

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Constantin VERNICOS

Introduction aux géométries de Hilbert

Volume 23 (2004-2005), p. 145-168.

[<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2004-2005__23__145_0>](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2004-2005__23__145_0)

© Institut Fourier, 2004-2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

INTRODUCTION AUX GÉOMÉTRIES DE HILBERT

Constantin VERNICOS

Prologue

Le présent texte se veut à la fois une introduction et un tour d’horizon subjectif des géométries de Hilbert.

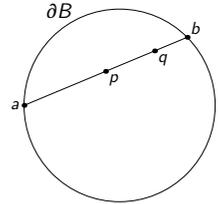
Table des matières

1	Les géométries de Hilbert en tant qu’espace de longueurs	147
1.1	Structure métrique	147
1.2	Géodésiques	150
2	Actions de groupes	152
2.1	Isométries	152
2.2	Convexes divisibles	153
3	Notions de courbure pour les géométries de Hilbert	155
3.1	Les géométries de Hilbert ne sont pas des CAT(0)	155
3.2	Hyperbolicité au sens de Gromov	156
4	Mesures des géométries de Hilbert	160
4.1	Quelle mesure?	160
4.2	Aire des triangles idéaux	161
4.3	Le bas du spectre	164

Motivations

Soit $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$ l'espace euclidien usuel. Nous noterons $pq = \|p - q\|_e$ la distance euclidienne entre deux points p et q et quand nécessaire $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

Soit B le disque unité et soient p et q deux points de son intérieur. La droite passant par p et q coupe le convexe en deux points a et b tel qu'en parcourant la droite on rencontre dans l'ordre a, p, q et b .

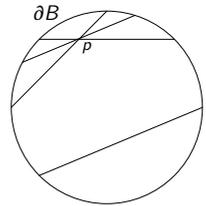


DÉFINITION 1. — Le Birapport, noté $[a, p, q, b]$ vaut

$$[a, p, q, b] = \frac{qa}{pa} \times \frac{pb}{qb}.$$

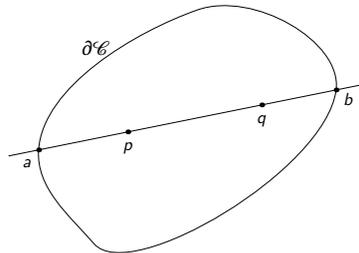
DÉFINITION 2. — Pour tout couple de point p et q de B , on note et défini leur distance par

$$d_D(p, q) = \frac{1}{2} \ln[a, p, q, b].$$



On obtient de la sorte le modèle projectif (également appelé de Beltrami ou de Klein) de la géométrie hyperbolique.

L'idée datant de Hilbert est que cette construction peut se faire en partant d'un convexe \mathcal{C} quelconque de \mathbb{R}^n :



Autrement dit pour tout convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ et tout couple de point p, q de \mathcal{C} on peut définir leur distance, notée alors $d_C(p, q)$, exactement comme pour la boule B , à partir des définitions 1 et 2, en remplaçant B par \mathcal{C} . En résumé :

DÉFINITION 3. — Une géométrie de Hilbert est l'espace métrique déterminé par un ouvert convexe et borné \mathcal{C} de \mathbb{R}^n muni de sa distance de Hilbert d_C . On la notera (\mathcal{C}, d_C) .

Un bel exercice de géométrie projective consiste à montrer que notre définition de distance est bien une distance. La seule difficulté consiste à montrer l'inégalité triangulaire.

La question sous-jacente à l'étude de ces géométries est de déterminer leurs points communs, et leurs différences. On veut par exemple savoir si la géométrie hyperbolique y joue un rôle particulier ou bien s'il y a d'autres géométries tout aussi particulières.

Ces dix dernières années semblent marquées par un renouveau d'intérêt pour ces géométries (et pas seulement de ma part !, voir la bibliographie). En effet, elles sont à la croisée de deux types de géométries importantes : les géométries métriques et les géométries finslérienne.

Elles sont à la fois des exemples riches en structures tout en étant relativement simples pour pouvoir y travailler de manière concrète (faire des calculs!). En particulier, lorsque le bord est suffisamment régulier, ces géométries peuvent être qualifiées de géométrie à « courbure » négative de plusieurs manières. Sous des conditions fortes de régularité on peut généraliser la notion de courbure classique en géométrie riemannienne, ce qui en fait des géométries de Finsler de courbure constante -1 avec la normalisation que nous avons choisie [SM00]. Sous des conditions plus lestes, si une telle notion ne peut être définie, on peut néanmoins montrer que ce sont des espaces hyperboliques au sens de Gromov.

Enfin je dirais qu'elles sont un terreau fertile d'expérimentations, par exemple pour tester une notion généralisant une notion riemannienne aux espaces métriques. Je pense en particulier à des problèmes de mesures, pour pouvoir en faire des espaces métriques mesurés et pouvoir parler de spectre (inégalité de Poincaré), et pourquoi pas de notions de courbure minorée à la « Lott-Sturm-Villani » qui n'ont pas encore trouvé (à ma connaissance) d'exemples praticables autre que les métriques riemanniennes.

Un autre point de vue, qui a largement prouvé sa richesse notamment par les contributions récentes d'Y. Benoist, est celui de l'étude du groupe des isométries, en particulier les éventuels sous-groupes co-compacts.

Le texte qui suit se propose d'explorer certains aspects des géométries de Hilbert auquel j'ai été confrontés. Suivant L. Wittgenstein [LW21], sur ce dont je ne pouvais parler, j'ai préféré garder le silence (Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen).

1. Les géométries de Hilbert en tant qu'espace de longueurs

1.1. Structure métrique

Dans les quelques remarques qui suivent nous n'allons pas nous soucier de régularité des objets étudiés. Ils peuvent tout à fait être discontinus. Nous voulons uniquement faire apparaître les différences entre la géométrie riemannienne classique et les géométries de Hilbert.

REMARQUE 1. — Soit M^n une variété, se donner une métrique riemannienne sur

M^n est équivalent au fait de se donner pour tout p de M^n un ellipsoïde dans T_pM^n .

En effet, la boule unité de la norme euclidienne est un ellipsoïde, et inversement un ellipsoïde détermine une unique norme euclidienne, dont elle est la boule unité.

Il existe un procédé classique qui permet, à partir d'un convexe absorbant d'obtenir une norme, pourvu que le convexe soit symétrique par rapport à l'origine. Ainsi on obtient la définition (ou bien point de vue) suivante :

DÉFINITION 4. — Soit M^n une variété. Se donner une métrique finslérienne sur M^n , c'est se donner en chaque point $p \in M^n$ une norme sur T_pM^n ce qui est équivalent à se donner un convexe, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

REMARQUE 2. — Dans la littérature (et dans la thèse d'habilitation de Riemann) on demande une régularité C^2 des convexes déterminant la boule unité, et de plus on exige que la courbure soit strictement positive en tout point du bord de la boule, considérée comme sous variété de \mathbb{R}^n . Dans cette note nous dirons que de tels convexes sont analytiquement strictement convexes. Quant aux convexes qui n'admettent qu'un point en commun avec leurs hyperplans tangents, nous les qualifierons de géométriquement strictement convexes.

