*THEORIE DES NOMBRES*

*BESANCON*

*Année 1991/1992*

# *SUR LES DENOMINATEURS DES FONCTIONS ZÊTA PARTIELLES*

*G. GRAS*

# Sur les dénominateurs des fonctions zêta partielles

**Georges GRAS**

**Résumé :** Soit $k$ un corps de nombres totalement réel. Soient $S_0$ un ensemble fini de nombres premiers, $S$ l'ensemble des places de $k$ au-dessus de $S_0 \cup \{\infty\}$, et $F/k$ une extension abélienne finie non ramifiée en dehors de $S$. Alors pour tout $p \in S_0$, les valuations $p$-adiques des dénominateurs des fonctions zêta partielles $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$, $\sigma_F \in \text{Gal }(F/k)$, $n \geq 1$, sont données explicitement. Il en résulte, en tout nombre premier, des critères analytiques pour la conjecture de Leopoldt dans $k$ qui précisent ceux donnés par J.-P. Serre.

## 0) Introduction et résultat principal :

Soit $k$ un corps de nombres totalement réel. Soit $S_0$ un ensemble fini de nombres premiers ; l'ensemble $S$ des places de $k$ au-dessus de $S_0 \cup \{\infty\}$ contient donc les $[k : \mathbb{Q}]$ places à l'infini de $k$ ; soient alors $k_S$ l'extension abélienne $S$-ramifiée maximale de $k$ et $G_S = \text{Gal }(k_S/k)$.

Soit $F$ une extension finie de $k$ dans $k_S$ et soit $G_F = \text{Gal }(F/k)$. La fonction zêta partielle $\zeta_{S,F}$ est définie, pour chaque $\sigma_F \in G_F$, par prolongement analytique de

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F, s) = \sum_{\mathfrak{A}} N\mathfrak{A}^{-s}, \ s \in \mathbb{C}, \ \text{Ré }(s) > 1,$$

où la somme est prise sur les idéaux entiers $\mathfrak{A}$ de $k$ étrangers à $S$ et tels que le symbole d'Artin $\left(\frac{F/k}{\mathfrak{A}}\right)$ soit égal à $\sigma_F$. D'après les résultats de H. Klingen et C.L. Siegel (cf. [Si]), on a $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$. Le résultat suivant sur les dénominateurs des fonctions zêta partielles, après avoir été conjecturé par J.-P. Serre, a été démontré par P. Deligne et K. Ribet [D-R], via les formes modulaires, ainsi que par D. Barsky [B] et P. Cassou-Noguès [CN], via la théorie de Shintani :

(0.0) **Théorème :** Soit $w_n(F), n \geq 1$, le plus grand entier $m$ tel que $(\text{Gal }(F(\mu_m)/F))^n = 0$, où $\mu_m$ désigne le groupe des racines $m$-ièmes de l'unité. Alors $w_n(F)\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Ce résultat donne la meilleure divisibilité générale pour les dénominateurs des fonctions zêta partielles, mais pour $p \in S_0$, la théorie des fonctions $L$ $p$-adiques permet d'interpréter les éléments de Stickelberger d'ordre $n \geq 1$,

$$St_{S,F}^{(n)} = \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)\sigma_F^{-1}, \tag{0.1}$$

comme les restrictions à $F$ de $\mathbb{Z}_p$-distributions sur $G_S$ issues de la pseudo-mesure de Deligne-Ribet $DR_S$ associée à $S$ (cf. (1.3.1)), et pour laquelle on connait le terme polaire, grâce aux résultats de J.-P. Serre [S] et P. Colmez [C]. Il est alors possible de calculer exactement les $p$-parties des dénominateurs en fonction des invariants standard de $k$ que nous précisons par les quelques notations suivantes :

(0.2) **Notations :**

(i) Pour tout nombre premier $p$, on désigne par $S_p$ l'ensemble des idéaux premiers de $k$ au-dessus de $p$ ; de même on désigne par $S_\infty$ l'ensemble des $[k:\mathbb{Q}]$ places à l'infini de $k$. Pour $p$ premier on désigne par $\mathbb{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $k$ et on pose $[k \cap \mathbb{Q}_\infty : \mathbb{Q}] = p^{n_p(k)}$, $n_p(k) \geq 0$.On pose enfin $q = p$ (resp. 4) si $p \neq 2$ (resp. $p = 2$).

(ii) Lorsque $\mathfrak{L}$ est un idéal premier de $k$, $N\mathfrak{L}$ désigne sa norme absolue, et lorsque $\mathfrak{L}$ est une place à l'infini (réelle) de $k$, on pose $N\mathfrak{L} = -1$.

(iii) On désigne par $D(k)$ et $h(k)$ le discriminant et le nombre de classes de $k$, et pour tout nombre premier $p$, on désigne par $R_p(k)$ le régulateur $p$-adique de $k$. On pose

$$\rho_{S,p}(k) = \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L}\in S}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{L}}\right)$$
$$\sim 2^{[k:\mathbb{Q}]}\frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} N\mathfrak{p}^{-1} \prod_{\mathfrak{L}\in S - S_p \cup S_\infty} (N\mathfrak{L} - 1),$$

où $\sim$ désigne la relation d'équivalence modulo $\mathbb{Z}_p^*$ dans $\mathbb{Q}_p^*$.
D'après P. Colmez [C], on sait que $\rho_{S,p}(k)$ est le résidu en $s = 1$ de la fonction zêta $p$-adique $\zeta_{S,p}(k,s) = \zeta_p(k,s) \prod_{\mathfrak{L}\in S - S_p \cup S_\infty} (1 - N\mathfrak{L}^{-s})$, où $\zeta_p(k,s)$ est la fonction zêta $p$-adique de $k$, et que la $p$-partie de

$$a_{S,p}(k) = qp^{n_p(k)}\rho_{S,p}(k)$$

est, lorsque $R_p(k) \neq 0$, le nombre d'éléments du sous-groupe de torsion du $p$-sous-groupe de Sylow de $G_S$ (cf. [S, (2.8), (2.9)]).

