

Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2016-2017


Iván Moyano

Contrôlabilité de quelques équations cinétiques collisionnelles et non collisionnelles : Fokker-Planck et Vlasov-Navier-Stokes

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2016-2017), Exposé n° V, 22 p.

http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2016-2017____A5_0

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2016-2017.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université
Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

CONTRÔLABILITÉ DE QUELQUES ÉQUATIONS CINÉTIQUES COLLISIONNELLES ET NON COLLISIONNELLES : FOKKER-PLANCK ET VLASOV-NAVIER-STOKES

IVÁN MOYANO

RÉSUMÉ. Dans cet exposé nous présentons quelques résultats de contrôle pour les équations cinétiques. En particulier, nous nous concentrons sur deux modèles importants provenant de la littérature physique : l'équation de Fokker-Planck et le système de Vlasov-Navier-Stokes. Nous présentons les résultats obtenus dans le premier cas, de nature hypoelliptique, dans [41], grâce à l'utilisation d'une inégalité spectrale pour le laplacien dans tout l'espace. Dans le cas non-collisionnel, nous présentons les résultats obtenus dans [50, 51] grâce à l'utilisation de la méthode du retour.

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le but de cet exposé est de présenter les résultats obtenus par l'auteur, en collaboration avec Jérôme Le Rousseau, dans le contexte de la contrôlabilité des équations cinétiques. L'exposition de ces résultats s'inspire dans l'essentiel des contenus de [52] et des articles [41, 50, 51].

Nous présentons dans §2 les modèles traités et leur contexte dans la théorie cinétique. Les problèmes de contrôlabilité associés sont évoqués dans §3. Ensuite, nous divisons l'exposition en deux parties différenciées : le cas collisionnel et non-collisionnel. Afin de traiter dans §4 le cas collisionnel hypoelliptique de [41], nous introduisons les résultats précédents dans §4.1, ainsi que le problème de l'observabilité dans des ouverts non bornés, dans §4.2. Enfin, les résultats de [41] sont énoncés dans §4.3. D'une autre part, nous présentons dans §5 les résultats obtenus dans le contexte des systèmes fluide-cinétiques, de nature non-collisionnelle et non linéaire. Pour cela, nous détaillons dans §5.1 les résultats obtenus dans le cadre du système de Vlasov-Poisson, ce qui permet de comprendre la stratégie développée dans [50, 51], et détaillée dans §5.2 et §5.3, qui repose sur la méthode du retour.

2. PRÉSENTATION DES MODÈLES

L'objet de la théorie cinétique consiste à décrire des gaz, plasmas ou d'autres systèmes composés d'un grand nombre de particules, en étudiant la fonction de distribution de l'ensemble des particules dans l'espace des phases, $f = f(t, x, v)$. De manière générale, on peut interpréter la quantité

$$\int_{\Omega} \int_V f(t, x, v) dx dv, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^d,$$

comme la probabilité de trouver des particules placées dans la région Ω et ayant une vitesse comprise dans V à l'instant t .

Les principaux modèles d'intérêt prennent en compte l'action de plusieurs mécanismes d'interaction entre les particules et sur l'ensemble des particules. En particulier, deux phénomènes sont d'une grande importance :

- (1) les collisions entre particules ou avec le milieu,
- (2) l'action d'une force macroscopique sur les particules.

Partant de la description microscopique de la dynamique des particules, la théorie cinétique cherche à décrire le comportement de l'ensemble des particules de manière statistique. Ce passage de la dynamique microscopique à l'étude statistique de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ce que l'on appelle *échelle mésoscopique*, dont on verra des exemples plus loin, est l'une des bases de la théorie cinétique. En outre, l'échelle mésoscopique permet d'obtenir, sous certains régimes, une limite macroscopique, en variables d'espace et de temps, typiquement un système provenant de la mécanique des fluides. On renvoie à [48] pour une exposition détaillée de la théorie cinétique.

Les résultats de cet exposé se concentrent uniquement au niveau mésoscopique, où la dynamique de la fonction de distribution est fréquemment décrite par une équation de Vlasov (voir [27, Chapter 1])

$$(1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = \mathcal{C}(f),$$

où $F(t, x)$ représente l'action de la force macroscopique sur les particules, alors que $\mathcal{C}(f)$ représente les collisions entre particules ou avec le milieu. Bien évidemment, différents F et \mathcal{C} donnent lieu à des dynamiques très différentes. L'objectif de cet exposé est d'analyser les propriétés de contrôlabilité de (1) avec différents choix de F et \mathcal{C} , issus de la littérature physique.

2.1. L'équation de Fokker-Planck cinétique. Il s'agit d'un modèle linéaire tenant compte des collisions des particules décrites par f avec un milieu (par exemple, d'autres particules non décrites par f) dans un certain régime particulier et sous l'action d'un potentiel externe, $V(x)$. Cette équation, qui admet la forme suivante

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v f - \Delta_v f - \operatorname{div}_v(vf) = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \Omega \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

pour un certain domaine spatial, typiquement le tore \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d , peut se dériver à partir des équations de Langevin (voir [13]), qui font apparaître l'opérateur de Fokker-Planck en vitesse, $\mathcal{L}_{FP} = \Delta_v + \operatorname{div}_v(v \cdot)$, comme résultat des collisions des particules avec le milieu au niveau microscopique.

L'équation de Fokker-Planck cinétique présente, au premier abord, une compétition entre le terme de transport $v \cdot \nabla_x$ et le terme de collisions \mathcal{L}_{FP} , ce qui a priori devrait engendrer de la diffusion uniquement en vitesse.

Malgré la séparation apparente entre espace et vitesse, un certain effet régularisant se produit aussi en x et non seulement en vitesse. Ceci a été mis en évidence par A.N. Kolmogorov dans [38] dans le cas d'une certaine classe d'équations. L'exemple le plus simple des équations étudiées par Kolmogorov est

$$(3) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = 0, \quad (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

qui porte désormais son nom, et qui peut être vue comme un cas particulier de (2). Nous allons traiter en détail l'équation de Kolmogorov en §4, suivant le travail [41].

Le mécanisme permettant ce transfert de régularité, basé sur le *mélange de phase*, est l'hypoellipticité, étudiée de manière systématique par L. Hörmander dans [35].

Dans le cas des équations cinétiques l'hypoellipticité a été étudiée dans plusieurs situations, dont on pourra citer [33, 8, 28], parmi d'autres exemples.

Vu que la structure de (2) fournit un certain effet régularisant par rapport aux deux variables, on pourrait alors s'interroger sur ses propriétés de dissipation par rapport à x et v . Cette question a été traitée systématiquement par C. Villani dans [55], donnant lieu à la notion d'hypocoercivité, qui permet de récupérer une dissipation en les deux variables x et v alors qu'a priori, on pouvait s'attendre à une dissipation partielle uniquement en vitesse (cf. [16, 33, 34, 55, 49, 18], parmi d'autres références).

2.2. Quelques modèles de couplage fluide-cinétique. Dans cet exposé, nous considérons deux modèles de ce type. Dans un premier temps, on considère l'interaction d'un nuage de particules immergées dans un fluide incompressible, dont la dynamique est décrite par les équations de Stokes stationnaires. Ceci conduit au système de Vlasov-Stokes

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \lambda \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ -\Delta_x u + \nabla_x p = j_f, & (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un coefficient de friction, Ω est \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d , pour $d = 2, 3$, et

$$j_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv.$$

Dans un deuxième temps, on tient compte des effets de la convection et de l'évolution du champ de forces, ce qui conduit au système de Vlasov-Navier-Stokes,

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \Omega, \end{cases}$$

avec

$$\rho_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv.$$

Ces deux modèles peuvent être obtenus comme limite (formelle) de champ moyen à partir de la dynamique de sphères dures immergées dans un fluide, comme dans les travaux [36, 17] (pour plus de détails, voir par exemple [52, Sect. II.1.2]).

Décrivons quelques propriétés qualitatives de (4). Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, P.E. Jabin a démontré dans [37] l'existence et l'unicité des solutions faibles. Cette approche repose sur la méthode de propagation des moments, basée sur l'utilisation des lemmes de moyenne [21]. Un aspect important de la dynamique de (4) mis en évidence dans [37] est l'effet de friction, via le terme de couplage $\operatorname{div}_v [(u - v)f]$. Ceci a pour conséquence qu'en temps long, la fonction de distribution a tendance à se concentrer autour d'un profil de vitesse nulle, de la forme $\rho_{eq}(x) \otimes \delta_{v=0}$, avec une configuration macroscopique ρ_{eq} indéterminée. Le point clé pour l'obtention de cette limite en temps long est la dissipation de l'énergie cinétique $E_{cin}(t) := \iint |v|^2 f dx dv$.

