Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2017-2018

Anne-Sophie de Suzzoni et Charles Collot

Un résultat de diffusion pour l'équation de Hartree autour de solutions non localisées

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2017-2018), Exposé n° XIV, 12 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2017-2018____A14_0>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2017-2018
Exposé n° XIV, 1-12

Un résultat de diffusion pour l'équation de Hartree autour de solutions non localisées

Anne-Sophie de Suzzoni* & Charles Collot†

Résumé

On s'intéresse à l'évolution d'un système de particules autour d'équilibres thermodynamiques présentant un nombre infini de particules. Il s'agit d'étudier la stabilité asymptotique de solutions à l'équilibre de l'équation de Hartree :

$$i\partial_t X = - \triangle X + w * \mathbb{E}(|X|^2)X$$

où X est un champ aléatoire, w une fonction réelle qui caractérise les interactions entre particules, $*$ le produit de convolution et $\mathbb{E}$ est l'espérance. Cette équation admet des solutions dont les lois sont invariantes par translations temporelles et spatiales, elles sont donc non localisées. On exposera leur stabilité asymptotique à travers un résultat de diffusion.

Abstract

We are interested in the evolution of a system of particles around thermodynamical equilibria presenting an infinite number of particles. That is, we study the asymptotic stability of solutions at equilibrium of the Hartree equation :

$$i\partial_t X = - \triangle X + w * \mathbb{E}(|X|^2)X$$

where X is a random field, w is a real fonction that characterises the interactions between particles, $*$ is the convolution product, and $\mathbb{E}$ is the expectation. This equation admits solutions whose laws are invariant under temporal and spatial translations, they are thus nonlocalised. We will present their asymtotic stability through a scattering result.

1 Introduction

Un système de N particules dans l'espace $\mathbb{R}^d$ interagissant deux à deux via un potentiel d'interaction w se modélise par une famille de N fonctions $(u_1, \dots, u_N)$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ orthornormée dont l'évolution est caractérisée sous des hypothèses de champs moyens par le système d'équations suivant

$$i\partial_t u_j = - \triangle u_j + \left(w * \Big(\sum_{k=1}^{N} |u_k|^2 \Big) \right) u_j \tag{1}$$

*Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), 99, avenue Jean-Baptiste Clément, F-93430 Villetaneuse, France - email: adesuzzo@math.univ-paris13.fr

†Department of Mathematics, New York University in Abu Dhabi, Saadiyat Island, P.O. Box 129188, Abu Dhabi, United Arab Emirates - email: cc5786@nyu.edu

où $j \in \{1, \dots, N\}$, $\triangle$ est le laplacien dans $\mathbb{R}^d$, $*$ est le produit de convolution et w est une fonction de $\mathbb{R}^d$. La partie linéaire de l'équation correspond à l'évolution libre du système de particules ou encore à l'énergie cinétique. La fonction w caractérise l'interaction entre les particules ; le fait que la non-linéarité soit cubique correspond au fait que l'on ne considère que des interactions deux à deux ; et enfin la quantité

$$w * \Big(\sum_{k=1}^{N} |u_k|^2\Big)$$

correspond au champ moyen vu par une particule.

Notons qu'il s'agit d'un problème approché, on constate en particulier que la particule j interagit avec elle-même. Sa dérivation, sous des hypothèses sur w, a été étudiée dans [1, 2, 3, 7, 8].

On peut généraliser cette équation à un problème plus général qui permet de modéliser des équilibres thermodynamiques. Une première solution est de considérer l'équation sous le point de vue des opérateurs de densité, par exemple, dans [5, 4, 13, 12]. Dans ce cas, l'équation (1) se généralise en

$$i\partial_t \gamma = [-\triangle + w * \rho_\gamma, \gamma] \tag{2}$$

où γ est un opérateur intégral positif, et en notant $\tilde{\gamma}(x, y)$ son noyau intégral, $\rho_\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x, x)$, et $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur. La quantité $w * \rho_\gamma$ correspond au champ moyen.

Le lien avec l'équation (1) vient du fait que si $(u_1, \dots, u_N)$ satisfait (1) alors $\gamma := \sum_{j=1}^{N} |u_j\rangle\langle u_j|$ satisfait (2). On a noté $|u_j\rangle\langle u_j|$ la projection orthogonale sur $\mathbb{C}u_j$. On peut par exemple constater que le noyau intégral de γ ainsi défini est égal à

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{u_j(y)} u_j(x)$$

et donc $\rho_\gamma(x) = \sum_k |u_k(x)|^2$, ce qui induit que $w * (\sum_{k=1}^{N} |u_k|^2\big)$ est bien le champ moyen dans les deux équations. Toujours dans cette analogie, la trace de γ est égale à N, ce qui correspond au nombre de particules.

