

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Hervé PAJOT

Plongements bilipschitziens dans les espaces euclidiens, Q -courbure et flot quasi-conforme

Volume 25 (2006-2007), p. 149-158.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2006-2007__25__149_0>

© Institut Fourier, 2006-2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

PLONGEMENTS BILIPSCHITZIENS DANS LES ESPACES EUCLIDIENS, Q -COURBURE ET FLOT QUASI-CONFORME

Hervé Pajot

À la mémoire de Juha Heinonen (1960-2007)

RÉSUMÉ. — Soit g_0 la métrique riemannienne standard sur \mathbb{R}^4 et soit $g = e^{2u}$ une déformation conforme lisse de g_0 . Nous présentons une condition suffisante en terme de Q -courbure pour que la variété (\mathbb{R}^4, g) se plonge de façon bilipschitzienne, en tant qu'espace métrique, dans (\mathbb{R}^4, g_0) . Ce théorème du à Bonk, Heinonen et Saksman découle d'un résultat lié au problème du jacobien quasiconforme.

Une application entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est bilipschitzienne s'il existe une constante $C_{bil} > 0$ telle que

$$C_{bil}^{-1}d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C_{bil}d_X(x_1, x_2)$$

pour tout $x_1 \in X$, tout $x_2 \in X$. Nous dirons que l'espace métrique peut être plongé de façon bilipschitzienne dans l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, d_{eucl}) s'il existe une application bilipschitzienne de (X, d) dans (\mathbb{R}^n, d_{eucl}) qui soit un homéomorphisme de X dans $f(X)$.

PROBLÈME 1.1. — *Caractériser les espaces métriques que l'on peut plonger de façon bilipschitzienne dans un espace euclidien.*

Commençons par un résultat encourageant du à Assouad (voir [1]).

THÉORÈME 1.2. — *Soit (X, d) un espace métrique doublant. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, l'espace métrique (X, d^ε) admet un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien.*

Nous rappelons que l'espace métrique (X, d) est doublant s'il existe $C_d \geq 1$ telle que toute boule de rayon R peut être recouverte par au

plus C_d boules de rayon $\frac{R}{2}$. Par exemple, si (X, d) supporte une mesure doublante (positive) μ , c'est à dire qu'il existe une constante $C_{dv} > 0$ telle que $\mu(B(x, 2R)) \leq C_{dv}\mu(B(x, R))$ pour tout $x \in X$, tout $R \in]0, \text{diam}X[$, alors (X, d) est un espace métrique doublant.

Nous pouvons nous demander si le théorème d'Assouad reste vrai pour $\varepsilon = 1$, ce qui résolverait le problème 1. En fait, il est faux. Pour voir cela, on peut considérer le cas du groupe de Heisenberg. Dans le cas euclidien, le théorème de Rademacher dit que toute application lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable presque partout. Dans le cas du groupe de Heisenberg, il en existe une version due à Pansu (voir [16]). Il s'en déduit que le groupe d'Heisenberg n'admet pas de plongement bilipschitzien f dans un espace euclidien \mathbb{R}^n . En effet, d'après Pansu, le plongement f admet une différentielle presque partout, cette différentielle étant un homomorphisme d'algèbre entre l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg et celle de \mathbb{R}^n . Mais, la première n'est pas commutative alors que la seconde l'est. Donc, la différentielle a un noyau non trivial, ce qui contredit le fait que l'application f est bilipschitzienne (voir [17] pour plus de détails). Ce type d'argument s'adapte pour des espace métriques mesurés à géométrie bornée et pour lesquels il existe des théorèmes de type Rademacher (voir [8] et [9]).

Notons que si nous relaxons les conditions sur le plongement, il est possible de répondre à la question de départ. Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est dite quasi-symétrique s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout x_1, x_2 et x_3 dans X , et tout $t > 0$,

$$d_X(x_1, x_2) \leq td_X(x_1, x_3) \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \phi(t)d_Y(f(x_1), f(x_3)).$$

Il est clair qu'une application bilipschitzienne est quasi-symétrique (avec $\phi(t) = C_{bil}^2 t$).

THÉORÈME 1.3. — *Un espace métrique (X, d) peut être plongé quasi-symétriquement dans un espace euclidien si et seulement si il est doublant.*

Voir [14] pour une démonstration. Une réponse partielle dans le cas des variétés est donnée par cette version faible du théorème de Nash (voir [13]).