Ce comportement en temps long motive en quelque sorte le besoin d'un résultat de contrôlabilité, dans la mesure où le seul moyen d'éviter la concentration des particules autour d'un état gelé en vitesse est d'agir sur le système.

Précisons qu'un autre système du type Vlasov-Stokes a été traité par K. Hamdache dans [32], tenant compte de l'évolution temporaire du fluide et d'une force

d'interaction du type $j - \rho u$. Malgré l'intérêt de ce système, nous considérerons ensuite un système plus sophistiqué, qui englobe celui-ci dans un certain sens.

Concernant (5) du point de vue de l'existence de solutions, ce système a été considéré par L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont et A. Moussa dans [9], lorsque $\Omega = \mathbb{T}^3$. Dans ce contexte, il est possible d'obtenir l'existence de solutions faibles. En revanche, les questions d'unicité et régularité sont limitées par les difficultés profondes associées au système de Navier-Stokes en dimension 3.

La question du passage du niveau mésoscopique au macroscopique pour (5) a été traitée par T. Goudon, P. E. Jabin et A. Vasseur dans [30] et [31] où des limites hydrodynamiques pour ce système sont obtenues, sous l'effet des collisions, dans certains régimes.

3. CADRE GÉNÉRAL DE LA CONTRÔLABILITÉ DES ÉQUATIONS CINÉTIQUES

Avant de décrire en détail les résultats obtenus pour les systèmes (3), (4) et (5), nous allons faire quelques commentaires généraux sur le type de questions que l'on se pose et auxquelles on essaye de répondre.

Dans cet exposé, nous nous limitons à considérer des cas où la variable d'espace se trouve dans le tore \mathbb{T}^d ou dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 1$, ce qui exclut l'influence des bords. Notre but consiste à modifier l'évolution d'une fonction de distribution associée à (1), en agissant sur l'ensemble des particules. Plus précisément, on peut considérer idéalement un dispositif théorique permettant l'absorption ou l'émission de particules depuis une partie de l'espace, un ouvert ω_x de \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d . Ceci représente un terme source supplémentaire dans l'équation de Vlasov (1),

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = \mathcal{C}(f) + \chi_{\omega_x \times \mathbb{R}^d} G,$$

où G est la fonction d'absorption-émission, autrement dit, le contrôle. On veut trouver un G adéquat, dans des espaces adéquats, de manière à modifier l'évolution de ce système depuis l'état initial f_0 vers une configuration finale f_1 fixée par avance. En outre, on pourra considérer aussi des contrôles localisés en vitesse, c'est-à-dire, une région de contrôle de la forme $\omega_x \times \omega_v$.

Dans cet exposé, nous allons présenter des résultats de contrôlabilité dans certaines situations évoquées précédemment :

- (1) dans un cas hypoelliptique, pour l'équation de Kolmogorov (Théorème 4.3),
- (2) dans un cas non-collisionnel, en présence de forces extérieures, pour les systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes (Théorèmes 5.2 et 5.6).

Signalons que, dans certains cas, on pourra modifier aussi la dynamique du champ de forces, ainsi que de la fonction de distribution. Ce sera le cas dans §5.3.

4. CAS HYPOELLIPTIQUE : CONTRÔLABILITÉ DE L'ÉQUATION DE KOLMOGOROV

On considère l'équation de Kolmogorov dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = \chi_\omega u, & (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d}), \end{cases}$$

où $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ est un ouvert et u est le contrôle agissant sur le système. Le but du travail [41] est de montrer la contrôlabilité à zéro pour ce système dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ avec des contrôles dans $L^2((0, T) \times \omega)$.

Grâce à la méthode HUM (cf. [15, 44] et [52, Sect. I.2.1]), la contrôlabilité dudit système est équivalente à l'observabilité du système adjoint

$$(7) \quad \begin{cases} \partial_t g - v \cdot \nabla_x g - \Delta_v g = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}, \\ g|_{t=0} = g_0(x, v), & \mathbb{R}^{2d}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, à l'existence d'une constante $C_{obs} > 0$ telle que pour tout $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ la solution de (7) satisfasse

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(T, x, v)|^2 dx dv \leq C_{obs}^2 \int_0^T \iint_{\omega} |g(t, x, v)|^2 dt dx dv.$$

Cette approche, quoique classique, présente deux difficultés dans notre contexte :

- (1) L'opérateur de Kolmogorov $\mathcal{K} := \partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v$ est dégénéré du type hypoelliptique, contrairement à l'opérateur de la chaleur, qui est uniformément parabolique, ce qui empêche l'utilisation des méthodes classiques.
- (2) Dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, la région de contrôlabilité ω doit être suffisamment grande pour garantir (8), ce qui est un problème peu compris dans la littérature, même dans le cas uniformément parabolique.

La difficulté (1) est d'ordre structurelle et concerne la nature de l'évolution de la dynamique associée à \mathcal{K} , où un phénomène de transport entre en compétition avec une diffusion en vitesse.

La difficulté (2) est de caractère géométrique. Comme on le verra dans la section §4.2, il existe des obstructions à l'observabilité de l'équation de la chaleur sur une région trop localisée. On devra surmonter cette difficulté en introduisant une condition géométrique adéquate.

4.1. Travaux précédents sur Kolmogorov. La littérature contient deux travaux sur la contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov : [2, 3], en domaine borné et non borné.

Dans [2], K. Beauchard et E. Zuazua considèrent le système (6) avec $d = 1$. A cause de la difficulté (2) énoncée dans la section précédente, la région d'observabilité est choisie de la forme $\omega = \omega_x \times \omega_v$, avec $\omega_x = \mathbb{R}$ et $\omega_v = \mathbb{R} \setminus [a, b]$, pour $a < b$. Cette configuration permet aux auteurs de montrer la contrôlabilité à zéro de (6) dans ce cas.

Afin de pallier la difficulté (1), relative à la structure de l'opérateur de Kolmogorov, les auteurs introduisent l'idée de découpler la variable d'espace de la variable de vitesse grâce à la transformée de Fourier partielle. En effet, si l'on note \mathcal{F}_x la transformée de Fourier partielle par rapport à x , et ξ la variable de Fourier associée, (7) entraîne

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{F}_x(g) - i\xi \cdot v \mathcal{F}_x(g) - \Delta_v \mathcal{F}_x(g) = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ \mathcal{F}_x(g)|_{t=0} = \mathcal{F}_x(g_0), & \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

ce qui peut s'interpréter comme une famille d'équations de la chaleur avec un potentiel, indexées par la variable ξ . La stratégie des auteurs dans [2], avec $d = 1$, consiste donc à montrer l'observabilité de ces systèmes sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, pour chaque ξ , à l'aide d'une inégalité de Carleman appropriée pour l'opérateur $\partial_t - i\xi \cdot v - \Delta_v$ (cf. [52, Sect. II.3.2] pour ce type d'inégalités). Afin de pouvoir obtenir une inégalité d'observabilité en variables (x, v) , un contrôle précis de la dépendance par rapport à ξ est nécessaire. Un ingrédient essentiel dans ce point est le suivant.

PROPOSITION 4.1. *Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Alors, la solution de (6) avec $u \equiv 0$ satisfait*

$$\|\mathcal{F}_x(f)(t, \xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-|\xi|^2 t^3/12} \|\mathcal{F}_x(f_0)(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce résultat, démontré dans [2] pour $d = 1$, et étendu à la dimension quelconque dans [41, Prop. 2.2], donne une estimation quantitative du taux de décroissance en fréquence de l'évolution libre de (6).

Une première remarque sur ce résultat concerne la région d'observabilité, laquelle n'est pas localisée en la variable x , mais uniquement en v , et cela sur presque tout le domaine.

K. Beauchard a considéré à nouveau une équation de Kolmogorov dans [3], cette fois dans un domaine borné avec des conditions aux bords adaptées où elle démontre la contrôlabilité à zéro du système correspondant lorsque $\omega \subset \mathbb{T} \times (-1, 1)$ est un ouvert arbitraire. L'ingrédient principal utilisé pour réduire le support du contrôle ω est la stratégie de Lebeau-Robbiano (cf. [52, Sect. II.3.2]).

Nous avons appliqué dans [41] cette stratégie dans tout l'espace de phases, de manière à améliorer la région d'observabilité par rapport à [2].

4.2. Conditions géométriques pour l'observabilité sur des domaines non bornés. Considérons un ouvert Ω de \mathbb{R}^d , qui pourrait avoir un bord $\partial\Omega$. Dans cette section, on s'intéresse aux conditions sur ω permettant de montrer des inégalités d'observabilité du type (8). Lorsque Ω est non borné, contrairement au cadre de [42], il existe des régions d'observabilité pour lesquelles une inégalité d'observation de ce type est fautive.