Considérons l'équation (2) pour elle-même. Elle admet des solutions invariantes. Ce sont les multiplicateurs de Fourier positifs. Soit $f \in L^2$ et considérons, γ_f le multiplicateur de Fourier par $|f|^2$. L'opérateur γ_f commute avec $\triangle$ et de plus, son noyau intégrable est égal à

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int |f(\xi)|^2 e^{i\xi(x-y)}.$$

On en déduit que ρ_{γ_f} est une constante. Cela implique deux choses : la première est que $w * \rho_{\gamma_f}$, en tant que constante, commute avec γ_f, et donc γ_f est une solution stationnaire de (2) ; la deuxième est que $\mathrm{Tr}\, \gamma_f = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\gamma_f}(x) dx = \infty$ et donc que γ_f est un système à l'équilibre avec une infinité de particules. Certains de ces γ_f correspondent à des équilibres thermodynamiques, dans le sens où ils minimisent une entropie, mais nous les considérerons dans un cadre général.

On peut également généraliser l'équation (1) en utilisant des champs aléatoires. Dans ce cas, on étudie l'équation

$$i\partial_t X = -\triangle X + \Big(w * \Big(\mathbb{E}(|X|^2)\Big)\Big) X, \tag{3}$$

où X est un champ aléatoire sur un espace de probabilité $\Omega, \mathcal{F}, P$ et $\mathbb{E}$ est l'espérance sur cet espace. Signalons que l'aspect bien posé du problème de Cauchy associé à l'équation (3), pour des champs aléatoires à valeurs dans des espaces de Sobolev, a été étudié dans [6].

Le lien avec l'équation (1) se fait de la façon suivante : si $(u_1,\dots,u_N)$ satisfait (1) alors X défini sur $\Omega = \{1,\dots,N\}$ muni de la tribu totale et de la probabilité uniforme par

$$X(j) = \sqrt{N} u_j$$

pour tout $j \in \Omega$, satisfait (3). En effet

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}|X(j)|^2 = \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2.$$

Le lien avec l'équation (2) peut s'effectuer également : si X satisfait (3), alors $\mathbb{E}(|X\rangle\langle X|)$ satisfait (2). On constate en particulier que le noyau intégral de $\mathbb{E}(|X\rangle\langle X|)$ est égal à

$$\mathbb{E}(\overline{X(y)}X(x))$$

et donc en faisant $y = x$, les champs moyens correspondent. Une réciproque peut se faire à l'aide de champs gaussiens.

Ce lien est encore renforcé par l'existence de solutions de (3) qui ne sont pas stationnaires mais dont la loi est invariante par translations temporelles. Soit $f \in L^2$ et construisons l'intégrale de Wiener sur $\mathbb{R}^d$:

$$Y_f = \int f(\xi) e^{i\xi x - it(m+|\xi|^2)} dW(\xi) \tag{4}$$

où $m = \int w \int |f|^2$. Y_f est une superposition d'une infinité d'ondes progressives orthogonales entre elles en probabilite. Effectivement, les $dW(\xi)$ sont des Gaussiennes complexes infinitésimales caractérisées par

$$\mathbb{E}(\overline{dW(\eta)}dW(\xi)) = \delta(\eta - \xi) d\eta d\xi,$$

où δ est le delta de Dirac dans $\mathbb{R}^d$.

On a par exemple

$$\mathbb{E}(|Y_f|^2) = \int \left| f(\xi) e^{i\xi x - it(m+|\xi|^2)} \right|^2 d\xi = \int |f|^2$$

et donc $w * \mathbb{E}(|Y_f|^2) = \int w \int |f|^2 = m$. De plus,

$$i\partial_t Y_f = \int (m + |\xi|^2) f(\xi) e^{i\xi x - it(m+|\xi|^2)} dW(\xi) = (m - \triangle) Y_f$$

et comme $w * \mathbb{E}(|Y_f|^2) = m$, on a

$$i\partial_t Y_f = - \triangle Y_f + w * \mathbb{E}(|Y_f|^2) Y_f$$

et donc Y_f est solution de (3).

Enfin, les Gaussiennes complexes étant de loi invariante par les multiplications par $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, la loi de Y_f est invariante par translations temporelles, ce qui correspond la stationarité pour les opérateurs, et par translations spatiales. On a donc que Y_f n'est pas localisé, il ne peut pas appartenir à $L^2_p L^2_x$. L'absence de localisation correspond à l'absence de trace pour les opérateurs, ou encore à un nombre de particules infini.

De plus, l'opérateur $\mathbb{E}(|Y_f\rangle\langle Y_f|)$ est le multiplicateur de Fourier par $(2\pi)^d |f|^2$.

On appelera dorénavant Y_f un équilibre pour l'équation (3) de la forme (4), associé à une fonction f.

L'objectif est ici d'étudier la stabilité de Y_f à travers un résultat de scattering ou diffusion. L'existence et l'unicité en temps court de solutions de (3) au voisinage de Y_f, pour des perturbations initiales étant des champs aléatoires à valeurs dans des espaces de Sobolev, a été démontrée dans [6]. Notons qu'au niveau des opérateurs, cette stabilité a été étudié dans [12] en dimension 2 et dans [5] en dimension supérieure sous des hypothèses structurelles pour le potentiel d'interaction.

Nous étudierons ici les dimensions supérieures à 4.

Avant d'énoncer un résultat, donnons quelques notations.