THÉORÈME 1.4. — *Toute variété fermée (compacte, sans bord) admet un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien.*

Nous allons maintenant aborder une variante du problème 1.1.

PROBLÈME 1.5. — *Étant donné $n \in \mathbb{N}$, caractériser les variétés riemanniennes (M, g) de dimension n qui sont bilipschitz équivalentes à l'espace euclidien \mathbb{R}^n .*

La conclusion signifie que si d_g est la distance associée à la métrique g , il existe un homéomorphisme bilipschitzien de (M, d_g) dans (\mathbb{R}^n, d_{eucl}) .

Commençons par voir ce qui se passe pour $n = 2$ et décrivons un résultat de Toro (voir [18] et [19] dans lequel elle utilise la méthode de Reifenberg).

THÉORÈME 1.6. — *Si U est un domaine de \mathbb{R}^2 et si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ a des dérivées secondes (au sens des distributions) de carré intégrable, alors le graphe de f (au dessus de U) est une sous-variété lipschitzienne de \mathbb{R}^3 .*

Nous rappelons qu'une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété lipschitzienne si tout point de M admet un voisinage avec une paramétrisation locale bilipschitzienne (la distance sur M est la distance euclidienne induite).

Soit K^* la plus petite solution positive de l'équation

$$\pi/4 - K^* - \tan(K^*/2) = 0.$$

Fu a démontré le résultat suivant dont la preuve repose sur la formule de Gauss-Bonnet (voir [12]).

THÉORÈME 1.7. — *Soit S une surface riemannienne complète, simplement connexe telle que la courbure totale absolue $K_0 = \int |K|$ (où K est la courbure de Gauss de S) vérifie $K_0 < K^*$. Alors, S est bilipschitz équivalente à \mathbb{R}^2 (c'est à dire il existe un homéomorphisme bilipschitzien de S dans \mathbb{R}^2).*

Ce résultat a été amélioré par Bonk et Lang (voir [5]). Les surfaces d'Alexandrov forment la classe la plus large de surfaces pour lesquelles on peut définir l'intégrale de courbure comme une mesure signée sur la surface.

THÉORÈME 1.8. — *Soit S une surface d'Alexandrov, complète et homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Si $\int K^+ < 2\pi$ et $\int K^- < \infty$ (où K^+ et K^- sont respectivement les parties positives et négatives de l'intégrale de courbure), alors S est L -bilipschitz équivalente à \mathbb{R}^2 où $L = \frac{2\pi + \int K^-}{2\pi - \int K^+}$.*

Une surface d'Alexandrov est une surface singulière avec variation localement bornée de l'intégrale de courbure. Par exemple, sont des surfaces d'Alexandrov : les surfaces riemanniennes lisses (et dans ce cas, l'intégrale

de courbure est juste l'intégrale de la courbure de Gauss), les surfaces polyédrales. Ce résultat est en un certain sens optimal car il existe des surfaces d'Alexandrov Z qui satisfont $\int K^+ = 2\pi$ et $\int K^- = 0$, mais qui ne sont pas bilipschitz équivalentes à \mathbb{R}^2 (quelque soit le choix de la constante C_{bil}). Cependant, la constante L dans le théorème n'est pas optimal. La preuve consiste à considérer le cas des surfaces polyédrales puis par un argument d'approximation de traiter le cas général. (et pour cela, on utilise la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces d'Alexandrov).

Il n'existe pas de résultats aussi généraux en dimension $n \geq 3$. Nous pouvons nous poser une question plus simple.

PROBLÈME 1.9. — *Soit \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne standard g_0 . Considérons un changement conforme de métrique $g = e^{2u}g_0$ où $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse. A quelle condition \mathbb{R}^n muni de la distance induite par g est bilipschitz équivalent au \mathbb{R}^n euclidien ?*

Nous allons faire tout de suite le lien avec le problème du jacobien quasi-conforme qui s'énonce ainsi. Il s'agit de caractériser les poids w , c'est à dire les fonctions positives, localement intégrables $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui sont comparables au jacobien J_f d'un homéomorphisme quasi-conforme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La conclusion signifie qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$1/Cw(x) \leq J_f(x) \leq Cw(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous renvoyons à [3] pour un survol concernant ce problème et en particulier les motivations venant de l'analyse (Travaux de David et Semmes). Commençons par rappeler ce qu'est une application quasi-conforme. Un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est H -quasi-conforme si pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, nous avons

$$\frac{\sup\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x, y) \leq r\}}{\inf\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x, y) \geq r\}} \leq H.$$