Citons quelques exemples. Dans [45], S. Micu et E. Zuazua ont montré qu'il n'y a pas d'observabilité lorsque ω est un compact de \mathbb{R}^+ . Cette direction a été développée par L. Escauriaza, G. Seregin et V. Sverák dans [19], où il est démontré que l'observabilité ne peut pas être vraie lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $\omega = B(0, R)$, avec $R > 0$. En revanche, il est possible de démontrer l'observabilité lorsque la région d'observabilité est suffisamment grande, pour le choix $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $\omega = \mathbb{R}^d \setminus K$, avec $K \subset \mathbb{R}^d$ compact (cf. [11]).

Les résultats précédents exhibent des cas extrêmes pour l'observabilité ou la non observabilité. Ceci motive la recherche de régions d'observabilité adéquates sans imposer que ω soit le complémentaire d'un compact. Dans cette direction, Luc Miller a montré dans [46] une condition nécessaire et quelques exemples d'observabilité lorsque Ω présente un bord.

Il a été observé par P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble dans [12] que la question de l'observabilité ne dépend pas uniquement de la géométrie de ω , mais aussi du cadre fonctionnel choisi.

Dans le cas sans bord, les travaux de Luc Miller dans [47] ont conduit à une condition géométrique, basée sur les propriétés du noyau de la chaleur sur des variétés, qui pourrait être suffisante pour l'observabilité de la chaleur. En revanche, on ne sait pas comment s'en servir pour montrer l'observabilité.

La question a été traitée aussi par M. González Burgos et L. de Teresa dans [29], avec un changement de perspective par rapport au problème : une région d'observabilité est favorable dans la mesure où elle permet de montrer des inégalités de Carleman adéquates.

Comme on le verra dans la section suivante, nous allons reprendre la condition exhibée par L. Miller et l'exploiter afin de montrer des inégalités de Carleman, ce qui nous permettra de montrer (8).

4.3. Résultats nouveaux sur l'équation de Kolmogorov. L'objectif de mon travail avec Jérôme Le Rousseau [41] est de montrer un résultat de contrôlabilité à zéro pour l'équation de Kolmogorov dans tout l'espace de phases, c'est-à-dire, pour le système (6), en dimension $d \geq 1$ quelconque et sous les hypothèses les plus générales possibles sur la région de contrôle $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$. Dans ce but, la condition géométrique suivante sera essentielle.

DÉFINITION 4.2 (Def. 1.1, [41]). *Un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble d'observabilité dans tout l'espace si $\exists \delta, r > 0$ tels que $\forall p \in \mathbb{R}^d, \exists q \in \mathbb{R}^d$ tels que $B_{\mathbb{R}^d}(q, r) \subset \omega$ et $|p - q| \leq \delta$.*¹

THÉORÈME 4.3 (Thm 1.2, [41]). *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ de la forme $\omega = \omega_x \times \omega_v$ avec $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ et $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant à la Définition 4.2. Alors, pour tout $T > 0$ et $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, il existe un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ tel que la solution de (6) vérifie $f|_{t=T} = 0$.*

Comme mentionné dans §4, la structure de l'opérateur $\mathcal{K} = \partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v$ ne permet pas une approche directe via l'observabilité du système adjoint, puisque les estimations de Carleman globales pour \mathcal{K} sont un problème ouvert.

En revanche, nous allons suivre l'idée de simplifier l'opérateur \mathcal{K} en séparant les variables x et v via la transformation de Fourier partielle en x . Notre stratégie repose sur la méthode de Lebeau-Robbiano (cf. [52, Sect. II.3.2]), comportant l'observabilité des basses fréquences, et l'estimation du taux de décroissance des hautes fréquences du système libre. La fréquence dans notre cas est celle donnée par la variable de Fourier par rapport à x , que l'on note ξ .

Le deuxième ingrédient a déjà été mentionné dans la Proposition 4.1. Donnons les éléments de l'observabilité des basses fréquences.

Observabilité des basses fréquences. Comme dans le cas classique (cf. [42] et [52, Sect. II.3.2]), l'observabilité des basses fréquences repose sur une inégalité spectrale pour le laplacien. Nous aurons donc besoin de démontrer une telle inégalité spectrale dans l'espace entier \mathbb{R}^d , ce que l'on pourra faire grâce à la condition géométrique de la définition 4.2.

THÉORÈME 4.4 (Thm 3.1, [41]). *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble d'observabilité dans tout l'espace. Alors, $\exists C = C(\omega) > 0$ tel que*

$$(9) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(N+1)} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

pour tout $N \geq 0$ et toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset \overline{B(0, N)}$, où $B(0, N)$ est la boule fermée de rayon N et centre 0 et \mathcal{F} est la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^d .

Nous allons dériver (9) d'une inégalité de Carleman elliptique globale, suivant une approche introduite dans [6, 7]. Pour ce faire, nous devons construire un poids adéquat.

1. On peut remarquer que, si $\delta < r$, alors $\omega = \mathbb{R}^d$. Le cas intéressant est donc $r < \delta$.

PROPOSITION 4.5 (Prop 3.2, [41]). *Soit $S > 0$, $Q = (0, S) \times \mathbb{R}^d$. Supposons que $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ satisfait la condition de la Définition 4.2. Alors, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$(10) \quad \begin{aligned} \psi &\in W^{3,\infty}([0, S] \times \mathbb{R}^d), \\ |\nabla_{s,x}\psi(s, x)| &\geq C, \quad \forall (s, x) \in Q, \\ \partial_s \psi|_{s=0} &\geq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_x, \\ \partial_s \psi|_{s=S} &\leq -C < 0, \quad \psi|_{s=S} = 0, \end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Précisons que les conditions sur ce poids sont une adaptation au cas du domaine Q des conditions (cf. [40, 20]) demandées sur le poids de Carleman dans la méthode de Fursikov-Imanuvilov. Dans le cas non borné l'obtention de la condition (10) repose sur des arguments très techniques, dû à la perte de compacité du domaine, et qui exploitent la condition géométrique sur ω_x .

Une fois qu'un tel poids a été construit, nous sommes en mesure de démontrer l'inégalité de Carleman elliptique globale mentionnée précédemment. Soit

$$P := -\Delta_{s,x} = -\partial_s^2 - \Delta_x, \quad Q = (0, S) \times \mathbb{R}^d.$$

PROPOSITION 4.6 (Inégalité de Carleman elliptique globale, Prop 3.3, [41]). *Soit $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble d'observabilité dans tout l'espace. Soient ψ donné par la Proposition 4.5 et $\varphi(s, x) = \exp(\lambda\psi(s, x))$, pour λ suffisamment grand. Alors, il existe $C > 0$, $\tau_0 \geq 1$, et $\lambda_0 \geq 1$ tels que*

$$(11) \quad \begin{aligned} \tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla_{s,x} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi}|_{s=0} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ + \tau \|e^{\tau\varphi}|_{s=S} \partial_s u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau^3 \|e^{\tau\varphi}|_{s=S} u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq C \left(\|e^{\tau\varphi} P u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi}|_{s=S} \nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi}|_{s=0} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2 \right), \end{aligned}$$

pour tout $\tau \geq \tau_0$ et $u \in \mathcal{C}^2([0, S]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ tel que $u|_{s=0} \equiv 0$.

Cette inégalité permet de démontrer (9) grâce à un choix de $u(s, x)$ adéquat, inspiré de la construction classique. En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset \overline{B(0, N)}$. On définit

$$u(s, x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, N)} \frac{\sinh(\xi s)}{\xi} \mathcal{F}f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad (s, x) \in (0, S) \times \mathbb{R}^d.$$

Alors, $Pu = 0$ et $u|_{s=0} = 0$, ce qui permet d'appliquer (11) pour obtenir

$$\tau^2 \|e^{\tau\varphi} u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|e^{\tau\varphi}|_{s=S} \nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|e^{\tau\varphi}|_{s=0} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2.$$

Puisque $\partial_s u|_{s=0} = f$ et puisqu'il est possible de montrer que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \|\nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

un choix de τ suffisamment grand et indépendant de N conduit à (9).

Traisons maintenant la localisation en variable v . L'utilisation de la transformée de Fourier partielle en x fournit la famille d'opérateurs

$$P_\xi = \partial_t - \Delta_v + i\xi \cdot v, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

La nouveauté par rapport à [2] repose encore une fois sur la condition géométrique de la Définition 4.2, qui permet la construction de poids pour obtenir des inégalités

de Carleman pour P_ξ adéquates. Ainsi, une construction similaire à celle de la Proposition 4.5 permet de démontrer une inégalité de Carleman parabolique globale pour chaque opérateur P_ξ à ξ fixé. Ceci conduit à l'observabilité de chaque mode ξ via la méthode de Fursikov-Imanuvilov (cf. [40, 20]).