PROPOSITION 1. — Toute géométrie de Hilbert hérite d'une structure de variété finslérienne dont la régularité est la même que celle du bord du convexe et dont la distance de longueur associée coïncide avec la distance de Hilbert.

Démonstration succincte. Soit \mathcal{C} un convexe, p un point de son intérieur et $v \in T_p\mathcal{C} \simeq \mathbb{R}^n$. Notons $q(s) = p + sv$ un point de la droite passant par p et de vecteur directeur v . Notons également $p^+ = p + t^+v$ et $p^- = p - t^-v$ les points d'intersection de cette droite avec le bord $\partial\mathcal{C}$, avec t^+ et t^- des réels positifs. Alors (si $s > 0$)

$$\frac{d(p, q(s))}{s} = \frac{1}{2s} \ln \left(\frac{q(s)p^-}{pp^-} \times \frac{pp^+}{q(s)p^+} \right) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2s} \ln \left(\frac{s + t^-}{t^-} \times \frac{t^+}{t^+ - s} \right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2s} \left(\frac{s}{t^-} + \frac{s}{t^+} + o(s) \right) \tag{3}$$

on obtient un résultat similaire en prenant $s < 0$ on en déduit donc

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(p, q(s))}{s} = \frac{\|v\|}{2} \left(\frac{1}{pp^+} + \frac{1}{pp^-} \right).$$

Ainsi apparaît naturellement la norme de Finsler du vecteur v au point p :

$$F_{\mathcal{C}}(p, v) := \frac{\|v\|}{2} \left(\frac{1}{pp^+} + \frac{1}{pp^-} \right).$$

On en déduit aisément (en utilisant une expression en polaire centrée au point p , par exemple) que la régularité de cette norme est la même que celle du bord $\partial\mathcal{C}$.

En intégrant cette métrique le long d'un segment entre deux points p et q , on obtient la distance $d_{\mathcal{C}}(p, q)$. Ce qui implique que la distance de longueur d_F induite par la métrique de Finsler est plus petite ou égale à la distance de Hilbert, *i.e.*,

$$d_F(p, q) \leq d_{\mathcal{C}}(p, q).$$

Pour l'inégalité inverse, soit deux points p et q . On considère un chemin γ entre p et q dont la longueur $l_F(\gamma)$ approche à ε près la distance de longueur $d_F(p, q)$, *i.e.*,

$$l_F(\gamma) \leq d_F(p, q) + \varepsilon.$$

On constate d'abord que ce chemin est rectifiable en tant que courbe de \mathbb{R}^n . On approche à son tour ce chemin à ε près par une courbe affine par morceaux P , *i.e.*,

$$l_F(P) \leq l_F(\gamma) + \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire implique alors que la distance de Hilbert entre les extrémités est plus petite que la longueur de cette courbe polygonale, d'où finalement pour tout ε

$$d_{\mathcal{C}}(p, q) \leq d_F(p, q) + 2\varepsilon.$$

Ce qui conclut notre preuve, car ε est quelconque.

□

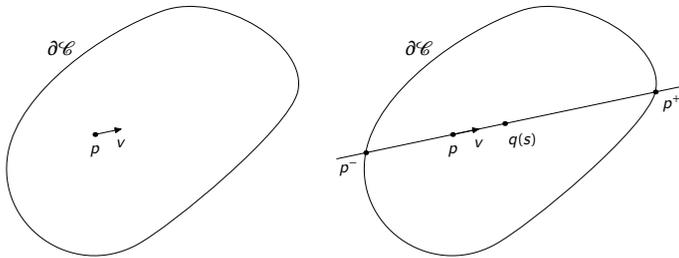


FIG. 1 – La métrique de Finsler d'une géométrie de Hilbert

Le réflexe du Riemannien de formation que je suis, est de savoir quand cette structure finslérienne est en réalité riemannienne. Nous avons dans ce cas une rigidité.

THÉORÈME 2. — Soit $(\Omega, d_{\Omega}, F_{\Omega})$ une géométrie de Hilbert. (Ω, F_{Ω}) est une variété riemannienne si et seulement si Ω est une ellipse. Plus précisément, s'il existe un ouvert de Ω dans lequel F_{Ω} est riemannienne, alors Ω est une ellipse.

REMARQUE 1. — La boule unité de F_Ω peut être un ellipsoïde en un point, sans que Ω soit un ellipsoïde. Un exemple dû à É. Socié-Méthou [SM00] consiste à regarder en 0, dans le convexe \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 déterminer en polaire par

$$\theta \rightarrow r(\theta) = \frac{1}{18 + \cos(3\theta) + \cos(\theta)}.$$

La norme de Finsler en 0 de v est donnée par

$$F_{\mathcal{C}}(0, v) = 18\|v\|,$$

elle est donc bien euclidienne.

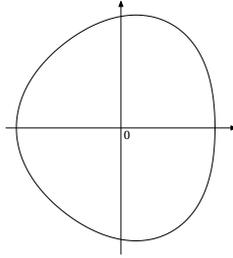


FIG. 2 – En 0 la norme de Finsler est euclidienne

Idée de la démonstration. Pour une démonstration complète du théorème précédent, voir É. Socié-Méthou [SM00] section 1.3.5.

L'idée étant que si la métrique est riemannienne dans un ouvert \mathcal{U} , alors dans cet ouvert la courbure est partout -1 . On peut alors trouver une boule métrique dans \mathcal{U} isométrique à une boule de l'espace hyperbolique. La difficulté consiste à prolonger cette isométrie du convexe \mathcal{C} vers l'espace hyperbolique.

□

1.2. Géodésiques

DÉFINITION 5. — Nous dirons d'une courbe $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ qu'elle est une géodésique si et seulement si pour tout $t_1 < t_2 \in [\alpha, \beta]$ on a

$$d_\Omega(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} F_\Omega(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

PROPRIÉTÉ 3. — Tous les segments de droite sont des géodésiques.

Attention au fait que la réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

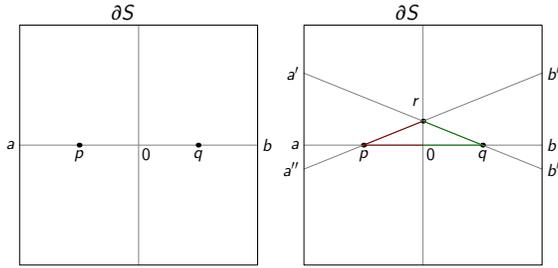


FIG. 3 – La non unicité des géodésiques entre deux points d'un carré

EXEMPLE 1. — Dans le carré, soient deux points p et q sur une droite parallèle à l'un des côtés, et r un point sur leur médiatrice (voir 3). Le théorème de Thalès nous permet de dire que la distance de Hilbert entre les points p et r est égale à la distance de Hilbert entre les points p et 0 , de même $d_S(q, r) = d_S(q, 0)$. On voit ainsi apparaître une infinité de géodésiques entre les points p et q .

La situation illustré par l'exemple 1 est en réalité la situation générale où l'on a pas unicité de la géodésique entre deux points. C'est le contenu de la proposition suivante.