(iv) On désigne enfin par $\omega$ le caractère de Teichmuller pour $p$ sur $G_S$.

Le résultat principal est alors le suivant :

(0.3) **Théorème :** Soit $F$ une extension abélienne finie $S$-ramifiée de $k$, et soit $n$ un entier $\geq 1$. Alors pour tout $p \in S_0$, les valuations $p$-adiques $V_p(S,F,1-n)$ des dénominateurs des rationnels $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$, $\sigma_F \in$ Gal $(F/k)$, sont indépendantes de $\sigma_F$ et sont les suivantes :

(i) $\omega^n$ est caractère de $F$ : on a

$$V_p(S,F,1-n) = \text{Max}\left(0, v_p\left(\frac{[F:k]n}{\rho_{S,p}(k)}\right)\right);$$

(ii) $\omega^n$ n'est pas caractère de $F$ : on a $V_p(S,F,1-n) = 0$ sauf dans le cas particulier où $p = 2$, $n \equiv 1 \bmod 2$ et $F \cap k(\mu_{2^\infty})$ est imaginaire, cas pour lequel on a :

$$V_2(S,F,1-n) = \text{Max}\left(0, v_2\left(\frac{[F : F\cap k(\mu_{2^\infty})]}{2^{n_2(k)}\rho_{S,2}(k)}\right)\right).$$

(0.4) **Remarques :**

(i) Nous avons, dans l'énoncé du théorème, supposé implicitement que la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour $p \in S_0$ dans $k$ (i.e. $\rho_{S,p}(k) \neq 0$), car on sait d'après [S] que, dans le cas contraire, les $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$ sont toutes $p$-entières. Se reporter aussi aux énoncés (2.12.1') et (2.12.2') qui précisent le résultat précédent.

(ii) Si l'on se donne un nombre premier $p$ arbitraire, on peut, en considérant $S_0 = \{p\}$ et en choisissant $F \subset k_S$ convenable, obtenir des critères d'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour $p$ dans $k$, en termes de fonctions zêta partielles en $s \in -\mathbb{N}$ (cf. théorèmes (3.1), (3.2)).

(iii) Ces résultats redonnent et précisent certains de ceux obtenus indépendamment par M. Kolster [K] au moyen de l'étude de la $K$-théorie étale ; voir également les résultats de T. Nguyen Quang Do [N] sur les noyaux sauvages étales d'ordres supérieurs.

## 1) $\mathbb{Z}_p$-distributions de Stickelberger :

Soit donc $p \in S_0$ ; rappelons l'essentiel des définitions liées aux questions de mesures $p$-adiques sur $G_S = \mathrm{Gal}\,(k_S/k)$, et qui font intervenir, de manière essentielle, le fait que $S$ contient $S_p$ :

(1.1) **Définitions :**

(i) Soit $\Lambda_S$ (resp. $\Delta_S$, $\Delta'_S$) la $\mathbb{Z}_p$-algèbre topologique des $\mathbb{Z}_p$-mesures sur $G_S$, égale par définition à $\varprojlim_F \mathbb{Z}_p[G_F]$, $k \subseteq F \subset k_S$, $[F:k] < \infty$, où $G_F = \mathrm{Gal}\,(F/k)$ (resp. son anneau total des fractions, puis la sous-algèbre des éléments $\frac{\nu}{\delta} \in \Delta_S, \nu, \delta \in \Lambda_S$, $\delta$ non nul et non diviseur de 0, pour lesquels les composantes $\delta_F$ sont aussi non nulles et non diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}_p[G_F]$, pour tout $F$). Les éléments de $\Delta_S$ sont appelés les $\mathbb{Z}_p$-distributions sur $G_S$ ; parmi elles on distingue les $\mathbb{Z}_p$-pseudo-mesures $\lambda$ qui sont telles que $(1-\sigma)\lambda \in \Lambda_S$ pour tout $\sigma \in G_S$ (cf. [S]).

(ii) Pour toute $\mathbb{Z}_p$-mesure $\nu \in \Lambda_S$, on désigne donc par $\nu_F$ sa composante sur $\mathbb{Z}_p[G_F]$ ; l'application $\Lambda_S \to \mathbb{Z}_p[G_F]$, qui à $\nu$ associe $\nu_F$, se prolonge en une application de $\Delta'_S$ dans $\mathbb{Q}_p[G_F]$, et nous l'appellerons pour simplifier la restriction à $F$ (dans la mesure où elle est aussi issue de la restriction des automorphismes $G_S \to G_F$, par prolongement par $\mathbb{Z}_p$-linéarité, puis par densité de $\mathbb{Z}_p[G_S]$ dans $\Lambda_S$, et enfin par extension aux éléments de $\Delta'_S$).

(iii) Soit $k_\infty = k\,\mathbb{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $k$ ; puisque l'on peut supposer la conjecture de Leopoldt satisfaite pour $p$ dans $k$, le $p$-Sylow $A_S(p)$ de $A_S = \mathrm{Gal}\,(k_S/k_\infty)$ est fini ; fixons une décomposition de $G_S$ sous la forme $G_S = A_S \oplus \Gamma$, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ ; pour $p \neq 2$ il est clair que $\Gamma$ fixe $k(\mu_p)$ et pour $p = 2$, on peut toujours choisir $\Gamma$ de telle sorte qu'il fixe $k(\sqrt{-1})$ (car $k_\infty \cap k(\sqrt{-1}) = k$), ce que nous supposons.
On désigne alors par $\alpha_{A_S}$ la $\mathbb{Z}_p$-mesure de Haar sur $A_S$ normalisée par la condition que l'intégrale du caractère unité $\chi_0$ vérifie $\langle \chi_0, \alpha_{A_S} \rangle = \sharp A_S(p)$.
Soit enfin $\gamma$ un générateur topologique de $\Gamma$ et soit $T = 1 - \gamma$.

