de Yamabe à bord et motive donc la question suivante : *sous quelles conditions peut-on affirmer que (4.5) est satisfaite ?* Dans [40], on obtient une réponse partielle à cette question en étudiant la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition (CHI). D'autre part, on note que cette approche du problème du Yamabe fait apparaître des difficultées supplémentaires par rapport à la méthode standard. Ces difficultées proviennent en partie du fait que l'étude de l'invariant $\lambda_{\min}(M, \partial M)$ n'est pas directement liée au problème de Yamabe mais à l'existence (dans la classe conforme de g) d'une métrique minimisant cet invariant. Pour plus de détails sur ce problème, le lecteur intéressé pourra consulter [3] ou [2] pour le cadre des variétés fermées. Une autre application du théorème 4.7 et des résultats obtenus dans [4] est donnée par l'obtention d'une inégalité de type-Sobolev pour l'opérateur de Dirac avec une constante de Sobolev “presque” optimale (voir [44]).

5. Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur des hypersurfaces plongées

Dans cette section, on s'intéresse aux mêmes types de questions que celles abordées dans la partie précédente mais dans un contexte différent. En effet, on se demande ici si il est possible d'obtenir une estimation conforme de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac *du bord* $\widetilde{D}$. Plus précisément, si Ω est un domaine compact à bord lisse $\partial\Omega$ d'une variété riemannienne spinorielle (N^n, g), peut-on obtenir des estimations sur la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de $\partial\Omega$ en fonction d'invariants géométriques extrinsèques ? et si oui, peut-on obtenir des invariants conformes ? Ces questions ont été abordées par Hijazi, Montiel et Zhang (voir [25] et [26]) et la plupart des résultats que nous énonçons ici proviennent de ces travaux. La première estimation que nous présentons donne le parfait analogue de (1.3) dans le cadre extrinsèque. En effet, on a :

Théorème 5.1. — ([26]) *Soit Ω un domaine compact à bord lisse $\partial\Omega$ dans une variété riemannienne spinorielle (N^n, g). La première valeur propre $\lambda_1(\widetilde{D})$ de l'opérateur de Dirac de $\partial\Omega$ vérifie :*

$$\lambda_1(\widetilde{D}) \geqslant \frac{n-1}{2}\lambda_1(B), \tag{5.1}$$

où $\lambda_1(B)$ est la première valeur propre du problème à bord (PVY2)*. Si on a égalité, le domaine Ω possède une métrique $\overline{g} \in [g]$ telle que $(\Omega, \overline{g})$ admet* *un spineur parallèle. De plus, l'espace propre associé à* $\lambda_1(\widetilde{D})$ *est isomorphe à l'espace des spineurs obtenus par restriction à* $\partial\Omega$ *des spineurs parallèles sur* $(\Omega, \overline{g})$.

La démonstration de ce résultat repose sur deux points essentiels. Le premier consiste à montrer que l'opérateur de Dirac, sous une certaine condition à bord, est inversible. Ainsi on pourra prolonger de manière adéquate un spineur sur $\partial\Omega$ en un champ défini sur tout le domaine Ω. Le deuxième ingrédient réside dans le choix d'un changement conforme adapté similaire à ceux utilisés pour prouver l'inégalité (1.3) ou celle obtenue dans le théorème 4.1.

Une propriété importante intervenant dans le choix de la condition à bord est la propriété d'invariance conforme. En utilisant la remarque 2.3, on voit que les conditions (CHI) et (MIT) décrites dans la section 2.4 fournissent des candidats potentiels. Cependant, la condition (CHI) nécessite l'existence d'un opérateur de chiralité. On peut donc supposer que le candidat idéal pour aborder ce problème est la condition (MIT) et c'est effectivement le cas puiqu'on a :

LEMME 5.2. — *L'opérateur de Dirac sur* Ω *défini par :*

$$D : \{\varphi \in H_1^2 \,/\, P^{\pm}_{MIT}\varphi_{|\partial\Omega} = 0\} \longrightarrow L^2$$

est inversible.