Notons $\langle x, y \rangle$ la droite passant par les points x et y , et par a_{xy} et a_{yx} les points d'intersections de cette droite avec le bord du convexe contenant x et y , telle que $xa_{xy} < xa_{yx}$ si x et y sont distincts.

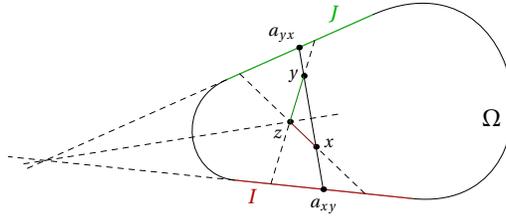


FIG. 4 – Situation générale de non unicité de la géodésique entre deux points

PROPOSITION 4 (Voir proposition 2 dans [dlH93]). — Soit (Ω, d_Ω) une géométrie de Hilbert. Pour tout couple de points $x, y \in \Omega$ les deux affirmations suivantes sont équivalentes,

1. Il existe $z \in \Omega \setminus \langle x, y \rangle$ tel que $d_\Omega(x, y) = d_\Omega(x, z) + d_\Omega(z, y)$;
2. Il existe deux segments I et J dans $\partial\Omega$ telles que $a_{xy} \in I$, $a_{yx} \in J$ et telle que I et J sont contenu dans un même plan affine de \mathbb{R}^n .

Pour se convaincre que l'on est dans la même situation que dans l'exemple 1, il faut « envoyer à l'infini » le point d'intersection entre les deux droites portant

les segments I et J de la proposition, c'est-à-dire qu'il faut plonger notre convexe dans l'espace projectif et y retirer un hyperplan contenant l'intersection des droites contenant I et J ([Ber77]). On plonge ainsi notre convexe dans un espace affine dans lequel les segments I et J sont portés par des droites parallèles.

On en déduit donc une condition suffisante pour que seules les segments de droites soient des géodésiques.

PROPOSITION 5. — *Lorsque le bord de Ω est strictement convexe il y a unicité de la géodésique entre deux points.*

2. Actions de groupes

2.1. Isométries

Soit $G_n := \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace projectif de \mathbb{R}^{n+1} .

Une partie *proprement convexe* \mathcal{C} de \mathbb{P}^n est une partie convexe dont l'adhérence est incluse dans le complémentaire d'un hyperplan projectif. Ainsi on peut lui associer un convexe borné de \mathbb{R}^n et, inversement, à un convexe borné de \mathbb{R}^n on peut associer une partie proprement convexe de \mathbb{P}^n . Dans la suite, on désignera par X_n l'ensemble des ouverts proprement convexes.

Nous munissons X_n de la distance de Hausdorff entre les ensembles, comme défini dans [Ben03b], p. 2.

Il est clair que le sous-ensemble des homographies $\mathrm{Coll}(\Omega) \in G_n$ qui conservent Ω est un sous-ensemble des isométries. En revanche la réciproque n'est généralement pas vraie.

Cependant, c'est le cas si le convexe est strictement convexe.

PROPOSITION 6 ([dlH93]). — *Lorsque le bord de Ω est géométriquement strictement convexe l'ensemble des isométries de (Ω, d_Ω) est $\mathrm{Coll}(\Omega)$.*

Si $\mathrm{Coll}(\Omega)$ est naturellement un groupe de Lie, comme sous-groupe fermé d'un groupe de Lie, on ne sait pas si les isométries d'un convexe admettent une structure de groupe de Lie ou pas.

Une autre question que l'on peut se poser est de savoir dans quel cas l'action de $\mathrm{Coll}(\Omega)$ est transitive sur (Ω, d_Ω) . Un cas simple est celui des simplexes. En effet, dans \mathbb{P}^n l'ensemble des homographies agit transitivement sur les $(n+2)$ -uplets de points projectivement indépendants. Ainsi en fixant les sommets du simplexe, on peut trouver une homographie qui envoie tout point de l'intérieur sur n'importe quel autre point de l'intérieur.

Avant de répondre à la question de transitivité, remarquons qu'en fait les simplexes ont une propriété supplémentaire que l'on doit à P. de La Harpe :

PROPOSITION 7 (P. de la Harpe [dlH93]). — *Le simplexe S_n de \mathbb{P}^n muni de sa métrique de Hilbert est isométrique à \mathbb{R}^n muni d'une norme polyédrale. En particulier la géométrie de Hilbert du triangle est isométrique à \mathbb{R}^2 muni d'une norme dont la boule unité est un hexagone.*

La démonstration de P. de la Harpe consiste à identifier le simplexe à l'algèbre de Lie associée à un sous-groupe de $\text{Coll}(S_n)$ qui agit simplement et transitivement sur S_n .

Ajoutons à cela que récemment T. Foertsch et A. Karlsson ont démontrés que cette situation ne pouvait se produire autrement :

THÉORÈME 8 (Foertsch-Karlsson [FK06]). — *Si $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ est une géométrie de Hilbert isométrique à un espace vectoriel normé, l'ouvert \mathcal{C} est un simplexe.*

La réponse sur la transitivité n'est pas connue en toute dimension, mais par exemple en dimension 2 on obtient :

THÉORÈME 9 ([dlH93]). — *Le triangle et l'ellipse sont les seuls convexes du plan sur lesquels la famille des homographies les laissant invariant agit transitivement.*

P. De la Harpe conjecture, ([dlH93]), que les isométries d'un convexe Ω agissent transitivement uniquement lorsque $\text{Coll}(\Omega)$ agit transitivement sur Ω .

Pour conclure cette section, remarquons que l'on vient de voir que la géométrie du triangle (simplexe en grande dimension) joue un rôle tout aussi particulier dans la famille des géométries de Hilbert que celui joué par l'espace hyperbolique.

Dans mon esprit, ces deux géométries sont les deux extrêmes dans cette famille d'espaces métriques.

2.2. Convexes divisibles

On ne peut parler d'action de groupe sur les géométries de Hilbert sans parler d'action co-compacte. Force est alors de constater que l'étude de ce sujet est principalement due à Y. Benoist dans sa série d'article « Convexes divisibles », même si le précurseur est Benzécri [Ben60].

Pour faire le lien avec la section précédent on peut mentionner dans ce cadre la proposition suivante :

PROPOSITION 10 ([Ben60], Colbois-Verovic). — *Soit Ω un ouvert analytiquement strictement convexe. Si un sous-groupe du groupe d'isométrie agit co-compactement alors Ω est un ellipsoïde.*

Démonstration succincte. Soit on utilise [Ben60], celui-ci démontre qu'un tel convexe admettant un ellipsoïde tangent à son bord est un ellipsoïde. Sinon on peut

utiliser le résultat de Colbois-Verovic suivant : lorsqu'on s'approche du bord d'un tel convexe, les boules unités des métriques de Finsler tendent vers des ellipsoïdes. De la co-compacité on en déduit donc que toutes les boules de Finsler sont des ellipsoïdes. En conséquence, la métrique de Hilbert est riemannienne. Le théorème de rigidité 2 nous permet alors de conclure.