PROPOSITION 4.7 (Prop. 4.1, [41]). *Soit $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert d'observabilité dans tout l'espace. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que la solution du système*

$$\begin{cases} \partial_t g_\xi - iv \cdot \xi g_\xi - \Delta_v g_\xi = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ g_\xi|_{t=0} = g_{0,\xi} & \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

avec $T > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, et $g_{0,\xi} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ satisfait

$$(12) \quad \|g_\xi|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\sqrt{|\xi|})} \|g_\xi\|_{L^2((0,T)\times\omega_v)}.$$

La combinaison de (9) et (12) conduit à l'observabilité des basses fréquences (voir [41, Prop. 4.7]). Par dualité, ceci produit un contrôle qui élimine les basses fréquences avec un coût dépendant de la fréquence, de l'ordre e^{CN} .

PROPOSITION 4.8 (Prop. 4.6, [41]). *Il existe $C_{\text{obs}} > 0$ tel que pour tout $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ il existe un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ tel que la solution de (6) satisfait*

$$\text{supp}(\widehat{f}(T, \cdot, \cdot)) \subset (\mathbb{R}^d \setminus B_{\mathbb{R}^d}(0, N)) \times \mathbb{R}^d$$

avec

$$(13) \quad \|u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^{2d})} \leq e^{C_{\text{obs}}(1+\frac{1}{T}+N)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

La combinaison de la contrôlabilité des basses fréquences donnée par la Proposition 4.8 et l'estimation du taux de décroissance des hautes fréquences donné par la Proposition 4.1 permet de construire un contrôle pour (6), en alternant un mode actif avec un mode passif dans l'esprit de la construction classique de Lebeau-Robbiano (cf. [52, Sect. II.3.2]). Ceci permet de démontrer le Théorème 4.3.

4.4. Quelques perspectives. Dans la section §4.3 nous avons évoqué les éléments de preuve d'un résultat de contrôlabilité à zéro pour l'équation de Kolmogorov dans tout l'espace des phases, le Théorème 4.3. Bien que celui-ci soit le résultat qui motive la démarche de [41], le résultat le plus important que l'on a obtenu dans ce travail est l'inégalité spectrale (9).

En effet, cette inégalité spectrale, complètement nouvelle dans l'espace entier, est un apport essentiel vers la compréhension de la contrôlabilité d'autres modèles cinétiques collisionnels. Ceci a déjà été confirmé par K. Beauchard et K. Pravda-Starov, dans [5], où l'inégalité spectrale (9) permet l'étude d'une large famille d'opérateurs hypoelliptiques, dont la classe d'Orstein-Uhlenbeck d'opérateurs de la forme

$$P = \frac{1}{2} \text{tr} [Q \nabla_x^2] - \langle Bx, \nabla_x \rangle,$$

pour Q et B matrices d'ordre $2d$, avec Q semi-définie positive et satisfaisant une condition de génération du type Kalman,

$$\text{rang} \left[\sqrt{Q} |B \sqrt{Q} |B^2 \sqrt{Q} | \dots |B^{2d-1} \sqrt{Q} \right] = 2d,$$

équivalente à l'hypoellipticité de l'opérateur P .

5. CAS NON-COLLISIONNEL : CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES FLUIDE-CINÉTIQUE

Dans cette section, nous détaillons quelques résultats pour les systèmes fluide-cinétiques (4) et (5), du point de vue de la contrôlabilité, obtenus par l'auteur dans [50, 51]. Dans les deux cas, on considère l'évolution de particules dans le tore bidimensionnel², ce qui conduit à l'espace de phases $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. L'optique de ces deux problèmes de contrôlabilité rentre dans le cadre décrit en §3.

Signalons quelques caractéristiques importantes de (4) et (5), ce qui fournira des indications pour la stratégie de nos preuves. Tout d'abord, on observe que la dynamique des deux systèmes est fortement influencée par le terme de couplage $\operatorname{div}_v[(u - v)f]$, ce qui éloigne l'équation de Vlasov de son comportement linéaire. En plus, dans le cas du système de Vlasov-Navier-Stokes, l'équation du champ de vitesses contient une non-linéarité caractéristique du système de Navier-Stokes, le terme de convection $(u \cdot \nabla)u$. Malgré les obstacles que cette dynamique non linéaire oppose au premier abord, l'utilisation des termes non linéaires sera essentielle dans la résolution des deux problèmes de contrôlabilité, grâce à la méthode du retour (cf. [15]). Dans ce but, nous nous inspirerons des techniques développées par Olivier Glass et Daniel Han-Kwan pour les équations du type Vlasov non linéaires, dans le contexte des systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell relativiste.

5.1. Travaux précédents : contrôlabilité des équations de Vlasov non linéaires. Afin d'exposer les techniques qui seront utiles dans notre traitement des systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes, nous allons expliquer deux approches permettant d'aborder la contrôlabilité d'une équation de Vlasov couplée avec un champ de forces. On distinguera selon que le champ associé soit stationnaire ou non-stationnaire.

5.1.1. *Champ stationnaire : le système de Vlasov-Poisson.* L'étude de la contrôlabilité des équations de Vlasov non linéaires a ses origines dans le travail d'Olivier Glass [23] sur le système de Vlasov-Poisson

$$(14) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E^f(t, x) \cdot \nabla_v f = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \\ E^f(t, x) = \nabla_x \phi^f(t, x), \quad -\Delta_x \phi^f(t, x) = \rho_f(t, x) - \int_{\mathbb{T}^d} \rho_f dx, & (0, T) \times \mathbb{T}^d, \\ f|_{t=0} = f_0, & \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $\omega \subset \mathbb{T}^d$ est la région de contrôle et $d \geq 2$. Le système (14) est un modèle de référence dans l'étude des plasmas, décrivant la dynamique d'une population de particules chargées, typiquement des ions ou des électrons, sous l'influence d'un champ électrique E^f induit par la densité des particules, ρ_f .

La non-linéarité de (14) repose sur le terme de couplage $E^f \cdot \nabla_v f$. On notera que l'équation pour le champ électrique, de type Poisson, est stationnaire, alors que le terme source dépend du temps.

Une des premières difficultés associées à (14) est le défaut de contrôlabilité du problème linéarisé. En effet, si l'on considère le linéarisé formel de ce système autour

2. La restriction au cas bidimensionnel est motivée par les difficultés liées à la théorie de Cauchy pour le système de Navier-Stokes en dimension trois.

En outre, on pourrait considérer d'autres espace de phases, comme $\Omega \times \mathbb{R}^d$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Par contre, le possible bord de Ω impose certaines difficultés techniques.

de la trajectoire triviale $(f, \phi) = (0, 0)$, on obtient une équation du transport

$$(15) \quad \begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} \mathcal{G}, & (0, T) \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \\ F|_{t=0} = F_0, & \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

D'après la méthode des caractéristiques, la solution de (15) admet l'expression

$$(16) \quad F(t, x, v) = F_0(x - tv, v) + \int_0^t \chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} \mathcal{G}(s, x - (t-s)v, v) ds,$$

ce qui exprime clairement le fait que l'action du contrôle sur F dépend de la manière dont $\chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} \mathcal{G}$ se comporte le long des caractéristiques $\{x + tv; t \geq 0\}$. Au vu de cette remarque, deux obstructions importantes à la contrôlabilité se dégagent naturellement :

Mauvaises directions : il peut exister des directions $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ telles que les caractéristiques de la forme $x + te$, avec $x \in \mathbb{T}^d$, n'arrivent dans ω pour aucune valeur de $t \geq 0$.

Basses vitesses : lorsque la vitesse $|v|$ est trop petite, il est possible que la caractéristique $x + tv$ associée n'arrive pas dans ω en temps $T > 0$.

La conclusion que l'on tire de ces remarques est double : d'une part, le système (15) n'est pas contrôlable à cause des deux obstructions signalées. D'autre part, si l'on veut contrôler ce système, il faut absolument éliminer les basses vitesses et les mauvaises directions.

Afin de traiter ces obstructions, Olivier Glass a proposé dans [23], dans l'esprit de la méthode du retour due à Jean-Michel Coron, la construction d'une trajectoire de référence $(\bar{f}, \bar{\phi})$ de (14) adaptée, en exploitant l'action du champ électrique $\bar{E} = \nabla_x \bar{\phi}$ sur la dynamique des caractéristiques associées. Considérons le système caractéristique

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t) \\ \bar{E}(t, X(t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix},$$

et désignons par $(X, V)(t, 0, x, v)$ ses solutions. Le but de la construction de la trajectoire de référence est de trouver \bar{E} tel que les caractéristiques associées passent par la zone de contrôle ω pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

Ensuite, il est possible d'obtenir une solution du système non linéaire (14) avec $f|_{t=0} = f_0$ fixé grâce à un argument de point fixe, basé sur la trajectoire de référence $(\bar{f}, \bar{\phi})$. Afin d'obtenir la contrôlabilité, on prescrit un processus d'absorption pour les caractéristiques arrivant dans ω .