(iv) On pose $M_0 = k(\mu_q)$, $M = k_\infty M_0 = k(\mu_{p^\infty})$ ; on définit les caractères continus suivants de $G_S$ :

$$N : G_S \to \mathrm{Gal}\,(M/k) \to \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^*,$$

qui est le caractère de l'action de $G_S$ sur $\mu_{p^\infty}$ et dont le noyau fixe le corps $M$,

$$\langle\ \rangle : G_S \xrightarrow{N} \mathbb{Z}_p \to 1 + q\mathbb{Z}_p,\ \omega : G_S \xrightarrow{N} \mathbb{Z}_p^* \to \mathrm{tor}\,(\mathbb{Z}_p^*),$$

dont les noyaux fixent respectivement $k_\infty$ et $M_0$. On a $\omega\langle\ \rangle = N$.

(1.2) **Pseudo-mesure de Deligne-Ribet :** On sait (cf. [D-R], [S]) qu'il existe une $\mathbb{Z}_p$-pseudo-mesure $DR_S$ associée de la façon suivante à la construction des fonctions $L$ $p$-adiques :

Soit $\chi$ un caractère d'ordre fini de $G_S$ ; alors la fonction

(1.2.1) $$L_{S,p}(\chi, s) = \langle \chi\langle\ \rangle^{1-s},\ DR_S\rangle,\ s \in \mathbb{Z}_p,$$

est telle que

(1.2.2) $$L_{S,p}(\chi, 1-n) = L_S(\chi\omega^{-n}, 1-n),\ \text{pour tout } n \geq 1,$$

où, en posant $\chi(\mathfrak{A}) = \chi\left(\left(\frac{k_S/k}{\mathfrak{A}}\right)\right)$ pour tout idéal entier $\mathfrak{A}$ de $k$ étranger à $S, L_S$ est la fonction de variable complexe définie par :

$$\begin{aligned} L_S(\chi, s) &= \sum_{\mathfrak{A}} \chi(\mathfrak{A}) N\mathfrak{A}^{-s} \\ &= L(\chi, s) \prod_{\mathfrak{L} \in S - S_\infty} (1 - \chi(\mathfrak{L}) N\mathfrak{L}^{-s}). \end{aligned}$$

(1.2.3) **Remarque :** La notation $L_S$ rappelle que $\chi$ est vu comme caractère de Dirichlet modulo $S$ et donc que la fonction $L_S$ considérée peut ne pas être primitive.

On a alors [S, (1.15)] :

(1.2.4) $$DR_S = c_S \alpha_{A_S} T^{-1} + \mu_S, c_S \in \mathbb{Z}_p, \mu_S \in \Lambda_S.$$

De plus, le résultat de [C] montre, de façon essentielle, que $c_S$ est une unité $p$-adique (résultat qui avait été conjecturé par J. Coates).

(1.3) **Transformée de Mellin d'ordre $n \geq 1$ :**
L'application continue de $G_S$ dans $\mathbb{Z}_p[G_S]$ qui à $\sigma \in G_S$ associe

$$m^{(n)}(\sigma) = (N\sigma)^n \sigma^{-1}$$

se prolonge par $\mathbb{Z}_p$-linéarité puis par densité en une involution de $\Lambda_S$ qui se prolonge donc à $\Delta_S$ (mais on notera que ce n'est pas une involution sur $\Delta'_S$).
On a alors le résultat suivant :

(1.3.1) **Lemme :** Pour tout $F \subset k_S$, $[F : k] < \infty$, et pour tout $n \geq 1$, on a $St_{S,F}^{(n)} = (m^{(n)}(DR_S))_F$.

On a, pour tout caractère $\psi$ de $G_S$ qui se factorise modulo Gal $(k_S/F)$ (i.e. pour tout caractère de $F$) :

$$\begin{aligned}\langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle &= \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)\psi^{-1}(\sigma_F) \quad (\text{cf. } (0.1)) \\ &= L_S(\psi^{-1}, 1-n)\ ;\end{aligned}$$

or on a (cf. (1.2.2)) :

$$L_S(\psi^{-1}, 1-n) = L_{S,p}(\psi^{-1}\omega^n, 1-n),$$

ce qui s'écrit, par (1.2.1) :

$$\langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle = \langle \psi^{-1}\omega^n \langle\ \rangle^n, DR_S \rangle = \langle \psi^{-1} N^n, DR_S \rangle\ ;$$

l'identité suivante :

$$\langle \psi^{-1} N^n, \sigma \rangle = \langle \psi, m^{(n)}(\sigma) \rangle \text{ pour tout } \sigma \in G_S,$$

montre que l'on a :

$$\langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle = \langle \psi, m^{(n)}(DR_S) \rangle$$

pour tout caractère $\psi$ de $F$ ; il en résulte, dans $\mathbb{Q}_p[G_F]$, l'égalité

$$St_{S,F}^{(n)} = (m^{(n)}(DR_S))_F.$$

Ceci prouve que $(St_{S,F}^{(n)})_F$ est une $\mathbb{Z}_p$-distribution sur $G_S$ qui appartient à $\Delta'_S$ (on peut le vérifier directement à partir des propriétés des $St_{S,F}^{(n)}$).

Nous notons $St_S^{(n)}$ cette distribution, notation qui est cohérente car la restriction de $St_S^{(n)}$ à $F$ est bien $St_{S,F}^{(n)}$ au sens de (0.1). La mesure $\delta^{(n)} = m^{(n)}(T)$ en est un dénominateur dont les restrictions $\delta_F^{(n)}$ sont non nulles et non diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}_p[G_F]$ (cf. (2.7) ci-après).

(1.3.2) **Corollaire :** Les dénominateurs des $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$ sont les mêmes que ceux de la restriction à $F$ du terme polaire $m^{(n)}(c_S \alpha_{A_S} T^{-1})$ de $St_S^{(n)}$, écrit sur la base canonique de $\mathbb{Q}_p[G_F]$ (cf. (1.2.4)).

## 2) Calcul du terme polaire :

Posons

$$\pi_S^{(n)} = m^{(n)}\Big(\alpha_{A_S} T^{-1}\Big)\ ;$$

on est amené à calculer $\pi_{S,F}^{(n)}$.