L'image par un homéomorphisme quasi-conforme d'une boule est un "ellipsoïde" dont on contrôle le rapport grand axe sur petit axe (mais dont on ne contrôle pas la taille en fonction de celle de la boule!) et c'est cette propriété qui nous servira plus tard. Dans le cas de \mathbb{R}^n , cette définition est équivalente à celle d'un homéomorphisme quasi-symétrique (donnée plus haut) et à la définition analytique suivante. Un homéomorphisme $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux domaines de \mathbb{R}^n est K -quasiconforme si les dérivées premières partielles de f (au sens des distributions) sont dans l'espace L^n

(c'est-à-dire f est dans l'espace de Sobolev $W^{1,n}$) et la matrice jacobienne $Df = (\partial_{x_i} f_j)_{i,j}$ satisfait $\sup_{\|h\|=1} |Df(x)(h)|^n \leq K \det Df(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Nous renvoyons à [20] pour plus détails sur les applications quasi-conformes dans \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 1.10. — *Avec les même notations que ci-dessus, il y a équivalence des propriétés suivantes.*

- (i) *La variété riemannienne (\mathbb{R}^n, g) est bilipschitz équivalente à (\mathbb{R}^n, g_0) (au sens des structures métriques induites).*
- (ii) *Le poids $w = e^{nu}$ est comparable au jacobien d'une application quasi-conforme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ceci signifie qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que*

$$C^{-1}w(x) \leq Jf(x) \leq Cw(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous ne démontrerons que l'implication (ii) \Rightarrow (i) qui est la seule qui va nous servir dans la suite (voir [3] pour l'autre sens). Commençons par une observation. Posons $d\mu = w dx$ où dx est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Ceci correspond au changement de mesure correspondant au changement de métrique considéré. Posons $d_\mu(x, y) = \mu(B_{x,y})^{1/n}$ où

$$B_{x,y} = B(x, |x - y|) \cup B(y, |x - y|).$$

Ici et dans la suite, $|x - y|$ est la distance euclidienne entre $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors, la distance d_g associée à la métrique g est équivalente à d_μ . Supposons que (ii) soit vrai. Alors, par les propriétés des applications quasi-conformes (utilisée dans la première ligne), il vient

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\sim \text{diam}(f(B_{x,y})) \\ &\sim \mathcal{L}^n(f(B_{x,y}))^{1/n} \\ &= \left(\int_{B_{x,y}} J_f(t) dt \right)^{1/n} \\ &\sim \left(\int_{B_{x,y}} w(t) dt \right)^{1/n} \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure d'après l'observation initiale. Ici $A \sim B$ signifie qu'il existe une constante absolue $C \geq 1$ telle que $C^{-1}A \leq B \leq CA$.

Nous allons maintenant voir ce qui se passe en dimension 4. Pour cela, nous avons besoin d'un analogue de la courbure de Gauss (voir [6] ou [10] pour plus de détails). Si nous posons $g_w = e^{2w}g$ où g est une métrique

sur une variété M et où w est une fonction lisse positive, on a le tableau suivant :

$n = 2$	$n = 4$
$-\Delta_g w + K_g = K_{g_w} e^{2w}$	$P_g w + 2Q_g = 2Q_{g_w} e^{4w}$
$\Delta_{g_w} = e^{-2w} \Delta_g$	$P_{g_w} = e^{4w} P_g$

À gauche, Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami associée à g et K_g est la courbure de Gauss de g . À droite, P_g est l'opérateur de Paneitz associée à g , Q_g est la Q -courbure de g . Si g_0 est la métrique standard sur \mathbb{R}^4 et si $g = e^{2w} g_0$, alors $P_g = (-\Delta_{g_0})^2$ et $Q_g = 1/2 e^{-4w} (-\Delta_{g_0})^2$. Ainsi, l'opérateur de Paneitz est un opérateur d'ordre 4 qui a les mêmes propriétés d'invariance conforme que le laplacien usuel en dimension 2. La Q -courbure joue alors le rôle de la courbure de Gauss. Nous dirons de plus que g est normale si g est complète et lisse et si $g = e^{2u} g_0$ avec u de la forme :

$$u(x) = 1/(4\pi^2) \int_{\mathbb{R}^n} \log \frac{|y|}{|x-y|} Q(y) e^{4u(y)} dy + C$$

où C est une constante. Nous notons ici $Q(y)$ la Q -courbure de g en y . La nullité de la courbure scalaire à l'infini implique la normalité. Nous avons alors le résultat de Bonk-Heinonen-Saksman [4] (qui peut aussi s'énoncer dans \mathbb{R}^{2n} , $n \in \mathbb{N}$).