On appelle $S(t)$ le flot de l'équation linéaire $i\partial_t u = (m - \triangle)u$, autrement dit $S(t) = e^{-it(m-\triangle)}$. Pour $s \geq 0$, L^2_p, H^s est l'espace des champs aléatoires à valeurs dans l'espace de Sobolev de régularité s dans $\mathbb{R}^d$ dont la norme H^s est de carré intégrable dans l'espace de probabilité. On note pour tout u dans $\mathcal{S}'$, $\hat{u}$ sa transformée de Fourier, et u_+, u_- ses parties positives et négatives respectivement. On note $s_c = \frac{d}{2} - 1$ la régularité critique pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension d.

Théorème. *Soit $d \geq 4$, soit f dans l'espace de Schwartz radiale et telle que $|\xi| \mapsto |f|^2(\xi)$ soit décroissante. Il existe $C(f)$ tel que pour tout $w \in W^{s_c,1}$ tel que*

$$\|(\hat{w})_-\|_{L^\infty} \leq C(f) \ \text{ et } \ |(\hat{w}(0))_+| \leq C(f), \tag{5}$$

et tout $Z_0 \in L^2_p, H^{s_c} \cap L^{2d/(d+2)}_x, L^2_p$ tel que $\|Z_0\|_{L^2_p, H^{s_c}} + \|Z_0\|_{L^{2d/(d+2)}_x, L^2_p} \leq C(f)$, l'équation (3) *avec pour donnée initiale $Y_f(t=0) + Z_0$ admet une unique solution globale X dans $Y_f + L^2_p, C(\mathbb{R}, H^{s_c})$ et de plus il existe $Z_{\pm\infty} \in L^2_p, H^{s_c}$ tels que*

$$\|X(t) - Y_f(t) - S(t)Z_{\pm\infty}\|_{L^2_p, H^{s_c}} \to 0$$

quand $t \to \pm\infty$.

Remarque 1. Les conditions sur f sont satisfaites pour les équilibres thermodynamiques pour les gaz de bosons ou de fermions à température strictement positive T :

$$f(\xi) = \frac{1}{e^{(|\xi|^2-\mu)/T} - 1}, \ \ \mu < 0 \ \text{ et } \ f(\xi) = \frac{1}{e^{(|\xi|^2-\mu)/T} + 1}, \ \ \mu \in \mathbb{R},$$

respectivement, mais ce n'est pas le cas pour les gaz de Fermi de température nulle

$$f(\xi) = \mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq \mu}, \ \ \mu > 0.$$

Remarque 2. La première condition sur w, (5), correspond au fait que l'équation ne doit pas être trop focalisante, tandis que la seconde permet à l'équation (3) linéarisée autour de Y_f d'avoir suffisamment de dispersion.

Remarque 3. Sur l'orthogonal de l'espace engendré par les $dW(\xi)$, c'est-à-dire pour la partie de Z_0 indépendante en probabilité de l'équilibre Y_f, la condition de petitesse de la norme $L^{2d/(d+2)}_x L^2_p$ peut être écartée. Cette orthogonalité implique effectivement moins d'interaction et ainsi des annulations supplémentaires.

Remarque 4. Il s'agit d'un résultat avec petites données initiales, et localisées. Ce n'est pas surprenant, d'abord parce qu'on autorise l'équation à être un peu focalisante, ensuite parce qu'on peut faire un parallèle avec les résultats de diffusion pour l'équation de Gross-Pitaevskii, [9, 10, 11], qui sont également des résultats de diffusion pour une équation dispersive autour d'un équilibre non localisé.

Dans la section 2, on réduira le problème à chercher un bon cadre fonctionnel pour l'équation (3) autour de Y_f. Ensuite, dans la section 3, on donnera quelques idées des difficultés de la preuve comparée à celle de la diffusion pour l'équation de Schrödinger. Enfin, dans la section 4, on donnera un exemple où l'équation est spectralement instable et on fera le lien avec l'équation de Gross-Pitaevskii.

2 Reformulation du problème

Tout d'abord, écrivons X solution de (3) sous la forme $X = Y_f + Z$. Le champ aléatoire Z satisfait

$$i\partial_t Z = (m - \triangle)Z + w * (2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f Z)) + \mathbb{E}(|Z|^2))(Y_f + Z)$$

avec pour donnée initiale $Z(t = 0) = Z_0$.

On pose $V = 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f Z)) + \mathbb{E}(|Z|^2)$, on a maintenant un système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{c} i\partial_t Z = (m - \triangle)Z + w * V(Y_f + Z) \\ V = 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f Z)) + \mathbb{E}(|Z|^2) \end{array} \right.$$

avec la même donnée initiale.