A partir des définitions (1.1), (iii) et (iv), précisons quelques notations :

(2.1) **Notations :**

(i) On pose $[k \cap \mathbb{Q}_\infty : \mathbb{Q}] = p^{n_p(k)}$ ; l'image de $G_S$ par le caractère $\langle\ \rangle$ est alors $1 + qp^{n_p(k)}\mathbb{Z}_p$.

(ii) Soit $M_0^{(n)}$ le sous-corps de $M_0 = k(\mu_q)$ fixe par le noyau de $\omega^n$ et soit $M^{(n)} = k_\infty M_0^{(n)}$.

(iii) On pose $B_S^{(n)} = \mathrm{Gal}\,(k_S/M^{(n)})$ et $H^{(n)} = \mathrm{Gal}\,(M^{(n)}/k_\infty)$.

(iv) On pose enfin $F^{(n)} = M^{(n)} \cap F$, $G_F^{(n)} = \mathrm{Gal}\,(F/F^{(n)})$.

On a $m^{(n)}(T) = 1 - (N\gamma)^n\gamma^{-1} = 1 - \langle\gamma\rangle^n\gamma^{-1}$ puisque $\Gamma$ fixe $M_0$ (cf. (1.1), (iii)) et donc que $\omega^n(\gamma) = 1$, et par conséquent, en posant

(2.2) $$\delta^{(n)} = 1 - \langle\gamma\rangle^n\gamma^{-1},$$

il vient

(2.3) $$(m^{(n)}(T))_F = \delta_F^{(n)} = 1 - \langle\gamma\rangle^n\gamma_F^{-1}.$$

Etudions maintenant $m^{(n)}(\alpha_{A_S})$ en écrivant

$$\alpha_{A_S} \sim \alpha_{B_S^{(n)}} \sum_{h\in H^{(n)}} h',$$

où $h'$ désigne un prolongement arbitraire de $h \in H^{(n)}$ dans $A_S$.
On a donc, puisque la restriction à $B_S^{(n)}$ du caractère $N^n$ est le caractère unité,

(2.4) $$m^{(n)}(\alpha_{A_S}) \sim \alpha_{B_S^{(n)}}\beta^{(n)}$$

où

$$\beta^{(n)} = \sum_{h\in H^{(n)}} \omega^n(h)h'^{-1}.$$

Ceci conduit à (cf. (2.3), (2.4)) :

(2.5) $$\pi_{S,F}^{(n)} \sim \frac{1}{\delta_F^{(n)}}\,\alpha_{B_S^{(n)},F}\beta_F^{(n)}.$$

(2.6) **Définition :** On pose

$$\theta_F^{(n)} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \langle\gamma\rangle^{ni}\gamma_F^{-i},$$

où $p^r$, $r \geq 0$, est l'ordre de $\gamma_F$ dans $G_F$.

Ceci étant, on a :

$$\begin{aligned}\delta_F^{(n)}\theta_F^{(n)} &= (1 - \langle\gamma\rangle^n\gamma_F^{-1})\theta_F^{(n)} \\ &= 1 - \langle\gamma\rangle^{np^r} \\ &\sim nqp^{n_p(k)+r}.\end{aligned}$$

(2.7) **Remarque :** Ceci montre que $\delta_F^{(n)}$ (et $\theta_F^{(n)}$) sont non nuls et non diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}_p[G_F]$ et confirme l'appartenance de $St_S^{(n)}$ à $\Delta'_S$ (cf. (1.1), (i)) ainsi que l'existence de $(m^{(n)}(DR_S))_F$.

On étudie maintenant $\pi^{(n)}_{S,F}$ sous la forme issue de (2.5), compte-tenu de (2.6) :

$$\pi^{(n)}_{S,F} \sim \frac{1}{nqp^{n_p(k)+r}}\, \alpha_{B^{(n)}_S,F}\beta^{(n)}_F\theta^{(n)}_F. \tag{2.8}$$

(2.9) **Lemme :** On a $\pi^{(n)}_{S,F} \sim c^{(n)}_F \alpha_{G^{(n)}_F}\beta^{(n)}_F\theta^{(n)}_F$, où

$$c^{(n)}_F \sim \frac{1}{np^r \sharp H^{(n)}\sharp G^{(n)}_F}\, \rho_{S,p}(k) \quad \text{(cf. (0.2), (iii)).}$$

En effet, $\alpha_{B^{(n)}_S,F}$ est une mesure sur $G^{(n)}_F$ invariante par translation ; elle est donc de la forme $c\,\alpha_{G^{(n)}_F}$, $c \in \mathbb{Q}_p$, et $c$ se calcule en écrivant que

$$\langle \chi_0, \alpha_{B^{(n)}_S}\rangle = c\langle \chi_0, \alpha_{G^{(n)}_F}\rangle \ ;$$

d'où

$$c = \frac{\sharp B^{(n)}_S(p)}{\sharp G^{(n)}_F(p)} = \frac{\sharp A_S(p)}{\sharp H^{(n)}(p)\sharp G^{(n)}_F(p)}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\sharp A_S(p) &\sim qp^{n_p(k)}\frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L}\in S}(1 - N\mathfrak{L}^{-1})\\ &\sim qp^{n_p(k)}\rho_{S,p}(k) \quad \text{(cf. (0.2), (iii))} \ ;\end{aligned}$$

d'où l'expression de $c^{(n)}_F \sim \frac{c}{nqp^{n_p(k)+r}}$.

(2.10) **Notations :** Pour simplifier les notations nous posons

$$\alpha_{G^{(n)}_F} = \alpha^{(n)}_F$$

(mesure de Haar sur $G^{(n)}_F = \mathrm{Gal}\ (F/F^{(n)})$).

(2.11) **Lemme :** On a $\alpha^{(n)}_F\beta^{(n)}_F \neq 0$ si et seulement si $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$.

On a en effet $\alpha^{(n)}_F\beta^{(n)}_F = \alpha^{(n)}_F \sum\limits_{h\in H^{(n)}} \omega^n(h)h'^{-1}_F$ qui est non nul si et seulement si, par restriction à $F^{(n)}$, on a

$$\beta^{(n)}_{F^{(n)}} = \sum_{h\in H^{(n)}} \omega^n(h)h^{-1}_{F^{(n)}} \neq 0, \tag{2.11.1}$$

ce qui a lieu si et seulement si l'application canonique

$$H^{(n)} \to \mathrm{Gal}\left(F^{(n)}/k_\infty{\cap}F^{(n)}\right)$$

est injective ; d'où la condition.