THÉORÈME 1.11. — *Soit $g = e^{2u} g_0$ une métrique lisse normale sur \mathbb{R}^4 . Il existe des constantes $C > 0$ et $L \geq 1$ telles que si*

$$1/(4\pi^2) \int |Q(x)| dV < C,$$

alors la variété riemannienne (\mathbb{R}^4, g) est L -bilipschitz équivalente à (\mathbb{R}^4, g_0) .

Ici, dV est l'intégration par rapport au volume riemannien de (\mathbb{R}^4, g) .

Questions. —

- 1) L'application bilipschitzienne du théorème précédent peut-elle être choisie comme étant un difféomorphisme ?
- 2) Quelle est la valeur optimale de la constante C (Comparer avec le théorème de Bonk et Lang) ?
- 3) La démonstration est complètement analytique comme nous allons le voir. Or, pour les métriques normales, il y a un analogue de la formule de Gauss-Bonnet pour la Q -courbure (voir [7]). Est-il possible de donner une démonstration géométrique du théorème précédent (comme dans le cas $n = 2$) ? Il serait aussi intéressant d'avoir un tel résultat pour toutes les variétés de dimension 4 (et

non seulement pour celles qui sont dans la classe conforme du \mathbb{R}^4 euclidien).

Ce théorème découle d'un résultat sur le problème du jacobien quasi-conforme. Une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($n \geq 2$) est un potentiel logarithmique si u est finie presque partout et s'il existe une mesure de Radon signée de variation totale sur \mathbb{R}^n finie telle que

$$u(x) = L\mu(x) := - \int_{\mathbb{R}^n} \log |x - y| d\mu(y)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $L\phi(x) = L\mu$ si $d\mu(x) = \phi(x)dx$ où dx est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Notons que $L\mu$ est finie presque partout si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} \log^+ |y| d|\mu|(y) < \infty$ et que $L\mu \in BMO(\mathbb{R}^n)$ (en particulier, ceci implique que $L\mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (localement) pour tout $p \geq 1$). On note $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$ la variation totale de μ .

THÉORÈME 1.12. — *Soit $n \geq 2$. Il existe une constante $c_n \geq 0$ telle que si μ est une mesure signée vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \log^+ |y| d|\mu|(y) < \infty$$

(et donc $L\mu < \infty$ presque partout) et $\|\mu\| \leq c_n$, alors le poids $w(x) = e^{nu(x)}$ est comparable au jacobien d'une application quasi-conforme : il existe une constante $C > 0$ et une application H -quasi-conforme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$C^{-1}w(x) \leq Jf(x) \leq Cw(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Les constantes C et H ne dépendent que de n .

Nous aurons en fait besoin d'une variante de ce résultat. Soit μ une mesure signée sur \mathbb{R}^n de masse totale finie. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $M\mu(x_0) < \infty$ ($M\mu$ est la fonction maximale de μ , voir [14]). Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \log^+ \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) d\mu(y) < \infty$$

et le potentiel

$$u(x) = \tilde{L}\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \log^+ \left(\frac{x_0 - y}{|x - y|} \right) d\mu(y)$$

est fini dès que $M\mu(x) < \infty$ (ce qui est le cas presque partout puisque $M\mu(x_0) < \infty$).