Passons en formulation de Duhamel, et introduisons l'opérateur de résolution du problème inhomogène avec potentiel V :

$$W_V(Z) = -i\int_0^t S(t-\tau)\Big(w * V(\tau)Z(\tau)\Big)d\tau.$$

On obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Z & = & S(t)Z_0 + W_V(Y_f) + W_V(Z) \\ V & = & 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f S(t)Z_0)) + 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Y_f))) + 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z))) + \mathbb{E}(|Z|^2) \end{array} \right. . \tag{6}$$

On est donc ramenés à résoudre un problème de point fixe sur Z, V qui contient :
— des termes liés à la donnée initiale : $S(t)Z_0$ et $2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f S(t)Z_0))$;
— des termes linéaires : $W_V(Y_f)$ et $2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Y_f)))$;
— des termes quadratiques : $W_V(Z)$, $2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))$ et $\mathbb{E}(|Z|^2)$.

Pour trouver une unique solution globale, on va appliquer le théorème du point fixe de Banach, et pour cela, on doit trouver deux espaces de Banach Θ_Z pour Z et Θ_V pour V qui vérifient :

"global" : $\Theta_Z \subseteq L^2_p, \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{s_c})$,

"donnée initiale" : $\|S(t)Z_0\|_{\Theta_Z} \lesssim \|Z_0\|_{L^2_p, H^{s_c}}$ et $\|\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f S(t)Z_0))\|_{\Theta_V} \lesssim \|Z_0\|_{L^2, H^{s_c}} + \|Z_0'\|_{L_x^{2d/(d+2)}, L^2_p}$.

"linéaire" : l'application linéaire $1 - L$ où L est définie par

$$L\begin{pmatrix} Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 V \\ L_1 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_V(Y_f) \\ 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Y_f))) \end{pmatrix}$$

est un endomorphisme continu de $\Theta_Z \times \Theta_V$ inversible et d'inverse continu.

“quadratique 1” : $\|W_V(Z)\|_{\Theta_Z} \lesssim \|V\|_{\Theta_V}\|Z\|_{\Theta_Z}$,

“quadratique 2” : $\|2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))\|_{\Theta_V} \lesssim \|V\|_{\Theta_V}\|Z\|_{\Theta_Z}$,

“quadratique 3” : l’application $(u,v) \mapsto \mathbb{E}(uv)$ est continue de $\Theta_Z \times \Theta_Z$ dans Θ_V.

Remarque 5. Ces conditions sont suffisantes pour obtenir des solutions globales pour l’équation (3) ou (6) pour des petites données initiales. Pour obtenir la diffusion, il faut également montrer que l’application

$$(Z,V) \mapsto -i\int_T^{\pm\infty} S(-\tau)\Big(w * V(\tau)(Y_f(\tau)+Z(\tau))\Big)d\tau$$

est continue de $\Theta_Z \times \Theta_V$ dans L^2_p, H^{s_c} pour tout T et que

$$\Big\| \int_T^{\pm\infty} S(-\tau)\Big(w * V(\tau)(Y_f(\tau)+Z(\tau))\Big)d\tau\Big\|_{L^2_p,H^{s_c}} \to 0$$

lorsque T tend vers $\pm\infty$, ce qui est une conséquence du choix que l’on fera pour Θ_Z et Θ_V et de la preuve des points “linéaire” et “quadratique 1”.

Pour satisfaire les points ”global” et ”quadratique 1”, on va se placer dans le cadre de la diffusion pour Schrödinger cubique dans $\mathbb{R}^d$, c’est-à-dire on va choisir Θ_Z inclus dans

$$L^2_p, C(\mathbb{R}, H^{s_c}) \cap L^2_p, L_t^{2(d+2)/d}, W_x^{s_c,2(d+2)/d}$$

et Θ_V inclus dans

$$\Theta'_V = L_t^{(d+2)/2}, L_x^{(d+2)/2}.$$

Pour satisfaire le point ”quadratique 3”, on suppose également que Θ_Z est inclus dans $L^2_p, L_t^{d+2}, L_x^{d+2}$ et donc Θ_Z est inclus dans

$$\Theta'_Z = L^2_p, C(\mathbb{R}, H^{s_c}) \cap L^2_p, L_t^{2(d+2)/d}, W_x^{s_c,2(d+2)/d} \cap L^2_p, L_t^{d+2}, L_x^{d+2}$$

Notons deux choses : on ne suppose pas que V a des dérivées dans $L_t^{(d+2)/2}, L_x^{(d+2)/2}$ car on les perd sur $w \in W^{s_c,1}$. En effet,

$$\|w * V\|_{L_t^{(d+2)/2}, W_x^{s_c,(d+2)/2}} \leq \|w\|_{W^{s_c,1}}\|V\|_{L_t^{(d+2)/2}, L_x^{(d+2)/2}}.$$

Pour ces espaces intermédiaires, on satisfait les points ”global”, ”donnée initiale”, ”quadratique 1” et ”quadratique 3”. Ces estimées sont en partie dues à des estimées de dispersion (inégalités de Strichartz) pour l’opérateur $m - \triangle$.

En effet, l’opérateur $m - \triangle$ satisfait la propriété suivante.

Proposition 1 (Inégalités de Strichartz). *Soit $\sigma \leq s \in \mathbb{R}$ et $p, q, d \neq (2, \infty, 2)$ des réels supérieurs à 2 qui satisfont*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} - (s - \sigma).$$

Il existe $C = C(p, q, d, s - \sigma)$ tel que tout $u \in H^s$, on a

$$\|S(t)u\|_{L^p, W^{\sigma,q}} \leq C\|u\|_{H^s}.$$

Cette inégalité est également satisfaite pour des espaces homogènes.