(2.11.2) **Remarque :** Pour $p \neq 2$, la condition équivaut à $M_0^{(n)} \subseteq F^{(n)}$ (i.e. $\omega^n$ est un caractère de $F$) ; pour $p = 2$, on a $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$ exactement dans deux cas : le cas où $\omega^n$ est un caractère de $F$ et le cas particulier où $M_0^{(n)} = k(\sqrt{-1})$ (i.e. $n$ impair) et où $F^{(n)}$ est un corps imaginaire ne contenant pas $\sqrt{-1}$ (ainsi $F^{(n)}$ est un sous-corps de $k(\mu_{2^\infty})$ correspondant à un caractère de la forme $\chi\omega$, $\chi$ caractère de $k_\infty$ distinct de $\chi_0$).

Le cas où $k_\infty F^{(n)}$ est distinct de $M^{(n)}$ conduit donc à $\pi_{S,F}^{(n)} = 0$, soit $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \in \mathbb{Z}_p$ pour tout $\sigma_F \in G_F$. On écarte ce cas d'intégralité et on suppose désormais que $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$. On a toujours (cf. (2.9)) :

$$\pi_{S,F}^{(n)} \sim c_F^{(n)} \alpha_F^{(n)} \beta_F^{(n)} \theta_F^{(n)} \ ;$$

les coefficients de $\pi_{S,F}^{(n)}$ dans $\mathbb{Q}_p[G_F]$ sont constants sur les classes de $G_F$ modulo $G_F^{(n)}$ et sont donnés par ceux de la restriction

$$c_F^{(n)} \beta_{F^{(n)}}^{(n)} \theta_{F^{(n)}}^{(n)} \tag{2.12}$$

dans $\mathbb{Q}_p[G_{F^{(n)}}]$.

On remarque que $M^{(n)}$ est le composé direct sur $k$ de $k_\infty$ et de $M_0^{(n)}$ ; la remarque (2.11.2) nous permet alors d'envisager 2 cas :

(2.12.1) **Cas où $\omega^n$ est caractère de $F^{(n)}$ :** On a alors

$$\mathrm{Gal}\ (F^{(n)}/k) \simeq \overline{H}^{(n)} \times \overline{\Gamma},$$

où

$$\overline{H}^{(n)} = \mathrm{Gal}\ (F^{(n)}/F^{(n)} \cap k_\infty) \simeq H^{(n)},\ \overline{\Gamma} = \mathrm{Gal}\ (F^{(n)}/M_0^{(n)}).$$

Dans ce cas, le groupe $\overline{\Gamma}$ est indépendant de $n$ car $\sharp\overline{\Gamma} = [k_\infty \cap F : k]$ que l'on note $p^{r_0}$, $r_0 \geq 0$. On a alors (cf. (2.4), (2.6)) :

$$\beta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{h \in H^{(n)}} \omega^n(h) h_{F^{(n)}}^{-1} \in \mathbb{Z}_p[\overline{H}^{(n)}],$$

$$\theta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \langle\gamma\rangle^{ni} \gamma_{F^{(n)}}^{-i} \in \mathbb{Z}_p[\overline{\Gamma}] \ ;$$

si $\beta_{F^{(n)}}^{(n)}$ est bien écrit sur la base canonique $\overline{H}^{(n)}$, il n'en est rien pour $\theta_{F^{(n)}}^{(n)}$, et il faut introduire Gal $(F/F^{(n)}F_0)$, où $F_0$ est le sous-corps de $F$ fixe par $\gamma_F$ ; on vérifie que $F^{(n)} \cap F_0 = M_0^{(n)}$ ; on a, en écrivant

$$i = \lambda p^{r_0} + j, \lambda \in [0, p^{r-r_0}[,\ j \in [0, p^{r_0}[,$$

$$\theta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{\lambda, j} \langle\gamma\rangle^{n(\lambda p^{r_0}+j)}\ \gamma_{F^{(n)}}^{-j}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{p^{r-r_0}-1} \langle\gamma\rangle^{n\lambda p^{r_0}} \sum_{j=0}^{p^{r_0}-1} \langle\gamma\rangle^{nj} \gamma_{F^{(n)}}^{-j},$$

où

$$\sum_{\lambda=0}^{p^{r-r_0}-1} \langle\gamma\rangle^{n\lambda p^{r_0}} = \Big(\langle\gamma\rangle^{np^{r_0}p^{r-r_0}} - 1\Big)\Big(\langle\gamma\rangle^{np^{r_0}} - 1\Big)^{-1} \sim p^{r-r_0}.$$

On obtient alors par (2.12) que les $p$-parties des dénominateurs cherchées sont toutes égales à celle du dénominateur de $c_F^{(n)} p^{r-r_0}$, donc (cf. (2.9)) de :

$$\frac{1}{np^{r_0}\sharp H^{(n)}\sharp G_F^{(n)}}\ \rho_{S,p}(k)\ ;$$

or $p^{r_0}\sharp H^{(n)}\sharp G_F^{(n)} = [F:k]$, ce qui conduit au coefficient

$$\frac{1}{n[F:k]}\ \rho_{S,p}(k).$$

D'où l'expression (i) du théorème (0.3).

En effectuant les calculs précédents modulo $\mathbb{Z}_p (p \in S_0)$, on obtient le résultat plus précis suivant :

(2.12.1') **Proposition :** Soit $\sigma \in G_S$ et soit $n \geq 1$ tel que $\omega^n$ soit un caractère de $F$ ; alors, pour la restriction $\sigma_F$ de $\sigma$ à $F$, on a :

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \equiv \frac{[F:F^{(n)}]p^{-v_p([F:F^{(n)}])}}{[F:k]}\ \frac{\log\left(1+qp^{n_p(k)+r_0}\right)}{1-\left(1+qp^{n_p(k)+r_0}\right)^n}\ N^n(\sigma)\ \rho_{S,p}(k) \bmod \mathbb{Z}_p$$

(cf. (0.2), (iii) et (0.3), (i)), où $p^{r_0} = [F\cap k_\infty : k]$.