Grâce à cette stratégie, O. Glass a obtenu deux types de résultats pour le système (14) :

- (1) contrôlabilité locale (c'est-à-dire, pour des données petites) avec $d = 2$ et ω un ouvert quelconque du tore \mathbb{T}^2 ,
- (2) contrôlabilité globale (c'est-à-dire, pour des données arbitraires) en dimension quelconque avec ω satisfaisant une condition géométrique.

La condition géométrique mentionnée ci-dessus est la suivante.

DÉFINITION 5.1. *On dit qu'un ouvert $\omega \subset \mathbb{T}^d$ satisfait la condition de bande lorsqu'il existe un hyperplan de \mathbb{R}^d , H , tel que $s(H) \subset \omega$, par la surjection canonique $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$.*

La preuve du résultat global fait un usage essentiel des propriétés d'invariance de (14) par changement d'échelle. Puisque les systèmes (4) et (5) ne possèdent pas des propriétés semblables, nous nous concentrerons uniquement sur le résultat local.

Généralisations. La méthode évoquée ci-dessus admet plusieurs extensions. En plus de la version globale, en dimension quelconque et sous l'hypothèse de bande de la Définition 5.1, il est possible d'adapter cette méthode de preuve pour traiter des dynamiques plus complexes.

En particulier, O. Glass et D. Han-Kwan ont adapté la méthode au traitement de forces extérieures bornées sans avoir besoin d'hypothèses supplémentaires. L'argument essentiel consiste à comparer la dynamique de $E^f + F(t, x)$, lorsque $F \in L_t^\infty W_x^{1, \infty}$, à celle de E^f en temps court.

En outre, les techniques développées dans [25] par les mêmes auteurs permettent de traiter le cas de forces du type Lorentz, produites par l'action d'un champ magnétique, de la forme $F = B \wedge v$ et qui, contrairement au cas précédent, ne peuvent pas être étudiées de manière perturbative. En dimension 2, cette force s'écrit $F = b(x)v^\perp$, où b est une fonction scalaire telle que $b \geq 0$, ce qui permet de décrire les dynamiques des caractéristiques associées à partir de quelques trajectoires circulaires. L'utilisation de la méthode du retour dans ce cas repose sur l'hypothèse géométrique suivante : l'ensemble $\{x \in \mathbb{T}^2; b(x) > 0\}$ satisfait la condition de contrôle géométrique de [1].

La stratégie esquissée précédemment nous permettra d'aborder le système de Vlasov-Stokes dans §5.2.

5.1.2. *Champ non-stationnaire : le système de Vlasov-Maxwell relativiste.* La stratégie du cas Vlasov-Poisson est insuffisante en présence d'un champ de forces non-stationnaire. En revanche, O. Glass et D. Han-Kwan ont développé dans [26] une méthode permettant d'aborder cette question dans le contexte du système de Vlasov-Maxwell relativiste.

Cette nouvelle approche consiste à construire une trajectoire de référence à l'aide d'un résultat de contrôlabilité pour l'équation du champ de forces, le système de Maxwell dans ce cas. En effet, le résultat de contrôle exact pour les équations de Maxwell (cf. [53]) permet de modifier le champ de forces afin d'obliger les trajectoires des caractéristiques associées à arriver dans la zone de contrôle, ce qui permet l'argument de point fixe et le processus d'absorption. Cette technique est cruciale dans notre traitement du système de Vlasov-Navier-Stokes, comme on le verra dans §5.3.

5.2. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Stokes. Le but de cette section est d'expliquer les éléments de la preuve du résultat principal du travail [50], lequel garantit la contrôlabilité locale pour des données régulières petites du système

$$(18) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^2} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ -\Delta_x u + \nabla_x p = j_f, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u(t, x) dx = 0, & (0, T), \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Le résultat précis est le suivant ³.

3. Un résultat similaire pourrait être démontré en dimension $d \geq 3$, lorsque ω satisfait la condition géométrique de la Définition 5.1, en suivant le schéma de [23] en dimension supérieure.

THÉORÈME 5.2 (Thm 1.1, [50]). *Soient $T > 0$, $\gamma > 2$ et $\omega \subset \mathbb{T}^2$ un ouvert arbitraire non vide. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout*

$$f_0, f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, v) \, dx \, dv, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_0(x, v) \, dx \, dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_1(x, v) \, dx \, dv = 0, \end{aligned}$$

et tels que, pour $i = 0, 1$,

$$(19) \quad \begin{aligned} &\|f_i\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_i\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon, \\ &\exists \kappa > 0, \quad \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^{\gamma+1} (|\nabla_x f_i| + |\nabla_v f_i|)(x, v) \leq \kappa, \end{aligned}$$

il existe un contrôle $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que la solution de (18) avec $f|_{t=0} = f_0$ satisfait

$$(20) \quad f|_{t=T} = f_1.$$

La stratégie de la preuve de ce résultat repose sur la méthode utilisée dans [23] et [25], expliquée dans §5.1.1. Le but de [50] est d'adapter ces techniques dans le cas du couplage avec l'équation de Stokes.

En accord avec la stratégie précédente, notre objectif est de construire une solution de référence pour (18) afin d'éliminer les obstructions à la contrôlabilité de l'équation de Vlasov, qui sont les mauvaises directions et les basses vitesses. Nous allons procéder en deux étapes :

Étape 1 : construire une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) telle que

$$\bar{f}|_{t=0} = 0, \quad \bar{f}|_{t=T} = 0,$$

et telle que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ arrivent dans ω en temps $T > 0$.

Étape 2 : construire une solution de (18) proche de (\bar{f}, \bar{u}) , grâce à un schéma de point fixe, telle que $f|_{t=0} = f_0$ et

$$(21) \quad f|_{t=T} = 0, \quad \text{en dehors de } \omega.$$

Afin d'assurer cette configuration finale en $t = T$, on utilisera un processus d'absorption dans ω .

On notera que la condition (21) est suffisante pour conclure (20), grâce à la remarque suivante. Si l'on considère le problème rétrograde de (18) via la transformation

$$\tilde{f}(t, x, v) := f(T - t, x, -v), \quad \tilde{u}(t, x, v) = u(T - t, x, -v),$$

on trouve un problème similaire à (18). Ceci permet de traiter le problème rétrograde en modifiant très superficiellement le schéma suivi pour le problème direct. Par conséquent, pour passer de f_0 à l'état final f_1 , il suffit de prendre

- f_0 comme donnée initiale et une cible satisfaisant (21),
- $f_1(x, -v)$ comme donnée initiale et une cible satisfaisant (21), via le problème rétrograde.

Le choix de la dimension deux est important ici pour utiliser certains résultats d'approximation harmonique, ce qui permet de choisir comme région de contrôle ω un ouvert non vide quelconque.

Construction de la solution de référence.

Le système que \bar{u} doit satisfaire est

$$(22) \quad \begin{cases} -\Delta_x \bar{u} + \nabla_x \bar{p} = j_{\bar{f}}, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x \bar{u}(t, x) = 0, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \bar{u}(t, x) dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Une remarque très utile est la suivante : puisque l'on travaille en dimension 2, et sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'utilisation du rotationnel conduit à l'équation de Poisson. En effet, soit $\omega := \operatorname{rot} \bar{u}$. Alors, (22) est équivalent au système

$$(23) \quad \begin{cases} -\Delta_x \omega = \operatorname{rot} j_{\bar{f}}, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \omega(t, x) dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Ceci nous permet d'adapter les résultats d'approximation harmonique exploités dans le cas de Vlasov-Poisson par O. Glass dans [23]. Par conséquent, la seule hypothèse nécessaire sur ω est que ce soit un ouvert non vide. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{T}^2$ et $r_0 > 0$ tels que

$$B(x_0, 2r_0) \subset \omega.$$

Etape 1 : traitement des mauvaises directions. On construit un champ de vitesses capable de modifier les trajectoires caractéristiques associées aux grandes vitesses afin de les conduire dans ω .

PROPOSITION 5.3 (Prop. 3.1, [50]). *Soit $\tau > 0$. Il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ et $\bar{m} > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u_1 &= 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \tau] \times \left(\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, \frac{r_0}{10}) \right), \\ \operatorname{supp} u_1 &\subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \quad \int_{\mathbb{T}^2} u_1(t, x) dx = 0, \quad t \in [0, \tau], \end{aligned}$$

et tels que les caractéristiques associées à $-v + u_1$, (X^1, V^1) , satisfont la propriété suivante : pour tout $m \geq \bar{m}$ et tout $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ avec $|v| \geq m$, il existe $t \in (\frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4})$ tel que

$$X^1(t, 0, x, v) \in B(x_0, \frac{r_0}{4}), \quad |V^1(t, 0, x, v)| \leq \frac{m}{e^{2\tau}}.$$

Etape 2 : traitement des basses vitesses. On construit un champ de vitesses capable d'accélérer les trajectoires des caractéristiques associées aux basses vitesses, grâce au résultat suivant.