On en déduit que

$$\|S(t)u\|_{\Theta'_Z} \lesssim \|u\|_{L^2_p, H^{s_c}}$$

pour tout $u \in L^2_p, H^{s_c}$, ce qui implique la première partie de "donnée initiale". L'autre partie de "donnée initiale" est assurée par l'étude du problème linéaire réalisée dans la section suivante.

En combinant le lemme de Christ-Kiselev, qui nous ramène à étudier

$$\| \int_0^\infty S(-\tau)(w * V(\tau)Z(\tau))d\tau\|_{H^{s_c}}$$

et le dual de l'inégalité de Stricharz, on obtient

$$\|W_V(Z)\|_{\Theta'_Z} \lesssim \|w * VZ\|_{L^2_p, L^{2(d+2)/(d+4)}, W^{s_c, 2(d+2)/(d+4)}}$$

et par l'inégalité de Hölder, puisque $\frac{d+4}{2(d+2)} = \frac{2}{d+2} + \frac{d}{2(d+2)}$,

$$\|W_V(Z)\|_{\Theta'_Z} \lesssim \|w * V\|_{L^{(d+2)/2}, W^{s_c,(d+2)/2}} \|Z\|_{\Theta'_Z}.$$

Enfin, comme on peut perdre s_c dérivées sur w, on a

$$\|W_V(Z)\|_{\Theta'_Z} \lesssim \|V\|_{\Theta'_V} \|Z\|_{\Theta'_Z}.$$

Ceci conclut le parallèle entre le problème (6) et l'équation de Schrödinger cubique.

3 Différences avec l'équation de Schrödinger cubique

3.1 Traitement des termes linéaires

On rappelle que l'on veut trouver Θ_Z et Θ_V qui satisfont la condition "linéaire", c'est-à-dire : l'application linéaire $1 - L$ où L est définie par

$$L\begin{pmatrix} Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 V \\ L_1 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_V(Y_f) \\ 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Y_f))) \end{pmatrix}$$

est un endomorphisme continu de $\Theta_Z \times \Theta_V$ inversible et d'inverse continu.

L'inverse de l'application $1 - L$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & L_2(1 - L_1)^{-1} \\ 0 & (1 - L_1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour avoir "linéaire", il faut donc que $1 - L_1$ soit un endomorphisme continu de Θ_V inversible et d'inverse continu et que L_2 soit une application linéaire continue de Θ_V dans Θ_Z.

L_1 traduit la réaction de l'état stationnaire Y_f en présence d'un champ de potentiel V. On peut montrer que c'est un multiplicateur de Fourier en espace-temps, dont le symbole est le produit de $\hat{w}$ et de la fonction de Lindhard [14]. La condition sur L_1 a été étudiée dans [12] et [5] et est satisfaite sous les hypothèses sur f et sous les hypothèses (5) du théorème.

Compte tenu des remarques précédentes sur les inégalités de dispersion et le lemme de Christ-Kiselev, pour que L_2 soit continue, il suffit qu'il existe C tel que

$$\Big\| \int_0^\infty S(-\tau)(w * V(\tau)Y_f(\tau))d\tau \Big\|_{L^2_p, H^{s_c}} \leq C\|V\|_{\Theta_V}.$$

La difficulté ne vient pas des dérivées, on se concentrera donc sur

$$\Big\| \int_0^\infty S(-\tau)(w * V(\tau)Y_f(\tau))d\tau\Big\|_{L^2_p,L^2}.$$

On peut calculer explicitement l'identité

$$\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^\infty S(-\tau)(w * V(\tau)Y_f(\tau))d\tau\Big|^2\Big) = \int |f(\eta)|^2\Big|\int_0^\infty S_\eta(-\tau)w * V(\tau)d\tau\Big|^2 d\eta.$$

où $S_\eta(-\tau) = e^{i\tau(-\triangle+2i\eta\cdot\triangledown)}$.

On s'est donc ramené à estimer

$$I := \int |f(\eta)|^2\Big\|\int_0^\infty S_\eta(-\tau)w * V(\tau)d\tau\Big\|^2_{L^2}d\eta.$$

En passant en Fourier par Plancherel, on obtient

$$I = \int d\eta |f(\eta)|^2 \int d\xi \int_0^\infty dt \int_{-t}^\infty d\tau e^{i|\xi|^2\tau - 2i\eta\cdot\xi\tau}|\hat{w}(\xi)|^2\hat{V}(t+\tau,\xi)\overline{\hat{V}(t,\xi)}.$$

On intègre sur η en introduisant la transformée de Fourier h de $|f|^2$. On obtient

$$\int d\xi \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} d\tau \mathbf{1}_{t\geq -\tau}h(2\xi\tau)e^{i|\xi|^2\tau}\hat{V}(t+\tau,\xi)\overline{\hat{V}(t,\xi)}|\hat{w}(\xi)|^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intégrale sur t, et le fait que $\hat{w}$ appartient à L^∞, on a

$$I \lesssim \int d\xi \int_{\mathbb{R}} d\tau |h(2\xi\tau)| \|\hat{V}(\xi)\|^2_{L^2_t}.$$

Sous les hypothèses sur f du théorème, il existe C tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}} d\tau |h(2\xi\tau)| \leq C|\xi|^{-1}$$

et donc

$$\|L_2 V\|_{\Theta_Z} \lesssim \|V\|_{L^2_t,\dot{H}^{-1/2}}.$$

On doit donc avoir Θ_V inclus dans $L^2_t, \dot{H}^{-1/2}$.