(2.12.2) **Cas particulier du cas** $p = 2$ **:** C'est le cas (cf. (2.11.2)) où $F^{(n)}$ est imaginaire cyclique de degré noté $2^{r_0+1}$ sur $k$, distinct de $k(\sqrt{-1})$, et $n \equiv 1$ modulo 2 ; on a :

$$\beta_{F^{(n)}}^{(n)} = 1 - h_{F^{(n)}},$$

où $h$ est le générateur de $H^{(n)}$,

$$\theta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{i=0}^{2^r-1} \langle\gamma\rangle^{ni}\gamma_{F^{(n)}}^{-i}.$$

Posons pour simplifier $\gamma_{F^{(n)}} = \tau$ (d'ordre $2^{r_0+1}$) ; on a

$$h_{F^{(n)}} = \tau^{2^{r_0}}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{F^{(n)}}^{(n)}\theta_{F^{(n)}}^{(n)} &= \left(1-\tau^{2^{r_0}}\right)\sum_{i=0}^{2^r-1}\langle\gamma\rangle^{ni}\tau^{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{2^r-1}\langle\gamma\rangle^{ni}\tau^{-i} - \sum_{i=0}^{2^r-1}\langle\gamma\rangle^{ni}\tau^{-i-2^{r_0}}.\end{aligned}$$

Posons :

$$i=\lambda 2^{r_0+1}+j,\ \lambda\in[0,2^{r-r_0-1}[,\ j\in[0,2^{r_0+1}[\ ;$$

comme $n$ est impair, on peut faire les calculs avec $n=1$. Il vient :

$$\beta^{(1)}_{F^{(1)}}\theta^{(1)}_{F^{(1)}}=\sum_{\lambda,j}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j}\tau^{-j}-\sum_{\lambda,j}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j}\tau^{-j-2^{r_0}}\ ;$$

dans le second terme, chaque somme sur $j$ s'écrit :

$$\begin{aligned}&-\sum_{j=0}^{2^{r_0}-1}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j}\tau^{-j-2^{r_0}}-\sum_{j=2^{r_0}}^{2^{r_0+1}-1}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j}\tau^{-j-2^{r_0}}\\&=-\sum_{k=2^{r_0}}^{2^{r_0+1}-1}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+k-2^{r_0}}\tau^{-k}-\sum_{k=0}^{2^{r_0}-1}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+k+2^{r_0}}\tau^{-k}.\end{aligned}$$

Les coefficients de $\tau^{-j}$ sont les suivants, où $\varepsilon=1$ (resp. $\varepsilon=-1$) si $j\in[0,2^{r_0}[$ (resp. $j\in[2^{r_0},\ 2^{r_0+1}[$) :

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j}-\sum_{\lambda}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}+j+\varepsilon 2^{r_0}}\\&=\langle\gamma\rangle^{j}\Big(1-\langle\gamma\rangle^{\varepsilon 2^{r_0}}\Big)\sum_{\lambda=0}^{2^{r-r_0-1}-1}\langle\gamma\rangle^{\lambda 2^{r_0+1}}\\&=\langle\gamma\rangle^{j}\Big(1-\langle\gamma\rangle^{\varepsilon 2^{r_0}}\Big)\Big(\langle\gamma\rangle^{2^{r_0+1}2^{r-r_0-1}}-1\Big)\Big(\langle\gamma\rangle^{2^{r_0+1}}-1\Big)^{-1}\\&\sim 2^{n_2(k)+r-1}.\end{aligned}$$

Ici les 2-parties des dénominateurs sont égales à celle du dénominateur de $c_F^{(n)}\times 2^{n_2(k)+r+1}$ qui est aussi celui de

$$\frac{2^{n_2(k)+1}}{\sharp H^{(n)}\sharp G_F^{(n)}}\ \rho_{S,p}(k)\ ;$$

on a $\sharp H^{(n)}=2$, $\sharp G_F^{(n)}=[F:F_\cap k(\mu_{2^\infty})]$ ; ce qui donne le rationnel $p$-adique :

$$\frac{2^{n_2(k)}}{[F:F_\cap k(\mu_{2^\infty})]}\ \rho_{S,p}(k),$$

et conduit au cas (ii) du théorème (0.3).

De même que pour le cas général, on obtient ici :

(2.12.2') **Proposition :** On suppose que $F^{(1)}=F_\cap k(\mu_{2^\infty})$ est une extension cyclique imaginaire de $k$ distincte de $k(\sqrt{-1})$ ; alors pour $\sigma\in G_S$ et pour $n\equiv 1 \bmod 2$, on a

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F,1-n)\equiv\frac{[F:F^{(1)}]2^{-v_2([F:F^{(1)}])}}{[F:k]}\ \frac{\log\big(1+4.2^{n_2(k)+r_0}\big)}{1+\big(1+4.2^{n_2(k)+r_0}\big)^{n}}\ N^{n}(\sigma)\ \rho_{S,2}(k) \bmod \mathbb{Z}_2,$$

où $2^{r_0} = [f \cap k_\infty : k]$.

(2.13) **Eléments de Stickelberger usuels :** Pour $k = \mathbb{Q}$ et $n = 1$, considérons les éléments de Stickelberger usuels $St_F = \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_F(\sigma_F, 0)\sigma_F^{-1}$ ; ici $St_F$ est primitif, autrement dit on prend pour $S_0$ exactement l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur $f$ de $F/\mathbb{Q}$. On sait alors que

$$St_F = \sum_{a \in [1,f]'} \Big(\frac{1}{2} - \frac{a}{f}\Big)\sigma_{a,F}^{-1}$$

où $[1, f]' = \{a \in [1, f],\ (a, f) = 1\}$ et où $\sigma_a$ est l'automorphisme défini sur $\mathbb{Q}(\mu_f)$ par $\sigma_a(\xi) = \xi^a$ pour tout $\xi \in \mu_f$.