Dans l'énoncé précédent, L^2 (resp. H_1^2) désigne le complété pour la norme :

$$||\varphi||_2^2 := \int_\Omega |\varphi|^2 dv < +\infty \quad (\text{resp.} \quad ||\varphi||_{2,1} = ||\varphi||_2 + ||\nabla\varphi||_2 < +\infty)$$

de l'espace des spineurs lisses sur Ω. À l'aide de ce lemme, on est en mesure de donner la démonstration de l'inégalité (5.1).

Schéma de la preuve du Théorème 5.1. — Remarquons que si $g_f = f^{\frac{4}{n-2}} g$ est un changement conforme de métriques sur Ω alors pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, la formule de Reilly spinorielle (2.7) s'écrit dans la métrique g_f :

$$\frac{1}{4}\int_\Omega (f^{-1}Lf)|\psi|^2 dv - \frac{n-1}{n}\int_\Omega |D_f\psi_f^*| dv_f \leqslant \int_{\partial\Omega} \big(\langle \widetilde{D}\psi, \psi\rangle - \frac{n-1}{2}(f^{-1}Bf)|\psi|^2\big) ds$$

où ψ_f^* est l'image par l'identification (2.4) du champ de spineurs $\psi^* = f^{-1}\psi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$. Soit maintenant $\Phi \in \Gamma(\mathbf{S})$ un champ de spineurs propre pour l'opérateur $\widetilde{D}$ associé à la valeur propre $\lambda_1(\widetilde{D})$. Le lemme 5.2 assure l'existence d'un unique $\phi_f^* \in \Gamma(\Sigma_f\Omega)$ satisfaisant le problème à bord :

$$\begin{cases} D_f\phi_f^* = 0 & \text{sur } \Omega \\ (P_{MIT}^{\pm})_f\phi^*_{f\,|\partial\Omega} = (P_{MIT}^{\pm})_f(f^{-1}\Phi_f) & \text{le long de } \partial\Omega. \end{cases}$$

La formule de Reilly appliquée à ϕ_f^* donne :

$$\frac{1}{4}\int_\Omega (f^{-1}Lf)|\phi|^2dv \leqslant \int_{\partial\Omega}\big(\lambda_1(\widetilde{D}) - \frac{n-1}{2}(f^{-1}Bf)\big)|\phi|^2ds$$

où $\phi = f\phi^* \in \Gamma(\Sigma\Omega)$. Il est clair maintenant que si on choisit le facteur conforme $f = f_2$ une solution lisse et strictement positive du problème à bord (PVY2), on obtient le résultat annoncé. Si on a égalité, on vérifie que le champ de spineurs $\phi^*_{f_2}$ est parallèle et en particulier la métrique g_{f_2} est Ricci-plate. D'autre part, l'application :

$$\phi^*_{f_2\,|\partial\Omega} \longmapsto f_2\phi^*_{|\partial\Omega}$$

définit un isomorphime entre l'espace des restrictions à $\partial\Omega$ des spineurs parallèles sur (Ω, g_{f_2}) et l'espace propre associé à $\lambda_1(\widetilde{D})$. □

En utilisant la discussion de la section 3.2, on obtient une version extrinsèque de l'inégalité (1.4) :

Corollaire 5.3. — ([26]) *Sous les hypothèses du Théorème 5.1, on a :*

$$\lambda_1(\widetilde{D})\mathrm{Vol}(\partial\Omega, g)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{n-1}{2}Q(\Omega,\partial\Omega),$$

où $Q(\Omega,\partial\Omega)$ est l'invariant de type Yamabe défini en (3.9).

Encore une fois à l'aide du théorème 5.1, on donne une version extrinsèque de l'inégalité de Friedrich (1.2), la courbure moyenne de $\partial\Omega$ prenant le rôle de sa courbure scalaire.

Théorème 5.4. — ([25]) *Soit Ω un domaine compact d'une variété riemannienne spinorielle (N^n, g). Supposons que la courbure scalaire de (N^n, g) est positive ainsi que la courbure moyenne H de $(\partial\Omega, g)$ dans (Ω, g). Alors la première valeur propre $\lambda_1(\widetilde{D})$ de l'opérateur de Dirac de $\partial\Omega$ vérifie :*

$$\lambda_1(\widetilde{D}) \geqslant \frac{n-1}{2}\inf_{\partial\Omega} H.$$

De plus, on a égalité si et seulement si le domaine (Ω, g) possède un spineur parallèle, l'hypersurface $\partial\Omega$ est à courbure moyenne constante et l'espace propre associé à $\lambda_1(\widetilde{D})$ consiste en la restriction à $\partial\Omega$ des spineurs parallèles sur (Ω, g).