□

Maintenant on peut se demander ce qui se passe dans le cas non strictement convexe, il faut alors se placer dans l'ensemble des convexes de \mathbb{P}^n .

PROPOSITION 11 (Benzécri,[Ben60]). — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n . Si son bord n'est pas C^1 ou bien s'il n'est pas strictement convexe alors dans l'adhérence de $G_n\Omega$, il existe un convexe dont une des sections planaires est un triangle.

Démonstration. Nous faisons la démonstration en dimension 2. Pour la justification en dimension supérieure voir [Ben03b].

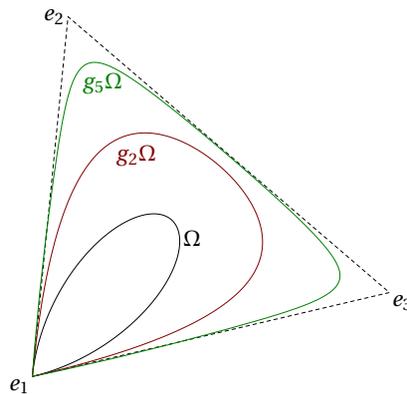


FIG. 5 – La suite $g_n\Omega$ converge vers le triangle $e_1e_2e_3$

Supposons que $\partial\Omega$ ne soit pas C^1 , par exemple en un point e_1 . Cela veut dire qu'en e_1 , $\partial\Omega$ admet une tangente à droite et une tangente à gauche qui ne coïncident pas. Soit donc e_2 et e_3 tels que les segments $[e_1, e_2]$ et $[e_1, e_3]$ correspondent à ces deux tangentes et que le triangle T de sommets e_1, e_2 et e_3 contient Ω . Si on considère, dans la base déterminée par e_1, e_2 , et e_3 la transformation diagonale donnée par $g_n := \text{diag}(n^{-2}, n, n)$ alors $g_n\Omega$ converge vers T (voir figure 5). Lorsque Ω n'est pas strictement convexe le bord du convexe dual Ω^* n'est pas C^1 . Ainsi le triangle T^* est adhérent à Ω^* . Cependant le dual T^* de T est également un triangle et se trouve dans l'orbite de Ω .

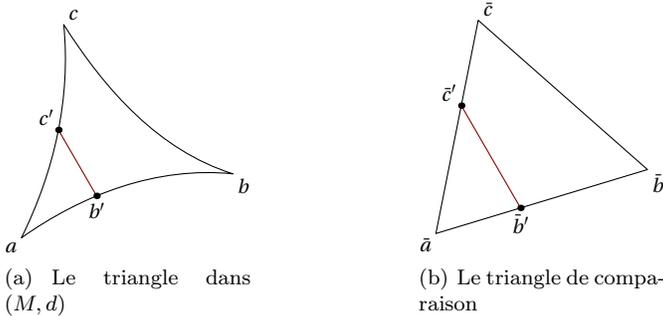
□

3. Notions de courbure pour les géométries de Hilbert

Puisque les géométries de Hilbert sont des généralisations de l'espace hyperbolique, on peut se demander si ces géométries sont à courbure négative dans un certain sens.

3.1. Les géométries de Hilbert ne sont pas des CAT(0)

Les notions de courbure négative que l'on va regarder sont celles liées aux triangles. Soit (M, d) un espace métrique de longueur, et abc un triangle géodésique dans M .



- On appelle triangle de comparaison $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ dans \mathbb{R}^2 , le triangle tel que les distances entre les sommets correspondent aux distances entre les sommets de abc ;
- Lorsqu'on prend deux points b' et c' sur les côtés liant respectivement a à b et a à c , on prend également les points \bar{b}' sur $[\bar{a}\bar{b}]$ et \bar{c}' sur $[\bar{a}\bar{c}]$ tels que $d(a, b') = \bar{a}\bar{b}'$ et $d(a, c') = \bar{a}\bar{c}'$ (voir figure 3.1).

Si pour toute configuration de ce type on obtient l'inégalité

$$d(b', c') \leq \bar{b}'\bar{c}',$$

on dit que (M, d) est $CAT(0)$.

On peut définir de même un $CAT(k)$ en prenant les triangles de comparaison (lorsque cela est possible) dans la variété riemannienne simplement connexe de courbure constante égale à k .

Commençons par rappeler le résultat suivant qui peut paraître surprenant aux premiers abords :

PROPOSITION 12 (Proposition II.1.14 dans [BH99]). — *Un espace vectoriel normé est $CAT(k)$ pour un $k \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il est préhilbertien*

Idée de la démonstration. Pour deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^2 , et $t > 0$, on peut définir l'angle entre tu et tv en 0, comme l'angle en $\bar{0}$ dans le triangle de comparaison $(\bar{0}, \bar{tv}, \bar{tu})$ de l'espace riemannien de courbure constante k associé au triangle

$(0, tu, tv)$. Comme l'espace est $CAT(k)$, la limite en $t = 0$ existe (car la fonction est croissante en t). Cependant ceci n'est possible que si la norme de départ est euclidienne voir Proposition I.4.5 dans [BH99].

□

On en déduit alors le théorème suivant

THÉORÈME 13. — *Soit $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ un convexe muni de sa distance de Hilbert. Cet espace est $CAT(k)$ pour un $k \in \mathbb{R}$ si et seulement si \mathcal{C} est un ellipsoïde.*

Idée de la démonstration. Le raisonnement de la proposition précédente implique que $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ est riemannien et par conséquent le théorème de rigidité 2 permet de conclure.

□

Mentionnons que pour le cas $k \leq 0$, ce théorème est une conséquence d'un résultat de Kelly et Strauss [KS58]. Ces derniers démontrent que si dans une géométrie de Hilbert en tout point on peut parler de courbure négative (*i.e.* on est $CAT(0)$ dans un voisinage) ou bien de courbure positive (on a les inégalités inverses avec les triangles de comparaisons que dans le cas $CAT(0)$, ceci dans un voisinage du point) alors nécessairement la géométrie est hyperbolique.

3.2. Hyperbolicité au sens de Gromov

Soit $\delta > 0$, on dira d'un espace métrique de longueur (M, d) qu'il est δ -hyperbolique si et seulement si pour tout triangle géodésique abc de M , chaque côté est contenu dans le δ voisinage de l'union des deux autres côtés.

C'est la propriété dite des triangles δ -fin.

L'exemple du triangle, qui est isométrique au plan muni d'une norme montre que toutes les géométries de Hilbert ne sont pas hyperboliques au sens de Gromov.

Dans la suite de ce texte nous verrons un certain nombre de caractérisation de cette notion.

Nous noterons dorénavant X_n^δ l'ensemble des ouverts proprement convexes et δ -hyperboliques de \mathbb{P}^n , munis de leur métrique de Hilbert.