Finalement, on pose

$$\Theta_V = L^2_t, \dot{H}^{-1/2} \cap \Theta'_V.$$

On doit donc compenser une singularité pour les petites fréquences de $W_V(Y_f)$ grâce à a définition de Θ_V. Cette singularité est également présente dans l'étude des phénomènes de diffusion pour l'équation de Gross-Pitaevskii. On fera un parallèle plus tangible dans la Section 4, mais pour l'instant, on se contentera d'utiliser un outil venant de cette étude, à savoir, des inégalités bilinéaires pour des espaces de Besov inhomogènes.

On se rappelle que l'on doit avoir la propriété "quadratique 3". Et pour cela, on doit trouver un espace $\tilde{\Theta}$ tel qu'il existe C tel que pour tout u, v dans $L^2_p, \tilde{\Theta}$, on ait

$$\|\mathbb{E}(uv)\|_{L^2_t,\dot{H}^{-1/2}} \leq \|u\|_{L^2_p,\tilde{\Theta}}\|u\|_{L^2_p,\tilde{\Theta}}.$$

Grâce au Lemme 4.1 dans [11], on peut prendre $\tilde{\Theta} = L^4, B_p^{0,1/4}$ avec $p = \frac{4d}{d+1}$. L'espace $B_p^{0,1/4}$ est un espace de Besov inhomogène. Pour simplifier, pour les petites fréquences, on prend 0 dérivées dans L^p et pour les grandes $1/4$ de dérivée dans L^p.

Finalement, on pose

$$\Theta_Z = L_p^2, L_t^4, B_p^{0,1/4} \cap \Theta_Z'.$$

Une propriété importante de cet espace est que les inégalités de dispersion restent respectées, c'est-à-dire

$$\|S(t)Z\|_{\Theta_Z} \lesssim \|Z\|_{L_p^2, H^{s_c}}$$

et donc on vérifie toujours les points "donnée initiale", "quadratique 1", "quadratique 3" et maintenant, grâce à l'ajout de $L_t^2, \dot{H}^{-1/2}$ dans la définition de Θ_V, on a également le point "linéaire".

3.2 Traitement des termes quadratiques

Il reste à traiter un terme quadratique, il s'agit de

$$2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))$$

dont on doit montrer l'appartenance à Θ_V.

Estimer $2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))$ dans $L_t^{(d+2)/2}, L_x^{(d+2)/2}$ n'est pas problématique puisque

$$\frac{4}{d+2} + \frac{2d}{d+2} = \frac{d}{2} - (\frac{d}{2} - 2)$$

et $0 \leq \frac{d}{2} - 2 \leq s_c$. Les inégalités de dispersion sont donc applicables et on peut estimer

$$2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))$$

en estimant $W_V(Z)$ comme dans le point "quadratique 1".

La difficulté vient donc de la partie $L_t^2, \dot{H}^{-1/2}$ de la norme. En raisonnant par dualité, il s'agit de montrer que pour tout $U \in L_t^2, \dot{H}^{1/2}$ réel,

$$\langle U, 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))\rangle_{t,x} \leq \|U\|_{L_t^2, \dot{H}^{-1/2}} \|V\|_{\Theta_V} \|Z\|_{\Theta_V}.$$

Or, on a

$$\langle U, 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))\rangle_{t,x} = \mathrm{Re}\mathbb{E}\langle \int_\tau^\infty S(\tau - t) Y_f(t) U(t) dt, w * VZ\rangle_{\tau,x}.$$

Comme on l'a vu dans la sous-section précédente, on sait estimer

$$\int_\tau^\infty S(\tau - t) Y_f(t) U(t) dt$$

mais il faut pouvoir perdre $1/2$ dérivée en plus de la demi dérivée perdue par l'espace d'appartenance de U. Il faut donc perdre une dérivée au total.

En mettant V dans L^2, L^2 et Z dans $L^{2(d+2)/d}, L^{2(d+2)/d}$, par Hölder, on obtient

$$\langle U, 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))\rangle_{t,x} \leq \Big\| \int_\tau^\infty S(\tau - t) Y_f(t) U(t) dt \Big\|_{L^{d+2}, L^{d+2}, L_p^2} \|V\|_{L^2, L^2} \|Z\|_{L_p^2, L^{2(d+2)/d}, L^{2(d+2)/d}}.$$

On peut appliquer les inégalités de Strichartz à

$$\Big\| \int_\tau^\infty S(\tau-t)Y_f(t)U(t)dt\Big\|_{L^{d+2},L^{d+2},L^2_p} \leq \Big(\int |f(\eta)|^2 \Big\| \int_\tau^\infty S_\eta(\tau-t)U(t)dt\Big\|^2_{L^{d+2},L^{d+2}}\Big)^{1/2}.$$

Comme $\frac{2}{d+2}+\frac{d}{d+2}=\frac{d}{2}-s_c$, on est capable de perdre $s_c=\frac{d}{2}-1\geq 1$ dérivées, ce qui permet de gérer les petites fréquences.