PROPOSITION 5.4 (Prop. 3.4, [50]). *Soient $\tau > 0$ et $M > 0$. Il existe $u_2 \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u_2 &= 0, \quad (t, x) \in [0, \tau] \times \left(\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, r_0) \right), \\ \operatorname{supp} u_2 &\subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u_2(t, x) dx &= 0, \quad [0, \tau], \end{aligned}$$

et tels que pour un certain $M^\sharp > M + 1$, les caractéristiques associées à $-v + u_2$ satisfont la propriété suivante : pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times B_{\mathbb{R}^2}(0; M)$, il existe $t \in (0, \tau)$ tel que

$$M + 1 \leq |V(t, 0, x, v)| \leq M^\sharp.$$

Etape 3 : Conclusion. Fixons $T > 0$. Les Propositions 5.3 et 5.4 permettent de construire un champ de vitesses \bar{u} tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{u} &= 0, \quad \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \bar{u}(t, x) \, dx &= 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

et tel que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ satisfont

$$(24) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in (0, T) \text{ tel que } \bar{X}(t, 0, x, v) \in B(x_0, r_0).$$

Il faut ensuite construire une fonction de distribution \bar{f} associée, telle que (22) soit vérifié. Pour ce faire, on choisit $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$(25) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1 \, dv = \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2 \, dv = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1 \, dv = - \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2 \, dv = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1 \, dv = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2 \, dv = 0, \end{cases}$$

ce qui permet de définir, pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$\bar{f}(t, x, v) := \mathcal{Z}_1(v) \partial_{x_1} \operatorname{rot} \bar{u}(t, x) + \mathcal{Z}_2(v) \partial_{x_2} \operatorname{rot} \bar{u}(t, x).$$

Grâce aux conditions (25), on obtient (23), ce qui entraîne (22).

Nous avons donc construit une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) telle que (24) est satisfait.

Schéma de point fixe. Suivant la démarche décrite dans la section §5.2, on définit un domaine $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, dépendant d'un paramètre $\epsilon > 0$. Sans rentrer dans les détails, une fonction hölderienne appartient à \mathcal{S}_ϵ lorsqu'elle est ϵ -proche de \bar{f} dans une norme de type Hölder. Ensuite, on définit un opérateur \mathcal{V}_ϵ en trois étapes.

- (1) On associe à chaque élément $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ le champ de vitesses u^g , solution de

$$\begin{cases} -\Delta_x u^g + \nabla_x p^g = j_g, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u^g(t, x) = 0, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u^g(t, x) \, dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Afin de pouvoir utiliser les caractéristiques associées à u^g , on devra exploiter la régularité elliptique du système de Stokes. On montrera que, puisque $j_g \in \mathcal{C}_t^0 L_x^p$ pour $p > 2$, alors $u^g(t) \in W^{2,p}(\mathbb{T}^2)$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui implique $u \in \mathcal{C}_t^0 \mathcal{C}_x^1$.

- (2) Grâce aux caractéristiques associées à $-v + u^g$, (X^g, V^g) , on résout l'équation de Vlasov dans (18) en imposant une absorption dans ω chaque fois que X^g passe par ω .
- (3) Le processus d'absorption introduit des discontinuités, ce qui peut être corrigé en utilisant un opérateur d'extension.

Ces trois points fournissent un opérateur $\mathcal{V}_\epsilon : \mathcal{S}_\epsilon \rightarrow \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ continu satisfaisant $\mathcal{V}_\epsilon(\mathcal{S}_\epsilon) \subset \mathcal{S}_\epsilon$. Grâce au théorème de Leray-Schauder, on montrera que \mathcal{V}_ϵ possède un point fixe, g^* , lorsque $\epsilon > 0$ est suffisamment petit.

Afin de pouvoir démarrer le processus d'absorption, il faut garantir que X^{g^*} arrive dans ω en temps T . Pour ce faire, on utilise (24) et l'estimation suivante

$$\sup_{t,x,v} \|(X^{g^*}, V^{g^*}) - (\bar{X}, \bar{V})\| \lesssim \epsilon,$$

que l'on obtient grâce à la régularité elliptique du système de Stokes. Il suffit donc de prendre $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour conclure (21), d'où (20).

D'ailleurs, la condition (19) permet de montrer que le point fixe trouvé, g^* , est unique dans une certaine classe.

5.3. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Navier-Stokes. Le but de cette section est d'expliquer les éléments de la preuve du résultat principal de [51]. Nous nous intéressons à la contrôlabilité du système

$$(26) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^2} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

En raison de la nature non linéaire de ce système, il est nécessaire de préciser ce que l'on entend par solution. Puisque nous utiliserons les caractéristiques associées au champ $-v + u$, on voudra travailler avec des solutions suffisamment régulières.

DÉFINITION 5.5 (Def. 1.1, [51]). *Soient $T > 0$, $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{div}_x u_0 = 0$ et $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$. On dit que (f, u) est une solution forte du système (26) si les conditions suivantes sont satisfaites.*

$$(27) \quad f \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

$$(28) \quad \text{l'équation de Vlasov est satisfaite ponctuellement,}$$

$$(29) \quad \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |v|^2) f(t, x, v) \, dx \, dv < \infty,$$

$$(30) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)),$$

$$(31) \quad \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$ avec $\operatorname{div}_x \psi(t, x) = 0$ et $t \in (0, T]$, on a

$$(32) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} u(t)\psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla u : \nabla \psi - u \otimes u \cdot \nabla \psi - u \partial_t \psi) \, ds \, dx \\ & = \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (j_f(s) - \rho_f(s)u(s)) \psi(s) \, ds \, dx, \end{aligned}$$

où

$$\nabla u : \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u^k \partial_j \psi^k, \quad u \otimes u \cdot \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 u^j u^k \partial_j \psi^k.$$

Précisons que, sous la condition d'incompressibilité, le terme de convection satisfait $(u \cdot \nabla)u = \operatorname{div}(u \otimes u)$, avec les notations précédentes.

Le résultat principal de [51], que l'on énonce en détail ci-dessous, est un théorème de contrôlabilité à zéro pour des données petites. Plus précisément, on montre qu'il est possible de modifier les solutions fortes de (26), pourvu qu'elles soient petites, de manière à atteindre la distribution nulle et le champ de vitesses zéro en temps long. On devra faire l'hypothèse d'une condition géométrique sur la zone de contrôle.

THÉORÈME 5.6 (Thm 1.3, [51]). *Soient $\gamma > 2$ et $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfaisant la condition de bande de la Définition 5.1. Il existe $\epsilon > 0$, $M > 0$ et $T_0 > 0$ tels que pour tout $T \geq T_0$, $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ et u_0 satisfaisant les conditions*

$$u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \quad \operatorname{div}_x u_0 = 0, \quad \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \leq M,$$

et

$$\begin{aligned} & \|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon, \\ & \exists \kappa > 0, \quad \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^{\gamma+1} (|\nabla_x f_i| + |\nabla_v f_i|)(x, v) \leq \kappa, \end{aligned}$$

il existe un contrôle $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que la solution forte de (26) avec $f|_{t=0} = f_0$ et $u|_{t=0} = u_0$ existe, est unique et satisfait

$$(33) \quad f|_{t=T} = 0, \quad u|_{t=T} = 0.$$

La stratégie de la preuve de ce résultat est basée sur le schéma de preuve décrit précédemment pour le système de Vlasov-Stokes, en incorporant quelques idées de la stratégie pour le système de Vlasov-Maxwell relativiste dans [26], comme l'utilisation d'un résultat de contrôle pour l'équation du champ afin de construire des solutions de référence. Plus précisément, nous devons construire une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) du système (26) de telle sorte que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ arrivent dans la zone de contrôle, malgré l'existence de mauvaises directions et basses vitesses.

En revanche, l'adaptation de cette stratégie au cas du système (26) est très délicate, en raison des difficultés engendrées par le système de Navier-Stokes et le terme d'interaction $j_f - \rho_f u$.

Nous allons suivre les trois étapes suivantes. Soient $T_2 > T_1 > 0$ suffisamment grands.

Étape 1 : on construit une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) adéquate et telle que $(\bar{f}, \bar{u})|_{t=0} = 0$ et $(\bar{f}, \bar{u})|_{t=T} = 0$.