Démonstration. — Il suffit de remarquer en utilisant la caractérisation variationnelle (3.10) de $\lambda_1(B)$, que puisque la courbure scalaire est supposée positive, on a :

$$\lambda_1(B) \geqslant \inf_{\partial\Omega} H.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la courbure scalaire de (Ω, g) est nulle et si les fonctions propres associées à $\lambda_1(B)$ sont les constantes (non nulles). Le cas d'égalité se déduit de celui du Théorème 5.1 puisque dans ce cas la fonction f_2 est constante. □

Remarque 5.5. — Ce type de questions a été étudié dans le cadre du laplacien agissant sur les fonctions. En effet, on sait, depuis Lichnerowicz [30] et Obata [36] que si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte dont la courbure de Ricci est telle que $Ric \geqslant (n-1)g$ $(k > 0)$, alors la première valeur propre μ_1 du laplacien agissant sur les fonctions satisfait :

$$\mu_1 \geqslant n.$$

De plus, on a égalité si et seulement si (M^n, g) est isométrique à la sphère ronde de rayon 1. L'analogue de cette estimation dans le cadre extrinsèque a été obtenu par Xia [50]. Plus précisément, si (Ω^n, g) est une variété riemannienne compacte à bord lisse $\partial\Omega$ telle que la courbure de Ricci de Ω vérifie $Ric \geqslant 0$ et la seconde forme fondamentale de $\partial\Omega$ est telle que $A \geqslant c$ $(c > 0)$, alors la première valeur propre μ_1 du laplacien de $\partial\Omega$ vérifie :

$$\mu_1 \geqslant (n-1)c^2.$$

De plus, on a égalité si et seulement si (Ω^n, g) est isométrique à la boule euclidienne de rayon $1/c$. Dans un travail actuellement en cours [42], on étudie ce type de questions pour le laplacien de Hodge agissant sur les formes et on obtient une inégalité du type Gallot-Meyer [17] dans le cadre extrinsèque.

Grâce à ces estimations, on est en mesure de donner des preuves simples de résultats géométriques. Le premier résultat auquel nous nous intéressons est un théorème d'Alexsandrov et nous présentons ici la preuve de Hijazi, Montiel et Zhang :

Corollaire 5.6. — ([1],[45],[25]) *Une hypersurface compacte plongée à courbure moyenne constante dans l'espace euclidien est une sphère ronde.*

Démonstration. — Puisque l'hypersurface compacte est plongée, elle borde un domaine compact Ω de $\mathbb{R}^n$ et il faut donc montrer que $\partial\Omega$ est une sphère ronde. D'autre part, on peut vérifier (voir [35]) que dans ce cas la courbure moyenne doit être strictement positive. On choisit $\Psi \in \Gamma(\Sigma\mathbb{R}^n)$

un champ de spineurs parallèles sur $\mathbb{R}^n$. En utilisant (2.3) et le fait que la courbure moyenne est constante, on vérifie que sa restriction à $\partial\Omega$ est un spineur propre pour l'opérateur de Dirac $\widetilde{D}$ associé à la valeur propre $\frac{n-1}{2}H$. On définit alors pour $p \in \partial\Omega$ le spineur :

$$\psi(p) := \gamma(\nu_p + Hp)\Psi(p)$$

où ν_p est le champ de vecteurs normal unitaire à $\partial\Omega$ au point p. Si ce champ est identiquement nul, on vérifie facilement que dans ce cas Σ est totalement ombilique et donc une sphère (puisque compacte). Si on suppose que ψ n'est pas trivial, on calcule que c'est un spineur propre pour $\widetilde{D}$ associée à la valeur propre $\frac{n-1}{2}H$. En utilisant le théorème 5.4, on obtient l'existence d'un champ de spineurs parallèle $\Phi \in \Gamma(\Sigma\mathbb{R}^n)$ tel que $\Phi_{|\Sigma} = \psi$. On a alors pour $X \in \Gamma\big(\Sigma(\partial\Omega)\big)$:

$$0 = \nabla_X \Phi = \nabla_X \psi = \gamma\big(HX - A(X)\big)\Psi$$

et ainsi $\partial\Omega$ est totalement ombilique car Ψ n'a pas de zéros. □

La deuxième application est donnée par un théorème de rigidité pour la boule unité de l'espace euclidien. Ce résultat a été obtenu par Miao [34] à l'aide d'un théorème de la masse positive. On en présente ici une preuve élémentaire obtenue dans [41] découlant directement du théorème 5.4. On notera que même dans l'énoncé de Miao, on suppose la variété munie d'une structure spinorielle puisque le théorème de la masse positive qu'il utilise est démontré à la Witten, c'est-à-dire en utilisant les spineurs.

Corollaire 5.7. — ([34],[41]) *Soit (Ω^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geqslant 3$ à bord lisse $\partial\Omega$ dont la courbure scalaire satisfait $R \geqslant 0$. Supposons de plus que le bord est isométrique à la sphère standard $\mathbb{S}^{n-1}$ et que sa courbure moyenne vérifie $H \geqslant 1$. Alors (Ω^n, g) est isométrique à la boule unité de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — Puisque le bord $(\partial\Omega, g)$ est isométrique à la sphère ronde, on peut trivialiser son fibré des spineurs par $2^{[\frac{n-1}{2}]}$ spineurs de Killing, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\nabla^{\partial\Omega}\psi_i = -\frac{1}{2}\gamma^{\partial\Omega}(X)\psi_i$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial\Omega)\big)$. À l'aide des identifications des fibrés $\Sigma(\partial\Omega)$ et $\mathbf{S}$ (voir la remarque 2.2), on construit $2^{[\frac{n}{2}]}$ champs de spineurs $\widetilde{\psi}_i \in \Gamma(\mathbf{S})$ tels que :

$$\nabla^{\mathbf{S}}\widetilde{\psi}_i = -\frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}(X)\widetilde{\psi}_i$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial\Omega)\big)$. Il est facile de vérifier que ces spineurs sont des spineurs propres de l'opérateur de Dirac $\widetilde{D}$ associées à la valeur propre $\frac{n-1}{2}$. D'autre part, puisque $H \geqslant 1$, le théorème 5.4 assure que pour tout $i \in \{1, \cdots, 2^{[\frac{n}{2}]}\}$, il existe un champ de spineurs parallèles $\Psi_i \in \Gamma(\Sigma\Omega)$ tel que $\Psi_{i\,|\partial\Omega} = \widetilde{\psi}_i$ et on a ainsi une base de $\Sigma\Omega$ formée de $2^{[n/2]}$ spineurs parallèles. D'autre part, en utilisant la formule de Gauss spinorielle, on vérifie que $\partial\Omega$ est totalement ombilique. En résumé, on a montré que Ω est un domaine compact plat dont le bord est une sphère ronde totalement ombilique, la variété (Ω^n, g) est donc isométrique à la boule unité de $(\mathbb{R}^n, eucl)$. $\square$

Pour finir, on notera que des résultats utilisant ces méthodes sont obtenus dans [22] et plus récemment dans [41] où on donne en particulier une preuve d'une conjecture de Schroeder et Strake [47] dans le cadre spinoriel (voir aussi [18]). Le cas des variétés à courbure scalaire minorée par une constante négative est traité dans [23] et [41].

BIBLIOGRAPHIE

1. A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5–17.

2. B. Ammann, *A variational problem in conformal spin geometry*, Ph.D. thesis, Habilitationsschrift, Universität Hamburg, 2003.

3. ______, *The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions*, Preprint IECN, 2004.

4. B. Ammann, J.F. Grosjean, E. Humbert, and B. Morel, *A spinorial analogue of Aubin's inequality*, Math. Zeit. **260** (2008), no. 1, 127–151.

5. B. Ammann, E. Humbert, and B. Morel, *Mass endomorphism and spinorial Yamabe type problem on conformally flat manifolds*, Comm. Anal. Geom. **14** (2006), no. 1, 163–182.

6. M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. of Math. **87** (1962), 484–530.

7. T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pur. Appl. IX. Ser. (1976), 269–296.

8. C. Bär, *Lower eigenvalue estimates for Dirac operators*, Math. Ann. **293** (1992), 39–46.

9. ______, *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys. **154** (1993), 509–521.