Remarque 6. Tout ce qui a été présenté jusqu'ici est applicable également en dimension 3 sauf ce dernier point, car $s_c=\frac{1}{2}<1$.

Pour les grandes fréquences, la même inégalité de Hölder nous donne

$$\langle U, 2\mathbb{E}(\mathrm{Re}(\bar{Y}_f W_V(Z)))\rangle_{t,x} \leq \Big\| \int_\tau^\infty S(\tau-t)Y_f(t)U(t)dt\Big\|_{L^{2(d+2)/d},L^{2(d+2)/d}} \|V\|_{L^2,L^2}\|Z\|_{L^{d+2},L^{d+2}}$$

ce qui nous permet de ne pas perdre de dérivées dans les grandes fréquences.

On a donc deux espaces de Banach qui satisfont également "quadratique 2".

4 Parallèle avec l'équation de Gross-Pitaevskii

4.1 Lien entre l'équation (3) et l'équation de Gross-Pitaevskii

Au lieu de prendre Y_f tel qu'on l'a choisi, prenons un Y_f qui ne dépend pas de l'espace :

$$Y_f = \int f(\xi)e^{-itm}dW(\xi).$$

Ce champ est une solution de (3) dont la loi est invariante par translations temporelles. La quantité $m=\int w\int|f|^2 = w*\mathbb{E}(|Y_f|^2$ est toujours définie de la même façon.

On pose $Z=X-Y_f$ et on projette Z en probabilité sur la droite engendrée par Y_f et son orthogonal, soit $Z_1=\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbb{E}(\bar{Y}_f Z)$ et $Z_2=Z-Z_1\frac{Y_f}{\sqrt{m}}$. On obtient un système d'équations couplées sur Z_1,Z_2 :

$$\begin{cases} i\partial_t Z_1 = -\triangle Z_1 + w*(2\sqrt{m}\mathrm{Re}Z_1+|Z_1|^2+\mathbb{E}(|Z_2|^2))(\sqrt{m}+Z_1) \\ i\partial_t Z_2 = (m-\triangle)Z_2 + w*(2\sqrt{m}\mathrm{Re}Z_1+|Z_1|^2+\mathbb{E}(|Z_2|^2))Z_2. \end{cases}$$

La partie linéaire de la première équation est

$$i\partial_t Z_1 = -\triangle Z_1 + 2mw*\mathrm{Re}Z_1$$

ce qui en fait une équation de Gross-Pitaevskii avec des termes non-linéaires quadratiques et cubiques, tandis que la seconde est une équation de Schrödinger avec des termes non-linéaires quadratiques et cubiques. Étant donné les résultats de diffusion sur l'équation de Gross-Pitaevskii, on s'attend à ce que ce système diffuse en dimension supérieure à 4.

4.2 Absence de robustesse lorsque f n'est pas régulière

Prenons $Y_f=(g_+e_++e_-g_-)\sqrt{\frac{\kappa}{2}}$ avec g_+ et g_- deux gaussiennes centrées normalisées indépendantes, $\kappa\in\mathbb{R}_+$ et

$$e_\pm = e^{\pm i\xi x - it(m+|\xi|^2)}$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $m = \int w\kappa$. Il s'agit de Y_f avec f une somme de deux deltas de Dirac. C'est donc une solution de (3) de loi invariante par translations spatiales et temporelles.

On pose $Z = X - Y_f$ et on cherche des solutions sous la forme

$$Z = Z_+ e_+ g_+ + Z_- e_- g_-.$$

On obtient un système d'équations couplées

$$\begin{cases} i\partial_t Z_+ = - \triangle Z_+ - 2i\xi \cdot \nabla Z_+ + w * (\sqrt{2\kappa}(\mathrm{Re}Z_+ + \mathrm{Re}Z_-) + |Z_+|^2 + |Z_-|^2)(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} + Z_+) \\ i\partial_t Z_- = - \triangle Z_- + 2i\xi \cdot \nabla Z_- + w * (\sqrt{2\kappa}(\mathrm{Re}Z_+ + \mathrm{Re}Z_-) + |Z_+|^2 + |Z_-|^2)(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} + Z_-) \end{cases}.$$

On s'intéresse simplement à la partie linéaire de cette équation :

$$\begin{cases} i\partial_t Z_+ = - \triangle Z_+ - 2i\xi \cdot \nabla Z_+ + \kappa w * (\mathrm{Re}Z_+ + \mathrm{Re}Z_-) \\ i\partial_t Z_- = - \triangle Z_- + 2i\xi \cdot \nabla Z_- + \kappa w * (\mathrm{Re}Z_+ + \mathrm{Re}Z_-) \end{cases}.$$

On écrit ces équations sous la forme

$$\partial_t U = AU$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}Z_+ \\ \mathrm{Im}Z_+ \\ \mathrm{Re}Z_- \\ \mathrm{Im}Z_- \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient de A est un multiplicateur de Fourier et on peut donc passer en Fourier sous la forme suivante

$$\partial_t \hat{U}(\eta) = \hat{A}(\eta)\hat{U}(\eta)$$

où $\hat{A}(\eta)$ est une matrice de $\mathbb{C}^4$ qui vérifie $\hat{A}(-\eta) = \overline{\hat{A}(\eta)}$.