3.2.1. Action de groupe et hyperbolicité au sens de Gromov.

LEMME 14. — *Tout ouvert proprement convexe Gromov hyperbolique de \mathbb{P}^2 est strictement convexe*

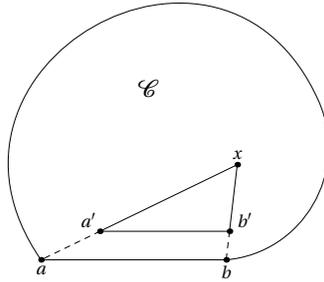


FIG. 6 – Un convexe non strictement convexe n'est pas δ -hyperbolique

Démonstration. La preuve se fait par contraposition. Soit donc un convexe \mathcal{C} de \mathbb{P}^2 proprement convexe qui ne soit pas strictement convexe. Son bord $\partial\mathcal{C}$ contient un segment $[ab]$. Partant d'un point x de \mathcal{C} , on peut construire un triangle ayant deux sommets a' et b' respectivement sur les segments $[ax]$ et $[bx]$, le troisième sommet étant x . En faisant tendre a' et b' respectivement vers a et b on obtient une suite de triangle qui contient un triangle qui n'est pas δ -fin, quelque soit $\delta > 0$.

□

Citons une conséquence fondamentale du lemme précédent :

PROPOSITION 15 ([Ben03b] proposition 2.11). — 1. Pour tout réel $\delta > 0$, l'ensemble X_2^δ est un sous-ensemble fermé, G_2 -invariant de X_2 dont tous les éléments sont strictement convexes.

2. Soit F un sous-ensemble fermé de X_n , G_n -invariant, dont tous les éléments sont strictement convexes (c'est-à-dire que l'intérieur du segment reliant deux points du bord de \mathcal{C} est dans \mathcal{C}). Alors il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $F \subset X_n^\delta$.

Idée de la démonstration. La première partie est une application du lemme précédent. La seconde nécessite l'utilisation d'une proposition de co-compacité due à Benzécri. En effet, l'action de G_n sur l'ensemble des convexes de X_n pointés en un point de leur intérieur est co-compacte. Voir [Ben03b] pour la démonstration détaillée.

□

Remarquons que la proposition de Y. Benoist implique immédiatement la caractérisation suivante de la δ -hyperbolicité

THÉORÈME 16 ([Ben03b]). — Soit $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ une géométrie de Hilbert. Alors \mathcal{C} est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie

1. Pour tout $\Omega \in \overline{G_n \mathcal{C}}$, Ω est strictement convexe,
2. Pour tout $\Omega \in \overline{G_n \mathcal{C}}$, $\partial\Omega$ est C^1 .

Démonstration. La première équivalence provient clairement de 15. La seconde se déduit du lemme 11 de Benzécri qui implique que les éléments de $\overline{G_n \mathcal{C}}$ sont tous strictement convexes si et seulement si ils ont tous un bord de classe C^1 .

□

Terminons ce paragraphe par le principe fonctionnel suivant largement utilisé par Y. Benoist [Ben03b], Colbois-Vernicos [CV06] et Colbois-Vernicos-Verovic [CVV] qui est une paraphrase de la proposition 15.

PROPOSITION 17 (Principe fonctionnel). — *Soit F une fonctionnelle de l'ensemble des convexes dans \mathbb{R} telle que*

1. F est invariante par l'action de G_n , c'est-à-dire que pour tout $g \in G_n$ et $\mathcal{C} \in X_n$, on a, $F(\mathcal{C}) = F(g\mathcal{C})$,
2. F s'annule sur l'ensemble des convexes qui ne sont pas strictement convexes,
3. F est semi-continue supérieurement,

alors pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(\mathcal{C}) \geq M \Rightarrow (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}) \text{ est } \delta\text{-hyperbolique.}$$

3.2.2. Convexe quasi-symétrique.

Cette notion est due à Y. Benoist [Ben03b] (voir également [Ben05b])

Soit \mathcal{C} un domaine proprement ouvert de \mathbb{P}^n . Soient ξ et η deux points distincts du bord $\partial\mathcal{C}$. Notons $D_{\xi}(\eta)$ la distance de η à l'hyperplan d'appui de $\partial\mathcal{C}$ en ξ .

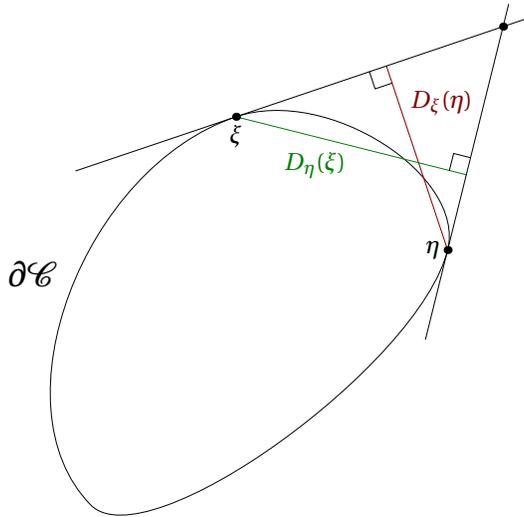
DÉFINITION 6. — *Si $D_{\xi}(\eta)/D_{\eta}(\xi)$ est majoré indépendamment du couple (ξ, η) on dit que $\partial\mathcal{C}$ est quasi-symétriquement convexe.*

Citons à présent le théorème fondamental suivant, dû à Y. Benoist qui peut être vu comme une caractérisation extrinsèque de l'hyperbolicité au sens de Gromov.

THÉORÈME 18 (Y. Benoist [Ben03b]). — *La géométrie de Hilbert d'un convexe proprement ouvert de \mathbb{P}^n est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si son bord est quasi-symétriquement convexe.*

Dans l'article [Ben03b] de Y. Benoist on trouvera non seulement la démonstration de ce théorème, mais également une étude approfondie des fonctions quasi-symétriquement convexe.

Parmi les propriétés mises en évidence par Y. Benoist (voir également [Ben04]) citons :

FIG. 7 – Distance de η à l'hyperplan d'appui en ξ

PROPOSITION 19. — *Si la géométrie de Hilbert du convexe \mathcal{C} est δ -hyperbolique, alors il existe $1 < \alpha(\delta) \leq 2$ et $2 \leq \beta(\delta)$ tels que le bord $\partial\mathcal{C}$ soit α -Hölder et β -convexe.*

3.2.3. Quasi-isométries et δ -hyperbolicité.

Rappelons que deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont dit quasi-isométriques s'il existe une application $f: X \rightarrow Y$ et deux constantes k, λ telles que

- pour tout p et q dans X on a

$$\lambda^{-1}d_X(p, q) - k \leq d_Y(f(p), f(q)) \leq \lambda d_X(p, q) + k,$$

- tout point de Y est dans le k voisinage de $f(X)$.

La notion d'hyperbolicité au sens de Gromov est un invariant de quasi-isométrie. Ainsi tout espace de Hilbert quasi-isométrique à l'espace hyperbolique est hyperbolique au sens de Gromov. En ce qui concerne la réciproque voici ce que l'on peut dire

THÉORÈME 20 (Y. Benoist[Ben05b]). — *Un géométrie de Hilbert **plane** est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si elle est quasi-isométrique au plan hyperbolique. L'équivalence n'est plus valide en dimension supérieure.*

Cependant, le résultat principal de l'article [CV05] implique que les géométries de Hilbert Gromov-hyperbolique sont à géométrie bornée à une certaine échelle. Ceci permet d'appliquer un résultat de Bonk-Schramm [BS00] (voir également Lang-Plaut [LP01] section 6) ce qui nous permet de dire que :

PROPOSITION 21. — *Les géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov admettent un plongement quasi-isométrique dans un espace hyperbolique.*

Le problème est que l'on ne contrôle absolument pas la dimension de l'espace hyperbolique dans lequel on arrive.