Étape 2 : on construit une solution de (26) proche de (\bar{f}, \bar{u}) grâce à un schéma de point fixe, telle que $(f, u)|_{t=0} = (f_0, u_0)$ et

$$(34) \quad f|_{t=T_1} = 0, \quad \text{en dehors de } \omega.$$

Étape 3 : on modifie la solution construite grâce à un résultat de contrôle pour le système de Navier-Stokes, ce qui permet de passer de $(u|_{t=T_1}, f|_{t=T_1})$ à $(0, 0)$ en temps $T_2 - T_1$.

Dans le cas du système (26), on ne pourra pas utiliser le système rétrograde ni un argument de réversibilité, à cause de la nature parabolique du système de Navier-Stokes. Les cibles raisonnables sont donc $(0, 0)$ ou les trajectoires libres du système, comme pour le système de Navier-Stokes.

Construction de la solution de référence.

Le point clé pour la construction d'une solution de référence est l'utilisation d'un résultat de contrôle pour le système de Navier-Stokes, dû à J.-M. Coron et A. Fursikov ([14]). Ce résultat garantit qu'étant donné un temps $\tau > 0$, un état initial u_{in} et une solution régulière du système de Navier-Stokes u_{NS} , il est possible

de trouver un contrôle w à support dans $(0, \tau) \times \omega$, tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = w, & (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ u|_{t=0} = u_{in}(x), & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

satisfasse $u|_{t=\tau} = u_{NS}|_{t=\tau}$. On utilise ce résultat pour éliminer les obstructions liées aux basses vitesses et aux mauvaises directions.

Dans ce cas, il faut utiliser l'hypothèse géométrique sur ω . D'après la Définition 5.1, il existe une unique mauvaise direction, n_H^\perp , ce qui suggère de chercher un champ de vitesses capable d'accélérer les trajectoires des caractéristiques associées dans la direction n_H . Nous pouvons faire ceci en trois étapes.

Premièrement, on utilise le théorème de Coron-Fursikov pour passer de zéro à la solution stationnaire n_H . Deuxièmement, on maintient la solution stationnaire suffisamment de temps pour accélérer toutes les basses vitesses dans la direction du champ. C'est à ce stade que l'on a besoin d'imposer un temps long. Finalement, on récupère la configuration à vitesse zéro grâce au théorème cité.

Ces trois étapes fournissent un contrôle \bar{w} , essentiel pour la modification du champ de vitesses \bar{u} que l'on vient de décrire. Nous allons utiliser ce contrôle pour construire la fonction de distribution associée, via le couplage $\bar{w} = j_{\bar{f}} - \rho_{\bar{f}}\bar{u}$. Choisissons deux fonctions $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in (\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1 dv &= 1, & \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1 dv &= 0, & \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1 dv &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2 dv &= 0, & \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2 dv &= 1, & \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2 dv &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite, on définit

$$f_2(t, x, v) := (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)(v) \cdot \bar{w}(t, x), \quad \forall (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

Ceci nous conduit au résultat suivant.

PROPOSITION 5.7 (Prop. 3.1, [51]). *Soit $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfaisant la Définition 5.1. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$, il existe une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) du système (26) telle que*

$$\begin{aligned} \bar{f} &\in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)), & \bar{u} &\in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \\ (\bar{f}, \bar{u})|_{t=0} &= (\bar{f}, \bar{u})|_{t=T} = (0, 0), & \operatorname{supp}(\bar{f}) &\subset (0, T) \times \omega \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

et telle que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ satisfont

$$(35) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in \left[\frac{T}{12}, \frac{11T}{12} \right] \text{ tel que } \bar{X}(t, 0, x, v) \in \omega.$$

Schéma de point fixe.

Nous suivrons essentiellement les mêmes étapes que dans le cas de Vlasov-Stokes décrites en §5.2. On définit $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ un domaine de fonctions hôlderiennes ϵ -proches de \bar{f} . Ensuite, on définit un opérateur sur \mathcal{S}_ϵ en trois étapes : association d'un champ de vitesses, absorption et extension. Les deux derniers points sont semblables au cas de Vlasov-Stokes. En revanche, le premier point présente des difficultés importantes, dues au caractère non linéaire de Navier-Stokes, et que l'on décrit plus en détail.

1ère étape : association d'un champ de vitesses. A chaque $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, on associe la solution du système

$$(36) \quad \begin{cases} \partial_t u^g + (u^g \cdot \nabla) u^g - \Delta_x u^g(t) + \nabla_x p^g(t) = j_g(t) - \rho_g(t) u^g, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u^g(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ u^g|_{t=0} = u_0, & \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

ce qui est possible en vertu du résultat suivant.

PROPOSITION 5.8 (Prop. 4.1, [51]). *Soit $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ et soit $\epsilon \leq \epsilon_0$ suffisamment petit. Alors, il existe une unique solution faible du système (36), u^g . En plus, cette solution satisfait, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned} \|u^g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \|\nabla u^g(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ \leq 2e^T \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + T(1 + \|j_{\mathcal{F}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))}^2) \right). \end{aligned}$$

La notion de solution faible pour (36) est une adaptation de la notion de solution faible de Leray en présence du terme d'interaction $j_g - \rho_g u$. La preuve de ce résultat se fait en exploitant le résultat d'existence et d'unicité en dimension 2 pour le système de Navier-Stokes, ce qui permet de voir $j_g - \rho_g u$ comme un terme source via un schéma itératif, puis de passer à la limite dans la formulation faible.

2ème étape : absorption. Dans cette étape, nous avons besoin des caractéristiques associées à $-v + u^g$, qui sont bien définies et régulières pourvu que u^g soit suffisamment régulier. Afin d'obtenir cette régularité pour u^g , il est nécessaire d'utiliser des résultats de régularité pour Navier-Stokes en dimension 2 sous l'hypothèse $j_g - \rho_g u^g \in L_t^2 H_x^{-\frac{1}{2}}$, ce qui permet de montrer que $u^g \in L_t^2 H_x^{\frac{3}{2}}$. Puis, nous utilisons un argument de bootstrap, qui donne $u^g \in \mathcal{C}_t^0 H_x^1 \cap L_t^2 H_x^2$, puisque $(u^g \cdot \nabla) u^g \in L_t^2 L_x^2$. Ensuite, on continue l'argument de bootstrap à l'aide de la régularité du système de Stokes dans les espaces $L_t^s L_x^p$, dû à Y. Giga et H. Sohr [22]. Nous montrons que $(u^g \cdot \nabla) u^g \in L_t^2 L_x^3$, ce qui implique $u^g \in L_t^2 W_x^{2,3}$, et par injection de Sobolev, on conclut $u^g \in L_t^2 \mathcal{C}_x^1$.

Cet argument permet de définir les caractéristiques associées à $-v + u^g$, que l'on note (X^g, V^g) . Comme dans le cas de Vlasov-Stokes (cf. 5.2), on résout l'équation de Vlasov dans (5) en imposant une absorption dans ω chaque fois que X^g passe par ω .

3ème étape : extension. On suit les lignes décrites dans §5.2.

Comme dans le cas de Vlasov-Stokes, le théorème de Leray-Schauder permet de démontrer que l'opérateur \mathcal{V}_ϵ possède un point fixe, g^* , dans \mathcal{S}_ϵ , lorsque ϵ est suffisamment petit.

En revanche, l'estimation permettant de rapprocher uniformément les caractéristiques (X^{g^*}, V^{g^*}) des caractéristiques de référence (\bar{X}, \bar{V}) est beaucoup plus difficile à obtenir que dans les cas précédents, où l'on pouvait disposer de la régularité elliptique (Poisson et Stokes) ou de la linéarité du champ (Maxwell). Dans le cas de Navier-Stokes, nous obtiendrons les estimations pour les caractéristiques à partir du résultat de stabilité suivant.

PROPOSITION 5.9 (Prop. 5.1, [51]). *Soient (g, u^g) et (f, u^f) deux solutions fortes du système (26), en accord avec la Définition 5.5, pour des données initiales*

$u^g|_{t=0} = u_0^g, g|_{t=0} = g_0$ et $u^f|_{t=0} = u_0^f, f|_{t=0} = f_0$. Supposons que

$$\sup_{t,x} (|\rho_g(t,x)| + |\rho_f(t,x)|) < \infty.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned} & \| (u^g - u^f)(t) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \| \nabla(u^g - u^f)(s) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \leq e^{C(t)} \left(\| u_0^g - u_0^f \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \| j_{g-f} - \rho_{g-f} u^f \|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

avec

$$C(t) := \int_0^t \left(1 + \| \rho_f(s) \|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \| \rho_f(s) \|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}^2 \right) ds.$$

Ceci permet d'écrire

$$\sup_{t,x,v} \| (X^{g^*}, V^{g^*}) - (\bar{X}, \bar{V}) \| \lesssim \epsilon,$$

ce qui garantit que X^{g^*} arrive dans la zone de contrôle pourvu que ϵ soit suffisamment petit. Par conséquent, le processus d'absorption permet d'atteindre une configuration telle que

$$g^* = 0 \text{ en dehors de } \omega.$$

Finalement, une autre application du théorème de Coron-Fursikov mène cette solution à l'état final (33).