Comme $2fSt_F \in \mathbb{Z}[G_F]$, on va pouvoir donner, quel que soit $p$ premier, la $p$-partie des dénominateurs des coefficients de $St_F$, car le seul cas qui puisse poser problème est le cas $p = 2$ lorsque $2 \notin S_0$, mais dans ce cas, la partie polaire en 2 est

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in [1,f]'} \sigma_{a,F}^{-1} \sim \frac{1}{2}[\mathbb{Q}(\mu_f) : F]\alpha_F,$$

où $\alpha_F$ est la mesure de Haar sur $G_F$, et le calcul du dénominateur est immédiat.

On obtient donc le résultat suivant :

(2.13.1) **Corollaire :** Soit $F$ une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ de conducteur $f$, et pour tout $p$ premier, soit $V_p(F, 0)$ la valuation $p$-adique des dénominateurs des fonctions zêta partielles primitives $\zeta_F(\sigma_F, 0)$, $\sigma_F \in \mathrm{Gal}\ (F/\mathbb{Q})$ ; les nombres $V_p(F, 0)$ sont les suivants :

(i) $p \nmid 2f$ : on a $V_p(F, 0) = 0$ ;

(ii) $p \mid f$ et $\omega$ est caractère de $F$ (qui est donc imaginaire) : on a

$$V_p(F, 0) = \mathrm{Max}\ \Big(0, v_p(p[F : \mathbb{Q}]) - \sum_{\ell \mid f} v_p(\ell - 1)\Big) \ ;$$

(iii) $p \mid f$ et $\omega$ n'est pas caractère de $F$ : on a $V_p(F, 0) = 0$ sauf dans le cas où $p = 2$ et $F$ contient un sous-corps imaginaire de $\mathbb{Q}(\mu_{2^\infty})$, auquel cas on a

$$V_2(F, 0) = \mathrm{Max}\ \Big(0, v_2([F : F \cap \mathbb{Q}_\infty]) - \sum_{\ell \mid f} v_2(\ell - 1)\Big) \ ;$$

(iv) $p = 2$, $p \nmid f$ : on a

$$V_2(F, 0) = \mathrm{Max}\ \Big(0, v_2(2[F : \mathbb{Q}]) - \sum_{\ell \mid f} v_2(\ell - 1)\Big).$$

(2.13.2) **Remarque :** Si $F$ est réel, $F \neq \mathbb{Q}$, on sait que $St_F = 0$ et ce qui précède (notamment le point (iv) du corollaire) conduit bien à $V_2(F, 0) = 0$. Si $F = \mathbb{Q}$, on sait que

$\zeta_{\mathbb{Q}}(0) = -\frac{1}{2}\Big(St_{\mathbb{Q}} = \sum_{a\in[1,1]'} (\frac{1}{2} - \frac{a}{1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}\Big)$, et le point (iv) du corollaire conduit bien à $V_2(\mathbb{Q}, 0) = 1$.

**3) Conjecture de Leopoldt et fonctions zêta partielles :** Les résultats précédents nous permettent de donner des critères analytiques précis d'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour $p$ dans $k$, critères qui complètent certaines des remarques faites par J.-P. Serre [S, (3.17), c, d].

Ici on prend $S_0 = \{p\}$, $p$ premier arbitraire, auquel cas $S = S_p \cup S_\infty$ ; on pose alors :

$$\rho_p(k) = \rho_{S,p}(k) = \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L}\in S}(1 - N\mathfrak{L}^{-1})$$
$$\sim 2^{[k:\mathbb{Q}]}\frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} N\mathfrak{p}^{-1}.$$

(3.1) **Théorème :** Soit $k$ un corps de nombres totalement réel, et soit $p$ premier :

(i) On a $R_p(k) \neq 0$ si et seulement s'il existe $e \geq 0$ tel que la fonction zêta partielle de $k$ :
$$\zeta_{p,e}(s) = \sum_{\mathfrak{A}, N\mathfrak{A}\equiv 1 (qp^e)} N\mathfrak{A}^{-s}$$
ait une valeur non p-entière en $s = 0$.

(ii) Si $R_p(k) \neq 0$, alors on a :
$$v_p(\zeta_{p,e}(0)) = v_p\big(\frac{1}{2}\rho_p(k)\big) + n_p(k) - e < 0,$$
pour tout $e \geq e_0 = v_p\big(p^{n_p(k)+1}\frac{1}{2}\rho_p(k)\big)$ ; on a en particulier :
$$R_p(k) \sim 4.\,2^{-[k:\mathbb{Q}]} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} N\mathfrak{p}\sqrt{D(k)}\; h(k)^{-1}p^{e-n_p(k)}\zeta_{p,e}(0),$$
pour tout $e \geq e_0$.

**Démonstration :** Prenons pour $F$ le corps $k(\mu_{qp^e})$, $e \geq n_p(k)$, qui est contenu dans le corps $k_S$ pour $S = S_p \cup S_\infty$, et considérons la fonction zêta partielle $\zeta_{S,F}(id, s)$, notée plus simplement $\zeta_{p,e}(s)$ ; la fonction $\zeta_{p,e}(s)$ est donc définie par $\sum_{\mathfrak{A}} N\mathfrak{A}^{-s}$, où la somme porte sur les idéaux entiers $\mathfrak{A}$ de $k$ tels que $(\frac{F/k}{\mathfrak{A}}) = id$, ce qui équivaut, par restriction à $L = \mathbb{Q}(\mu_{qp^e})$, à $(\frac{L/\mathbb{Q}}{N\mathfrak{A}}) = id$ ; or le groupe d'Artin de $L/\mathbb{Q}$ est précisément :
$$\{(a), a > 0, a \equiv 1 \bmod qp^e\}.$$