Terminons en mentionnant que lorsque le bord est analytiquement strictement convexe, *i.e.* C^2 de courbure de Gauss strictement positive, on a un résultat plus fort.

THÉORÈME 22 (Colbois-Verovic [CV04]). — *Une géométrie de Hilbert dont le bord est analytiquement strictement convexe admet une bijection bi-lipschitzienne avec l'espace hyperbolique.*

Idée de la démonstration. Contrairement au théorème de rigidité 2, on part du bord pour arriver au centre. L'ingrédient de base est le théorème de roulement de Blaschke qui dit que sous ces hypothèses il existe deux boules euclidiennes de rayon r et $R > r$ telles que la petite boule roule à l'intérieur du convexe et le convexe roule à l'intérieur de la grande boule.

On l'utilise pour construire une bijection bi-lipschitzienne d'un voisinage du bord vers un voisinage ad'hoc du bord de l'espace hyperbolique. Ensuite on étend la bijection bi-lipschitzienne à tout l'espace.

□

4. Mesures des géométries de Hilbert

4.1. Quelle mesure ?

En géométrie riemannienne, la métrique induit naturellement une mesure. Cependant ce n'est plus le cas en géométrie finslérienne et par conséquent pour les géométries de Hilbert. Le problème étant lié à la recherche du meilleur ellipsoïde approchant la boule unité de la norme dans l'espace tangent. En géométrie riemannienne il suffit de prendre la boule unité elle-même. Cependant pour les géométries de Finsler, selon la propriété que l'on veut approcher, on obtiendra une ellipse différente et donc une mesure différente (voir [BBI01] section 5.5.3 pages 197–201).

Nous considérerons la mesure de Hausdorff de dimension n , associée à la distance de Hilbert. On l'appelle également mesure de Busemann pour des raisons historiques. Nous l'appellerons mesure de Hilbert dans notre cadre et pour un convexe \mathcal{C} donné nous la noterons $\mu_{\mathcal{C}}$.

Elle admet une expression relativement simple dans notre cadre. Si l'on note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n associée à la norme euclidienne, $B_p = \{v \mid F_{\mathcal{C}}(p, v) \leq$

1} la boule unité pour la norme Finsler au point $p \in \mathcal{C}$ et enfin B_e la boule unité euclidienne. Alors pour tout borélien \mathcal{U} de \mathcal{C} on a

$$\mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \frac{\lambda(B_e)}{\lambda(B_p)} d\lambda(p).$$

En ce qui concerne les résultats qualitatifs qui vont suivre, on peut prendre n'importe quelle mesure équivalente à la mesure de Hilbert. Ainsi la mesure dite de Holmes-Thompson ferait tout aussi bien l'affaire (en effet par les inégalités de Bourgain-Milman et de Santalo-Blashke, ces deux mesures sont équivalentes).

4.2. Aire des triangles idéaux

Nous appelons triangle idéal d'un convexe \mathcal{C} , un triangle affine dont seuls les sommets appartiennent au bord. Si un triangle T appartient au plan affine P , son aire sera sa mesure de Hilbert pour le convexe $P \cap \mathcal{C}$.

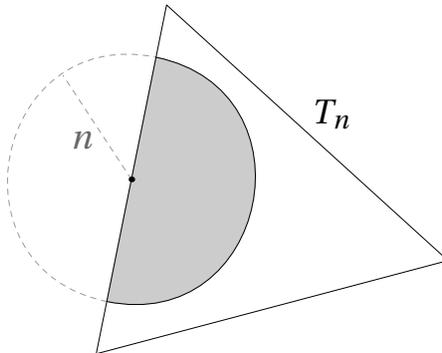


FIG. 8 – Un triangle T_n et la demi boule de rayon n qu'il contient

Une démonstration de l'hyperbolicité au sens de Gromov du plan hyperbolique est la suivante. On suppose que le plan hyperbolique n'est pas δ -hyperbolique quelque soit $\delta > 0$. On peut alors construire une suite (T_n) de triangles dans le plan hyperbolique telle que pour tout n , un des côtés de T_n contient un point à distance plus grande que n de chacun des deux autres côtés. Ainsi T_n contient un demi-disque de rayon n (voir figure 8). On en déduit que l'aire des T_n tends vers $+\infty$. Cependant on sait que tout triangle à une aire plus petit que π , celle-ci correspondant à l'aire des triangles idéaux. Ceci est donc absurde.

Cette démonstration montre qu'il existe un lien entre l'hyperbolicité au sens de Gromov et l'aire des triangles. Ce qui la fait fonctionner est le fait que les triangles ont une aire uniformément majoré. Par exemple, celle-ci ne fonctionne pas pour le cas de la géométrie de Hilbert du triangle. On peut facilement construire une suite de triangles idéaux dont l'aire tend vers l'infini.

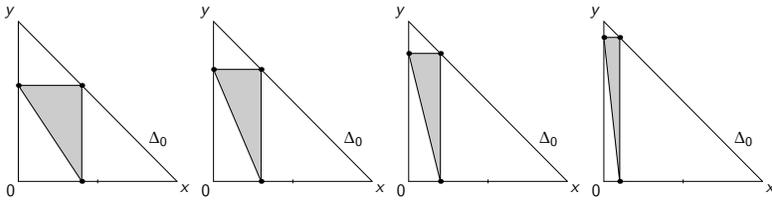


FIG. 9 – Une suite de triangle idéaux dont l'aire explose

Le théorème suivant clarifie précisément le lien entre l'aire des triangles et l'hyperbolicité au sens de Gromov.

THÉORÈME 23 (Colbois-Vernicos-Verovic [CVV]). — *Il existe une constante $C(\delta)$ telle que dans toute géométrie de Hilbert C qui est δ -hyperbolique, l'aire d'un triangle idéal est plus petite que $C(\delta)$. Réciproquement, il existe $\delta(C)$ tel que toute géométrie de Hilbert dont l'aire des triangles est plus petite que C est δ -hyperbolique.*

Idée de la démonstration. Le principe fonctionnel 17 est utilisé pour montrer la deuxième partie. La semi continuité de la fonctionnelle provient de la continuité de la fonction « volume de Hilbert d'un borélien » sur l'ensemble des ouverts proprement convexe contenant la fermeture de ce borélien (voir [CVV]).

La première partie est un peu plus technique. Elle se fait par l'absurde et deux arguments permettent d'arriver à une contradiction. Le premier est un argument de compacité : pour tout $\delta > 0$, l'action de G_2 est co-compacte sur l'ensemble des convexes δ -hyperbolique ayant un triangle idéal fixé (convexes triangle-pointé). Le second argument provient de la quasiconvexité symétrique du bord et plus précisément de sa régularité Hölder (voir [Ben03b]), celui-ci implique, entres autres, que tout triangle idéal est de volume fini dans un convexe δ -hyperbolique.