PROPOSITION 1.13. — *Supposons que $\|\mu\| \leq c_n$ (où c_n est la constante du théorème précédent). Alors, le poids $w(x) = e^{nu(x)}$ (où $u = \tilde{L}u$) est comparable au jacobien d'une application quasi-conforme (avec contrôle des constantes comme précédemment).*

Nous allons en déduire le résultat de plongement bilipschitzien sous condition de petite Q -courbure. Soit $g = e^{2u}g_0$ un changement conforme de la métrique standard sur \mathbb{R}^4 . On suppose de plus que g est une métrique régulière normale sur \mathbb{R}^4 . Définissons une mesure signée μ sur \mathbb{R}^n par $d\mu(x) = \frac{1}{4\pi^2}Q(x)e^{4u(x)}dx$ où $Q = 1/2e^{-4u}\Delta^2u$ est la Q -courbure de la métrique g . Supposons que

$$\frac{1}{4\pi^2} \int |Q|dV < c_4.$$

On a alors $\|\mu\| < c_4$ et $M\mu(x) < \infty$ (car μ a une densité lisse). En particulier, on peut prendre $x_0 = 0$ dans la définition précédente et comme, g est normale, on a $u = \tilde{L}\mu + a$. Donc, d'après la proposition précédente, u est équivalent au jacobien d'une application quasi-conforme. Ainsi, (\mathbb{R}^4, g) est bilipschitz équivalent à (\mathbb{R}^4, g_0) en tant qu'espace métrique d'après la proposition 1.13.

La démonstration repose sur le flot quasi-conforme que nous allons maintenant décrire. Il faut noter que ce théorème est une des premières applications de ce flot en dimension $n > 2$. Nous suivons ici la présentation de [2]. Commençons par le cas du plan \mathbb{R}^2 . Soit $f : \Omega \rightarrow D$ un homéomorphisme entre deux domaines du plan complexe. On dit que f est K -quasi-conforme si $f \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ et ses dérivées partielles satisfont

$$\max_{i=1,2} |\partial_{x_i} f(x)| \leq K \min_{i=1,2} |\partial_{x_i} f(x)|, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Cette définition est l'analogie en dimension 2 de la définition analytique donnée précédemment dans \mathbb{R}^n et elle est équivalente au fait que f vérifie l'équation de Beltrami :

$$(1.1) \quad \bar{\partial}f(z) = \mu(z)\partial f(z)$$

où μ est la dilatation complexe de f et satisfait $\|\mu\|_\infty = \frac{K-1}{K+1} < 1$. Cette équation caractérise les homéomorphismes quasi-conformes au sens suivant. Si $\|\mu\|_\infty < 1$ (avec μ mesurable), il existe un homéomorphisme de $W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$ solution de (1.1), cette solution étant unique à compositions par des transformées de Möbius près. Nous allons maintenant voir comment utiliser l'équation de Beltrami pour passer de l'application identité Id à une application quasi-conforme f donnée par un flot quasi-conforme. On

cherche donc un champs de vecteur v tel que

$$\partial_t f_t(x) = v(t, f_t(x)), f_0 = Id, f_T = f$$

pour un certain temps T . De plus, toutes les applications f_t sont quasi-conformes dont les constantes K_t varient “régulièrement” de $K_0 = 0$ à $K_T = K(f)$. Supposons que $f = f^\mu$ soit l’unique solution de (1.1) (pour une certaine dilatation μ) qui fixe 0, 1 et ∞ . Considérons la famille de dilatation

$$\mu_t(z) = \frac{\mu(z)}{|\mu(z)|} th \left(\frac{t}{T} argh|\mu(z)| \right)$$

où $T = \log K(f)$. D’après le théorème de Riemann mesurable rappelé plus haut, il existe une unique solution (normalisée) f_t de l’équation de Beltrami associée à μ_t . Expliquons le choix de μ_t . Géométriquement, $\mu_t(z)$ est le point sur le rayon passant par $\mu(z)$ tel que dans le disque unité, la distance hyperbolique entre 0 et $\mu_t(z)$ est égale à t/T fois la distance entre 0 et $\mu(z)$. Analytiquement, les μ_t sont choisis de sorte que $\log K(f_t \circ f_s^{-1}) = 1/T |t - s|$ (c’est-à-dire nous suivons une géodésique dans l’espace de Teichmüller paramétrée à vitesse constante $1/T$). Le champs de vecteur cherché peut être alors choisi trivialement sous la forme $v(t, z) = \partial_t f_t \circ f_t^{-1}$!!! Ceci n’a pas l’air de nous donner des indications sur les autres champs de vecteurs possibles. Cependant, le champs v précédent vérifie

$$\|\bar{\partial}v\|_\infty \leq 1/2$$

et il se trouve que réciproquement, si $v \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{C})$ tel que $v = 0(|z| \log |z|)$ quand $|z| \rightarrow +\infty$ et $\|\bar{\partial}v\|_\infty \leq C < \infty$, alors le flot $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de v consiste en des applications quasi-conformes avec $K(g_t) \leq e^{Ct}$.