Si $\kappa = 0$, on a juste deux équations linéaires découplées de Schrödinger avec un terme de transport, et donc l'équation est linéairement stable.

Si $\xi = 0$, $\hat{A}(\eta)$ se diagonalise en

$$\begin{pmatrix} i\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\eta^2(\eta^2 + 2\kappa\hat{w}(\eta))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{\eta^2(\eta^2 + 2\kappa\hat{w}(\eta)))} \end{pmatrix}$$

et on s'attend à retrouver les mêmes résultats que pour l'équation de Gross-Pitaevskii.

En revanche, si $\kappa > 0$, $\xi \neq 0$ et $\hat{w}(0) > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{A}(\eta)$ admet une valeur propre strictement positive et une strictement négative pour tout η satisfaisant $|\xi \cdot \eta| \le \varepsilon|\eta|$ et $|\eta| < \varepsilon$, ce qui rend l'équation linéairement instable.

De même, si $\kappa > 0$, $\xi \neq 0$ et $\hat{w}(0) < 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{A}(\eta)$ admet une valeur propre strictement positive et une strictement négative pour tout η satisfaisant $|\xi \cdot \eta| \le \varepsilon|\eta|$ et $\varepsilon < |\eta| < 2\varepsilon$, ce qui rend l'équation linéairement instable.

Pour les hautes fréquences, le système

$$\partial_t U = AU$$

est linéairement stable mais en ajoutant la non linéarité, les fréquences échangent de l'énergie et donc on risque d'avoir un système instable même en se restreignant aux hautes fréquences.

Pour avoir un système linéairement stable, il faudrait $\hat{w}(\eta) = O(\eta^2)$ en 0 et donc $\hat{w}(0) = \int w = 0$, ce qui semble une hypothèse assez forte d'un point de vue physique.

Références

[1] Claude Bardos, Laszlo Erdős, François Golse, Norbert Mauser, and Horng-Tzer Yau, *Derivation of the Schrödinger-Poisson equation from the quantum N-body problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 6, 515–520.

[2] Claude Bardos, François Golse, Alex D. Gottlieb, and Norbert J. Mauser, *Mean field dynamics of fermions and the time-dependent Hartree-Fock equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), no. 6, 665–683.

[3] Niels Benedikter, Marcello Porta, and Benjamin Schlein, *Mean–field evolution of fermionic systems*, Communications in Mathematical Physics **331** (2014), no. 3, 1087–1131 (English).

[4] Thomas Chen, Younghun Hong, and Nataˇ sa Pavlović, *Global well-posedness of the NLS system for infinitely many fermions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **224** (2017), no. 1, 91–123.

[5] ———, *On the scattering problem for infinitely many fermions in dimensions $d \geq 3$ at positive temperature*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **35** (2018), no. 2, 393–416.

[6] Anne-Sophie de Suzzoni, *An equation on random variables and systems of fermions*, `arXiv:1507.06180`, 2015.

[7] Alexander Elgart, László Erdős, Benjamin Schlein, and Horng-Tzer Yau, *Nonlinear Hartree equation as the mean field limit of weakly coupled fermions*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 10, 1241–1273.

[8] Jürg Fröhlich and Antti Knowles, *A microscopic derivation of the time-dependent Hartree-Fock equation with Coulomb two-body interaction*, J. Stat. Phys. **145** (2011), no. 1, 23–50.

[9] Zihua Guo, Zaher Hani, and Kenji Nakanishi, *Scattering for the 3D Gross-Pitaevskii equation*, Comm. Math. Phys. **359** (2018), no. 1, 265–295.

[10] Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi, and Tai-Peng Tsai, *Scattering for the Gross-Pitaevskii equation*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 2-3, 273–285.

[11] ———, *Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions*, Commun. Contemp. Math. **11** (2009), no. 4, 657–707.

[12] Mathieu Lewin and Julien Sabin, *The Hartree equation for infinitely many particles, II : Dispersion and scattering in 2D*, Anal. PDE **7** (2014), no. 6, 1339–1363.

[13] ———, *The Hartree equation for infinitely many particles, I : Well-posedness theory*, Comm. Math. Phys. **334** (2015), no. 1, 117–170.

[14] Jens Linhard, *On the properties of a gas of charged particles*, Dan. Vid. Selsk Mat.-Fys. Medd. **28** (1954), no. 1, 8.