Ainsi, on construit une suite de convexes δ -hyperboliques avec un triangle fixé, *i.e.* $T_n \subset \mathcal{C}_n$, telle que $\mu_{\mathcal{C}_n}(T_n) \rightarrow +\infty$; de la co-compactité on en tire une sous-suite qui converge vers un couple (\mathcal{C}, T) . Si on pouvait utiliser un argument de continuité, le théorème serait démontré. Comme on n'y arrive pas on procède autrement.

En effet, on arrive à se ramener au cas d'une famille de convexe \mathcal{C}_n admettant le même triangle T comme convexe idéal. La fin de la démonstration consiste à découper le triangle T en 4 morceaux $m_i, i = 1, \dots, 4$, et pour chaque morceaux m_i on construit un ouvert proprement convexe Ω_i , contenant le morceau, inclus dans tous les \mathcal{C}_n et pour lequel les morceaux m_i est d'aire finie. Ceci contredit le fait que l'aire de T pour \mathcal{C}_n tend vers l'infini avec n .

□

L'aire des triangles idéaux permet également d'identifier deux géométries particulières l'une étant le plan hyperbolique en effet

THÉORÈME 24 ([CVV04]). — *Les seules géométries de Hilbert dont l'aire des triangles idéaux est constante, sont les ellipsoïdes. Les autres géométries admettent toujours un triangle idéal d'aire plus grande que π et un triangle idéal d'aire plus petite que π .*

Idée de la démonstration. On compare à l'ellipsoïde de volume euclidien maximal inclus dans le convexe (dit ellipsoïde de John [Joh48]) et à l'ellipsoïde de volume minimal contenant le convexe. Il se trouve qu'ils sont uniques et qu'ils admettent au moins $n + 1$ points de contact avec le convexe. Ceci permet de construire des triangles idéaux en communs avec le convexe. Ensuite on utilise le fait que des convexes sont emboîtés le volume de tout borélien en commun est décroissant pour l'inclusion, *i.e.*, si $A \subset B$ sont des convexes et $U \subset A$ un borélien, alors $\mu_A(U) \geq \mu_B(U)$.

□

La deuxième géométrie particulière est caractérisée par la minoration uniforme de l'aire des triangles idéaux et il s'agit de la géométrie du triangle.

THÉORÈME 25 ([CVV04]). — *Quel que soit la géométrie de Hilbert, l'aire d'un triangle idéal est toujours plus grande que $\pi^3/24$. L'égalité n'est atteinte que dans la géométrie du triangle par les triangles isométriques au triangle dont les sommets sont les milieux des côtés.*

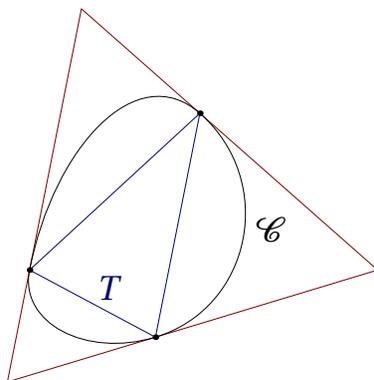


FIG. 10 – Minoration de l'aire des triangles idéaux

Idée de la démonstration. Soit C un convexe du plan et T un triangle idéal de C . En regardant les tangentes du convexe aux sommets d'un triangle idéal, on construit

un triangle contenant notre convexe et admettant également le triangle T comme triangle idéal. La décroissance du volume de Hilbert pour l'inclusion nous permet alors de nous ramener à chercher le minimum de l'aire d'un triangle idéal dans la géométrie de Hilbert du triangle. Un calcul précis y est alors possible.

□

4.3. Le bas du spectre

En géométrie riemannienne, il existe des relations très fortes entre le bas du spectre du laplacien d'une variété complète de volume infini et la géométrie de cette variété. Par exemple, on sait que le bas du spectre d'une variété de Cartan-Hadamard à courbure sectionnelle $K \leq C < 0$ est strictement positif. Récemment, J. Cao [Cao00] a étudié le cas des variétés riemanniennes hyperboliques au sens de Gromov possédant un quasi-pôle, et montré que leur constante de Cheeger (donc le bas de leur spectre) était strictement positif. Dans l'article [CV06], nous abordons ce type de questions dans le contexte des géométries de Hilbert.

On définit le bas du spectre de \mathcal{C} , que l'on note $\lambda_1(\mathcal{C})$, par analogie avec ce qui se fait dans le cas des variétés riemanniennes de volume infini. On pose

$$\lambda_1(\mathcal{C}) = \inf \frac{\int_{\mathcal{C}} \|df_p\|_{\mathcal{C}}^{*2} d\mu_{\mathcal{C}}(p)}{\int_{\mathcal{C}} f^2(p) d\mu_{\mathcal{C}}(p)} \quad (4)$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions lipschitziennes, non nulles, à support compact dans \mathcal{C} et où $\mu_{\mathcal{C}}$ est la mesure de Hilbert associée à \mathcal{C} . L'expression ci-dessus est appelée le quotient de Rayleigh de f .

Le bas du spectre $\lambda_1(\mathcal{C})$ est un nombre réel positif ou nul. On sait que lorsque \mathcal{C} est une ellipse, c'est-à-dire que l'on se trouve dans le modèle hyperbolique, il vaut $1/4$. Dans le cas où \mathcal{C} est un triangle, le bas du spectre est nul. Ceci provient du fait que cette géométrie est bilipschitz au plan Euclidien pour lequel le bas du spectre est nul.

Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 26. — *Soit $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ un convexe du plan muni de sa métrique de Hilbert. Alors son bas du spectre est non nul, i.e., $\lambda_1(\mathcal{C}) \neq 0$, si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ est δ -hyperbolique.*

Idée de la démonstration. Une fois de plus c'est le principe fonctionnel 17 qui permet de montrer que si le bas du spectre est non nul alors le convexe est hyperbolique au sens de Gromov. Deux difficultés : il faut montrer qu'un convexe dont le bas du spectre est non nul est strictement convexe et la semi-continuité du λ_1 . En fait c'est la semi-continuité et le fait que le λ_1 est nul pour les triangles qui implique

la strict convexité grâce à la proposition 11 (et c'est cette partie qui est mise en défaut en dimension supérieure).