En dimensions supérieures, nous ne disposons (pas vraiment) d’une équation de Beltrami (sauf en dimension 4, voir les travaux de Donaldson-Sullivan [11] et Iwaniec-Martin [15]). Mais, il suffit de remplacer l’opérateur $\bar{\partial}$ par l’opérateur différentiel

$$\Sigma V(x) = 1/2 [DV(x)^t + DV(x)] - 1/n(Tr DV(x)) Id$$

pour un champs de vecteurs V de \mathbb{R}^n . Si $n = 2$, $|\Sigma v(z)| = |\bar{\partial}v(z)|$. La difficulté pour démontrer le théorème 9 à l’aide du flot quasi-conforme est que nous ne connaissons pas l’application quasi-conforme cible $f...$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Assouad, *Plongements bilipschitziens dans \mathbb{R}^n* , Bulletin de la Société Mathématique de France 111 (1983), 429-448.

- [2] K. Astala, *Planar quasiconformal mappings, deformations and interactions*, dans *Quasiconformal mappings and analysis* (Ann Arbor, 1995), Springer (1998), 33–54
- [3] M. Bonk, J. Heinonen, E. Saksman, *The quasiconformal jacobian problem*, In the tradition of Ahlfors and Bers III, *Contemporary Mathematics* 355 (2004), 77–96.
- [4] M. Bonk, J. Heinonen, E. Saksman, *Logarithmic potentials, quasiconformal flows, and Q -curvature*, à paraître dans *Duke Mathematical Journal*.
- [5] M. Bonk, U. Lang, *Bi-lipschitz parameterization of surfaces*, *Mathematische Annalen* 327 (2003), 135–169.
- [6] A. Chang, *Non linear elliptic equations in conformal geometry*, Zürich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (2004)
- [7] A. Chang, J. Qing, P. Yang, *On the Chern-Gauss-Bonnet integral for conformal metrics on \mathbb{R}^4* , *Duke Mathematical Journal* 103 (2000), 523–544.
- [8] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, *Geometric and functional analysis* 9 (1999), 428–517.
- [9] J. Cheeger, B. Kleiner, *On the differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces*, Inspired by S.S. Chern, *Nankai Tracts in Mathematics* 11 (2006), World Sciences publishing, 129–152.
- [10] Z. Djadli, *Opérateurs géométriques et géométrie conforme*, Actes du séminaire de théorie spectrale et géométrie 23 (2005), Université Grenoble 1, 49–103
- [11] S. Donaldson, D. Sullivan, *Quasiconformal 4-manifolds*, *Acta Mathematica* 163 (1999), 181–252.
- [12] J. Fu, *Bi-Lipschitz rough normal coordinates for surfaces with an L^1 curvature*, *Indiana University Journal* 47 (1998), 439–453.
- [13] M. Gromov, V. Rohlin, *Embeddings and immersions in Riemannian Geometry*, *Russian Mathematical Survey* 25 (1970), 1–57.
- [14] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer (2001).
- [15] T. Iwaniec, G. Martin, *Quasiregular mappings in even dimensions*, *Acta Mathematica* 170 (1992), 29–81.
- [16] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang 1*, *Annals of Mathematics* 129 (1989), 1–60.
- [17] S. Semmes, *On the non existence of bi-Lipschitz parameterizations and geometric problems about A_∞ -weights*, *Revista Matemática Iberoamericana* 12 (1996), 337–410.
- [18] T. Toro, *Surfaces with generalized second fundamental in L^2 are Lipschitz manifolds*, *Journal of Differential Geometry* 39 (1994), 65–101.
- [19] T. Toro, *Geometric conditions and existence of bi-Lipschitz parametrizations*, *Duke Mathematical Journal* 77 (1995), 193–227.
- [20] J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, *Lectures Notes in Mathematics* Volume 229 (1971).

Hervé PAJOT
 Université de Grenoble I
 Institut Fourier
 100 rue des maths
 BP 74
 38402 Saint-Martin d'Hères (France)
 herve.pajot@ujf-grenoble.fr