Précisons aussi que la Proposition 5.9 est cruciale pour démontrer que la solution g^* construite est unique dans une certaine classe.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* vol. 30 :5, pp. 1024–1065. 1992.
- [2] K. Beauchard and E. Zuazua. Some controllability results for the 2D Kolmogorov equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, vol. 26, pp. 1793-1815, 2009.
- [3] K. Beauchard. Null controllability of Kolmogorov-type equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 26 :1, pp. 145-176, 2014.
- [4] K. Beauchard, B. Helffer, R. Henry and L. Robbiano. Degenerate parabolic operators of Kolmogorov type with a geometric control condition. *ESAIM Control Opt. Calc. Var.* Vol.21, pp. 487–512. 2015.
- [5] K. Beauchard and K. Pravda-Starov. Null-controllability of hypoelliptic quadratic differential equations. [arXiv:1603.05367](https://arxiv.org/abs/1603.05367). 2016.
- [6] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, J. Le Rousseau. On the controllability of linear parabolic equations with an arbitrary control location for stratified media. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, vol. 344 :6, pp. 357-362, 2007.
- [7] F. Boyer, F. Hubert and J. Le Rousseau. Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations. *J. Math. Pures Appl.* vol. 93, pp. 240-276, 2010.
- [8] F. Bouchut. Hypoelliptic regularity in kinetic equations. *J. Math. Pures Appl.*, vol. 81 :11, pp. 1135–1159. 2002.
- [9] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont and A. Moussa. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Diff. and Int. Eq.*, vol. 22 :11-12, 2009.
- [10] L. Boudin, C. Grandmont, A. Lorz and A. Moussa. Modelling and numerics for respiratory aerosols. To appear in *Comm. in Comput. Physics*. 2015.

- [11] V. Cabanillas, S. de Menezes and E. Zuazua. Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms. *J. Optim. Theory Appl.* vol. 110, pp. 245-264. 2001,
- [12] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble. Null controllability of the heat equation in unbounded domains by a finite measure control region. *ESAIM Control Opt. Calc. Var.*, vol. 10 :3, pp. 381-408, 2004.
- [13] S. Chandrasekharan. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.* vol. 15 :1. 1943.
- [14] J.-M. Coron and A. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol.4 :4, p. 429-448, 1996.
- [15] J.-M. Coron. Control and Nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136. American Mathematical Society, 2007.
- [16] L. Desvillettes and C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous systems. Part I : the linear Fokker-Planck equation. *Comm. in Pure and App. Math.* vol.54 : 1, pp. 1-42. 2001.
- [17] L. Desvillettes, F. Golse and V. Ricci. The mean-field limit for solid particles in a Navier-Stokes flow. *J. Statistical Physics.* vol. 131 :5, pp. 941-967. 2008.
- [18] J. Dolbeault, C. Mouhot and C. Schmeiser. Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass. *Trans. Amer. Math. Soc.* 367. pp. 3807-3828. 2015.
- [19] L. Escauriaza, G. Seregin and V. Sverák. Backward Uniqueness for Parabolic Operators. *Arch. Rational Mech. Anal.* vol.169. pp. 147-157. 2003.
- [20] A.V. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov. Controllability of evolution equations. *Lecture Note Series, Seoul National University. Research Institute of Mathematical Global Analysis*, vol. 34. Seoul. 1996.
- [21] I. Gasser, P. E. Jabin and B. Perthame. Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, vol. 130, pp.1259-1273. 2000.
- [22] Y. Giga and H. Sohr. Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains. *J. Funct. Anal.* Vol.102 :1, pp. 72-94. 1991.
- [23] O. Glass. On the controllability of the Vlasov-Poisson system. *J. Diff. Eq.* vol. 195, pp. 332-379. 2003.
- [24] O. Glass. La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides (d'après J.-M. Coron et al.) *Séminaire Bourbaki 2010/2011*. Astérisque, vol. 348, pp. 1-16. 2012.
- [25] O. Glass and D. Han-Kwan. On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields. *J. Diff. Eq.* vol. 252. pp. 5453-5491. 2012.
- [26] O. Glass and D. Han-Kwan. On the controllability of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *J. Math. Pures et Appl.* vol. 103. pp. 695-740. 2015.
- [27] R.T. Glassey. The Cauchy problem in kinetic theory. *SIAM*. 1996.
- [28] F. Golse, C. Imbert, C. Mouhot and A. Vasseur. Harnack inequality for kinetic Fokker-Planck equations with rough coefficients and application to the Landau equation. [arXiv:1607.08068](https://arxiv.org/abs/1607.08068). 2016.
- [29] M. González-Burgos and L. de Teresa. Some results on controllability for linear and non linear heat equations in unbounded domain. *Adv. Diff. Eq.* vol. 12 :11, pp.1201-1240, 2007.
- [30] T. Goudon, P.E. Jabin and A. Vasseur. Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. I. Light particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, vol.53, pp.1495-1513. 2004.
- [31] T. Goudon, P.E. Jabin and A. Vasseur. Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. II. Fine particles regime, *Indiana Univ. Math. J.*, vol.53, pp.1517-1536. 2004.
- [32] K. Hamdache. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Industr. Appl. Math.* vol. 15. pp. 51-74. 1998.
- [33] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. *Arch. Rat. Mech. An.* vol. 171 :2. pp. 151-218. 2004.

- [34] F. Hérau. Short and long time behavior of the Fokker-Planck equation in a confining potential and applications. *J. Funct. Anal.* Vol. 244 :1. pp. 95-118. 2007.
- [35] L. Hörmander. Hypocoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica.* vol. 119 :1, pp. 147-171, 1967.
- [36] P. E. Jabin and B. Perthame. Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid. Modelling in applied sciences, a kinetic theory approach. *Model. Simul. Sci. Eng. Tech.* Birkhauser. Boston. 2000.
- [37] P. E. Jabin. Large time concentrations for solutions to kinetic equations with energy dissipation. *Comm. Partial Differential Equations.* vol.25, pp. 541-557. 2000.
- [38] A.N. Kolmogorov, Zufällige Bewegungen, *Ann. of Math.* vol. 2 :35, pp. 116–117, 1934.
- [39] J. Le Rousseau. Carleman estimates and some application to control theory. *Lecture Notes in Mathematics / C.I.M.E. Foundation Subseries* J.-M. Coron and P. Cannarsa editors. Springer. 2010.
- [40] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* vol. 18, pp. 712-747, 2012.
- [41] J. Le Rousseau and I. Moyano. Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space. *J. Differential Equations.* Vol. 260. pp. 3193-3233. 2016.
- [42] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 20, pp. 335-356, 1995.
- [43] G. Lebeau and E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 141, pp. 297-329, 1998.
- [44] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués : Perturbations. Masson. 1988.
- [45] S. Micu and E. Zuazua. On the lack of null controllability of the heat equation on the half-line. *Transactions of the A.M.S.* vol. 353 :4. pp. 1635-1659. 2000.
- [46] L. Miller. On the null controllability of the heat equation in unbounded domains. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 129 :2, pp.175-185. 2005
- [47] L. Miller. Unique continuation estimates estimats for the Laplacian and the heat equation on non-compact manifolds. *Math. Res. Lett.* vol. 12 :1, pp. 37-47, 2005.
- [48] C. Mouhot and C. Villani. Kinetic Theory. In *Princeton Companion to Applied Mathematics*, N.J. Higham ed. 2015.
- [49] C. Mouhot. Quelques résultats d'hypocoercitivité en théorie cinétique collisionnelle. Séminaire d'EDPs Laurent Schwartz. 2007–2008, Exp. No. XVI. École polytechnique.
- [50] I. Moyano. On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system. *Communications in Mathematical Sciences*, à paraître. 2016.
- [51] I. Moyano. Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system. Soumis pour publication. [arXiv:1607.05578](https://arxiv.org/abs/1607.05578). 2016.
- [52] I. Moyano. Contrôlabilité de quelques équations cinétiques, paraboliques dégénérées et de Schrödinger. Manuscrit de Thèse, École polytechnique. [tel-01412038v1](https://arxiv.org/abs/1601.01412), 2016.
- [53] K.D. Phung. Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques. *ESAIM : COCV.* vol. 5. pp. 87-137. 2000.
- [54] S. Ukai and T. Okabe. On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation. *Osaka J. Math.* vol. 15 :2. pp. 245-261. 1978.
- [55] C. Villani, Hypocoercivity. *Mem. AMS.* 2008.

LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS, UPMC - SORBONNE UNIVERSITÉS, 4 PLACE JUSSIEU,
75252, PARIS, FRANCE
E-mail address: moyano@ljl11.math.upmc.fr