La réciproque est un peu plus technique. On commence par définir une constante de Cheeger de manière analytique comme suit

$$I_{a,\infty}(\mathcal{C}) = \inf \frac{\int_{\mathcal{C}} \|df_p\|_{\mathcal{C}}^* d\mu_{\mathcal{C}}(p)}{\int_{\mathcal{C}} |f(p)| d\mu_{\mathcal{C}}(p)}.$$

On la lie au λ_1 par une inégalité de Cauchy-Schwartz comme dans le cas riemannien :

$$I_{a,\infty}^2(\mathcal{C}) \leq 4\lambda_1(\mathcal{C}).$$

Ensuite on introduit la constante de Cheeger géométrique suivante (on rappelle que $l_{F_{\mathcal{C}}}$ est la longueur induite par la métrique de Finsler de \mathcal{C})

$$I_{g,\infty}(\mathcal{C}) = \inf \frac{l_{F_{\mathcal{C}}}(\partial\mathcal{U})}{\mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{U})}$$

où l'infimum est pris sur tous les domaines à bord rectifiable \mathcal{U} dans \mathcal{C} . À l'aide d'une formule de co-aire ad-hoc on montre qu'il existe une constante C telle que

$$C^{-1}I_{g,\infty} \leq I_{a,\infty} \leq CI_{g,\infty}.$$

Ensuite on montre que la constante de Cheeger est non nulle si l'espace est hyperbolique au sens de Gromov. Ceci est dû au fait que les espaces hyperboliques au sens de Gromov vérifie une inégalité isopérimétrique linéaire (voir [BH99] proposition 2.7 chapitre III.H, page 417) et que l'on a un contrôle uniforme du volume des boules de rayon R , sur l'ensemble des géométries de Hilbert (voir [CV06] et [CV05]).

□

Cependant l'équivalence n'est plus vraie en dimension supérieure, en effet nous avons le contre exemple suivant, d'une géométrie de Hilbert dont le bas du spectre est non nul et qui n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.

PROPOSITION 27 (Colbois-Vernicos [CV05]). — *Soit $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ le cylindre de hauteur 2 et de base le disque unité. Sa constante de Cheeger et son bas du spectre sont non nuls. Cependant, puisqu'il n'est pas strictement convexe, il n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

La remarque fondamentale est que lorsque l'on coupe le convexe \mathcal{C} par des plans orthogonaux à l'axe de rotation, on obtient un modèle de l'espace hyperbolique, pour lequel le bas du spectre est non nul (il vaut $1/4$). On utilise cette propriété pour minorer le bas du spectre de \mathcal{C} par une constante positive.

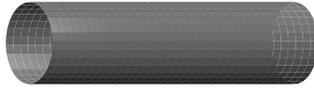


FIG. 11 – Un convexe non hyperbolique dont le bas du spectre est non nul.

Références

- [BG88] **J. Barge** et **É. Ghys**. Surfaces et cohomologie bornée. *Invent. Math.*, 92(3) :509–526, 1988.
- [BP92] **R. Benedetti** et **C. Petronio**. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, 1992.
- [Ben00] **Y. Benoist**. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141(1) :149–193, 2000.
- [Ben03a] **Y. Benoist**. Convexes divisibles. II. *Duke Math. J.*, 120(1) :97–120, 2003.
- [Ben03b] **Y. Benoist**. Convexes hyperboliques et fonctions quasimétriques. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (97) :181–237, 2003.
- [Ben04] **Y. Benoist**. Convexes divisibles. I. In *Algebraic groups and arithmetic*, pages 339–374. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.
- [Ben05] **Y. Benoist**. Convexes divisibles. III. *Annales Scientifiques de l'ENS*, 38 :793–832, 2005.
- [Bena] **Y. Benoist**. Convexes divisible IV. à paraître dans *Invent. Math.*
- [Ben05b] **Y. Benoist**. Convexes hyperboliques et quasiisométries. Prépublication 2005.
- [Ben60] **J.-P. Benzécri**. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bull. Soc. Math. France*, 88 :229–332, 1960.
- [Ber77] **M. Berger**. *Géométrie*, volume 1/actions de groupes, espaces affines et projectifs. Cedic/Fernand Nathan, 1977.
- [Bla16] **W. Blaschke**. *Kreis und Kugel*. Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1916.
- [BS00] **M. Bonk** et **O. Schramm**. Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 10(2) :266–306, 2000.
- [Bou76] **N. Bourbaki**. *Fonction d'une variable réelle*. Éléments de Mathématiques. Herman, 1976.
- [BH99] **M. R. Bridson** et **A. Haefliger**. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics.
- [BBI01] **D. Burago**, **Y. Burago**, et **S. Ivanov**. *A Course in Metric Geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.

- [Cao00] **J. Cao.** Cheeger isoperimetric constants of Gromov-hyperbolic spaces with quasi-poles. *Commun. Contemp. Math.* 2(4) :511–533, 2000.
- [CV06] **B. Colbois** et **C. Vernicos.** Bas du spectre et delta-hyperbolicité en géométrie de hilbert plane. *Bull. de la SMF*, 2006.
- [CV05] **B. Colbois** et **C. Vernicos.** Les géométries de hilbert sont à géométrie locale bornée. Prépublication, 2005.
- [CVV] **B. Colbois**, **C. Vernicos**, et **P. Verovic.** Area of ideal triangles and delta hyperbolicity. En préparation.
- [CVV04] **B. Colbois**, **C. Vernicos**, et **P. Verovic.** L'aire des triangles idéaux en géométrie de hilbert. *L'enseignement mathématique*, t. 50(3–4) :203–237, 2004.
- [CV02] **B. Colbois** et **P. Verovic.** Rigidity of Hilbert metrics. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 65(1) :23–34, 2002.
- [CV04] **B. Colbois** et **P. Verovic.** Hilbert geometry for strictly convex domains. *Geom. Dedicata*, 105 :29–42, 2004.
- [FK06] **T. Foertsch** et **A. Karlsson.** Hilbert metrics and Minkowski norms. to appear in the Journal of Geometry.
- [dlH93] **P. de la Harpe.** On Hilbert's metric for simplices. In *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, pages 97–119. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Hil71] **D. Hilbert.** *Les fondements de la Géométrie, édition critique préparée par P. Rossier.* Dunod, 1971. (voir Appendice I).
- [Hör94] **L. Hörmander.** *Notions of convexity*, volume 127 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [Joh48] **F. John.** Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*, pages 187–204. Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948.
- [KN02] **A. Karlsson** et **G.A. Noskov.** The hilbert metric and gromov hyperbolicity. *l'Enseignement des mathématiques*, 48(1–2) :73–89, 2002.
- [KS58] **P. Kelly** et **E. Straus.** Curvature in Hilbert Geometries. *Pac. J. Math.*, 8(1) :119–125, 1958.
- [LP01] **U. Lang** et **C. Plaut.** Bilipschitz embeddings of metric spaces into space forms. *Geom. Dedicata*, 87(1–3) :285–307, 2001.
- [Lev97] **S. Levy**, editor. *Flavors of Geometry*, volume 31 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge univ. press, 1997.
- [She01] **Z. Shen.** *Lectures on Finsler Geometry*. World Scientific, 2001.
- [SM00] **É. Socié-Méthou.** *Comportement asymptotiques et rigidités en géométries de Hilbert.* Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2000. <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2000/00044.ps.gz>.

- [SM02] **É. Socié-Méthou.** Caractérisation des ellipsoïdes par leurs groupes d'automorphismes. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 35(4) :537–548, 2002.
- [SM04] **E. Socié-Méthou.** Behaviour of distance functions in Hilbert-Finsler geometry. *Differential Geom. Appl.*, 20(1) :1–10, 2004.
- [LW21] **L. Wittgenstein.** Logisch-Philosophische Abhandlung. 1921.