10. B. Booß-Bavnbek and K. P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for the Dirac operator*, Birkhäuser, Basel, 1993.

11. J.P. Bourguignon and P. Gauduchon, *Spineurs, opŕateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. (1992), 581–599.

12. A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, *Baryon structure in the bag theory*, Phys. Rev. D **10** (1974), 2599–2604.

13. A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D **9** (1974), 3471–3495.

14. J. F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50, Addendum in **139** (1994), 749-750.
15. ______, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 21–84.
16. Th. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalar-krümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117–146.
17. S. Gallot and D. Meyer, *Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appl. **54** (1975), 259–284.
18. F. Hang and X. Wang, *Vanishing sectional curvature on the boundary and a conjecture of Schroeder and Strake*, Pac. J. Math. **232** (2007), no. 2, 283–288.
19. E. Hebey, *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*, Diderot Editeur and Arts et sciences, 1997, Humboldt-Universität zu Berlin.
20. O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. **25** (1986), 151–162.
21. ______, *Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe*, C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 865–868.
22. O. Hijazi and S. Montiel, *Extrinsic Killing spinors*, Math. Zeit. **244** (2003), 337–347.
23. O. Hijazi, S. Montiel, and A. Roldán, *Dirac operator on hypersurfaces in negatively curved manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 247–264.
24. O. Hijazi, S. Montiel, and S. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), 375–390.
25. O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 195–208.
26. ______, *Conformal lower bounds for the Dirac operator of embedded hypersurfaces*, Asian J. Math. **6** (2002), 23–36.
27. N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. Math. **14** (1974), 1–55.
28. K. Johnson, *The M.I.T bag model*, Acta Phys. Pol. **B6** (1975), 865–892.
29. J. M. Lee and T. H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **17** (1987), 37–91.
30. A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
31. ______, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9, Série A-B.
32. J. Lopatinsky, *On a method for reducing boundary problem for systems of differential equations of elliptic type to regular integral equations*, Ukrain. Math. **5** (1953), 125–151.
33. F.C. Marques, *Conformal deformations to scalar-flat metrics with constant mean curvature on the boundary*, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), no. 2, 381–405.
34. P. Miao, *Positive mass theorem on manifolds admitting corners along a hypersurface*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003), 1163–1182.
35. S. Montiel and A. Ros, *Compact hypersurfaces : the Alexandrov theorem for higher order mean curvature*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. (in honor of M.P. Do Carmo ; edited by B. Lawson and K. Tenenblat) **52** (1991), 279–286.
36. M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), no. 3, 333–340.
37. S. Raulot, *Optimal eigenvalue estimates for the Dirac operator on domains with boundary*, Letters in Mathematical Physics **73** (2005), no. 2, 135–145.

38. ———, *Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2006.

39. ———, *The Hijazi inequality on manifolds with boundary*, J. Geom. Phys. **56** (2006), 2189–2202.

40. ———, *Green functions for the Dirac operator under local boundary conditions and applications*, Prépublication IECN, 2007.

41. ———, *Rigidity of compact Riemannian spin manifolds with boundary*, Letters in Mathematical Physics **86** (2008), no. 2, 177–192.

42. ———, *The Hodge Laplacian en embedded hypersurfaces*, en cours de rédaction, 2009.

43. ———, *On a spin conformal invariant on manifolds with boundary*, Math. Zeit. **261** (2009), no. 2, 321–349.

44. ———, *A Sobolev-like inequality for the Dirac operator*, à paraître dans J. Funct. Anal., 2009.

45. R.C. Reilly, *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indian Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.

46. R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 473–495.

47. V. Schroeder and M. Strake, *Rigidity of convex domains in manifolds with nonnegative Ricci and sectional curvature*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 173–186.

48. R. Seeley, *Singular integrals and boundary problems*, Amer. J. Math. **88** (1968), 781–809.

49. N.S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser. **22** (1968), 265–274.

50. C. Xia, *Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative Ricci curvature*, Proc. AMS **125** (1997), 1801–1806.

51. H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. (1960), 21–37.

Simon Raulot
Université de Neuchâtel
Institut de Mathématiques
Rue Emile-Argand 11
2007 Neuchâtel (Suisse)
simon.raulot@unine.ch