Si $R_p(k) = 0$, on sait qu'en particulier $\zeta_{p,e}(0)$ est $p$-entière. Si $R_p(k) \neq 0$, $\zeta_{p,e}(s)$ est susceptible du cas (i) de (0.3), et la valuation du dénominateur de $\zeta_{p,e}(0)$ ($n = 1$) est
$$\mathrm{Max}\,\Big(0, v_p\Big(\frac{[F:k]}{\rho_p(k)}\Big)\Big) \;;$$

or $[F:k]=\varphi(qp^e)p^{-n_p(k)}\sim qp^{e-1-n_p(k)}$, et on obtient :

$$\mathrm{Max}\ \Big(0, v_p\Big(\frac{2p^{e-n_p(k)}}{\rho_p(k)}\Big)\Big).$$

Il suffit alors d'imposer la relation $\frac{2p^{e-n_p(k)}}{\rho_p(k)}\sim p$ (i.e. $e_0=v_p\big(p^{n_p(k)+1}\frac{1}{2}\rho_p(k)\big)\big)$ pour définir une valeur $e_0$ de $e$ à partir de laquelle $\zeta_{p,e}(0)$ est non $p$-entière ; on a ensuite :

$$\frac{1}{2}\rho_p(k)\sim p^{e-n_p(k)}\zeta_{p,e}(0),$$

pour tout $e\geq e_0$.

D'où le fait que la valuation de $\zeta_{p,e}(0)$ soit linéaire strictement décroissante par rapport à $e$, et strictement négative à partir de $e_0$.

Ceci précise complètement ce que l'on peut attendre au plan numérique.

Dans une direction en un sens opposée, on peut considérer la situation suivante :

Soit $\zeta_p(k,s)$ la fonction zêta $p$-adique de $k$ (égale à $\zeta_{S,k}(id,s)$ avec $S=S_p\cup S_\infty$, selon les notations du § 0), et soit $m_p$ l'ordre du caractère $\omega$ sur $G_S$ ($m_p$ est un diviseur pair de $p-1$ pour $p\neq 2$, et $m_2=2$) ; on peut alors énoncer :

(3.2) **Théorème :** Soit $k$ un corps de nombres totalement réel, et soit $p$ premier :

(i) On a $R_p(k)\neq 0$ si et seulement s'il existe $e\geq 0$ tel que $\zeta_p(k,1-\lambda m_p p^e)$ ne soit pas $p$-entière (condition indépendante du choix de $\lambda>0$).

(ii) Si $R_p(k)\neq 0$, alors on a :

$$v_p\big(\zeta_p(k,1-\lambda m_p p^e)\big)=v_p\big(\frac{1}{2}\rho_p(k)\big)-e<0,$$

pour tout $e\geq e_0=v_p\big(p\frac{1}{2}\rho_p(k)\big)$ ; on a en particulier :

$$R_p(k)\sim 4.\,2^{-[k:\mathbb{Q}]}\prod_{\mathfrak{p}\in S_p}N\mathfrak{p}\ \sqrt{D(k)}h(k)^{-1}p^e\zeta_p(k,1-\lambda m_p p^e),$$

pour tout $e\geq e_0$ et tout $\lambda>0$ étranger à $p$.

**Démonstration :** Prenons donc $F=k$, supposons $R_p(k)\neq 0$ et appliquons le théorème (0.3) avec $n=\lambda m_p p^e$, $\lambda>0$ étranger à $p$ ; alors $\omega^n$ est bien caractère de $F$ et la valuation du dénominateur de $\zeta_p(k,1-n)$ est

$$\mathrm{Max}\ \Big(0, v_p\big(\frac{n}{\rho_p(k)}\big)\Big)=\mathrm{Max}\ (0, e+v_p(2)-v_p(\rho_p(k))).$$

Ensuite, la valeur minimum $e_0$ de $e$ pour laquelle $\zeta_p(k,1-\lambda m_p p^e)$ est non $p$-entière vérifie la relation :

$$e_0-v_p\big(\frac{1}{2}\rho_p(k)\big)=1,$$

d'où $e_0$.

On a alors comme attendu :

$$\frac{1}{2}\rho_p(k) \sim p^e \zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e),$$

pour tout $e \geq e_0$, ce qui conduit au point (ii) du théorème.

(3.3) **Remarques :**

(i) En vertu de (1.2.2), on a, pour tout $n \equiv 0 \bmod m_p$ :

$$\zeta_p(k, 1-n) = \zeta(k, 1-n) \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} (1 - N\mathfrak{p}^{n-1}) \sim \zeta(k, 1-n) \ ;$$

on peut donc, dans (3.2), remplacer $\zeta_p(k)$ par $\zeta(k)$, ce qui signifie que, en pratique, les calculs de valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(k, s)$ peuvent suffire à la détermination de $v_p(h(k)R_p(k))$. En outre, seuls les entiers $n$ de la forme $\lambda m_p p^e$ peuvent donner des valeurs non $p$-entières pour $\zeta(k, 1-n)$.

(ii) On peut, sans difficulté, énoncer des formes mixtes de (3.1) et (3.2) en faisant intervenir à la fois un corps de rayon $F$ convenable et les valeurs, en des entiers négatifs convenables, des fonctions zêta partielles correspondantes.

(iii) L'énoncé (3.2) est à rapprocher de la proposition 4.2 de [K].

## Bibliographie

[B] Barsky, D., Fonctions zêta $p$-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, Groupe d'Etudes d'Analyse Ultramétrique, 1977-1978 ; errata 1978-1979.

[CN] Cassou-Noguès, P., Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta $p$-adiques, Invent. Math. 51 (1979) 29-59.

[C] Colmez, P., Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta $p$-adiques, Invent. Math. 91 (1988) 371-389.

[D-R] Deligne, P., Ribet, K.A., Values of abelian $L$-functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math. 59 (1980) 227-286.

[K] Kolster, M; Remarks on étale $K$-theory and Leopoldt's conjecture (1992), preprint.

[N] Nguyen Quang Do T., Analogues supérieurs du noyau sauvage (1992), à paraître.

[S] Serre, J.-P., Sur le résidu de la fonction zêta $p$-adique d'un corps de nombres, C.R. Acad. Sci., Série A, Paris 287 (1978) 183-188.

[Si] Siegel, C.L., Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Göttingen Nach. 3 (1970), 15-56.

Georges GRAS
Laboratoire de Mathématiques
URA - CNRS n°741
F - 25030 Besançon Cedex