JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Hugues BAUCHÈRE

Quelques remarques à propos d'un théorème de Checcoli

Tome 28, n° 3 (2016), p. 725-734.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2016__28_3_725_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **28** (2016), 725–734

Quelques remarques à propos d'un théorème de Checcoli

par Hugues BAUCHÈRE

Résumé. Dans [1], S. Checcoli montre, entre autres résultats, que si K est un corps de nombres et si L/K est une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G d'exposant fini, alors les degrés locaux de L sont uniformément bornés en toutes les places de K. Dans cet article nous rassemblons deux remarques à propos d'un analogue du résultat de S. Checcoli pour les corps de fonctions de caractéristique positive p. D'une part nous montrons un analogue de son théorème dans ce cadre, sous l'hypothèse que l'exposant du groupe de Galois soit premier à p. D'autre part, nous montrons à l'aide d'un exemple que cette hypothèse est en fait nécessaire.

Abstract. *Some remarks about a theorem of Checcoli.*
In [1], S. Checcoli shows that, among other results, if K is a number field and if L/K is an infinite Galois extension with Galois group G of finite exponent, then L has uniformly bounded local degrees at every prime of K. In this article we gather two remarks about an analogue of S. Checcoli's result to function fields of positive characteristic p. We first show an analogue of her theorem in this context, under the hypothesis that the Galois group exponent is prime to p. Using an example, we then show that this hypothesis is in fact necesary.

Introduction

Soient p un nombre premier et q une puissance de p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments et on pose $k := \mathbb{F}_q(T)$.

Soient K un corps global[1] et v une place de K. On note K_v le complété de K en v. On dit qu'une extension galoisienne L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en v s'il existe un entier d_v tel que pour toute place w de L au-dessus de v, le degré de l'extension local L_w/K_v soit au plus d_v. De manière plus générale, on dit que l'extension L/K a ses degrés locaux

Manuscrit reçu le 27 juillet 2015, révisé le 29 avril 2015, accepté le 12 octobre 2015.
Mathematics Subject Classification. 11S15, 11R32, 11R37.
Mots-clefs. Théorie de Galois, théorie du corps de classe local, ramification, extension abélienne.

[1] *i.e.* un corps de nombres ou une extension finie de k.

uniformément bornés en toutes (resp. en presque toutes[2]) les places de K s'il existe un entier d_0 tel que $d_v \leq d_0$ pour toutes (resp. presque toutes) les places v de K.

En 2013, S. Checcoli démontre (cf. [1]) que si K est un corps de nombres et si L/K est une extension galoisienne (éventuellement infinie) de groupe de Galois G, alors l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en toutes les places de K si et seulement si G est d'exposant fini (*i.e.* s'il existe un entier m tel que tout élément de G soit d'ordre au plus m). Plus précisément, S. Checcoli prouve le résultat suivant :

Théorème A. *Soit K un corps de nombres et L/K une extension galoisienne infinie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en toutes les places de K ;*
(2) *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en presque toutes les places de K ;*
(3) *le groupe de Galois de l'extension L/K est d'exposant fini.*

Ce résultat a ensuite été généralisé à certaines classes de corps de fonctions par S. Checcoli et P. Dèbes dans [2].

Une question naturelle est de savoir s'il existe un analogue du théorème A dans le cadre des corps de fonctions en caractéristique positive p. Dans cet article, on montre (partie 1) l'analogue partiel suivant du résultat de Checcoli.

Théorème B. *Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie. Si les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en presque toutes les places de K, alors* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *est d'exposant fini.*

Réciproquement, si $\mathrm{Gal}(L/K)$ *est d'exposant fini premier à la caractéristique de K, alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K.*

La démonstration de ce résultat suit exactement la même stratégie que celle de [1] pour les corps de nombres. Ce qui rend l'analogue partiel est l'introduction, dans la réciproque, de l'hypothèse sur l'exposant du groupe de Galois qui doit être premier à la caractéristique. En effet, on illustre (cf. partie 2) la nécéssité de cette hypothèse supplémentaire en exibant deux contre-exemples. Le premier (cf. théorème 2.1) étant celui d'une extension abélienne de $k := \mathbb{F}_q(T)$ dont le groupe de Galois est d'exposant p et dont tous les degrés locaux sont infinis au-dessus de toutes les places de k. Et le second (cf. proposition 2.2) est l'exemple d'une extension abélienne de k dont le groupe de Galois est d'exposant p et dont tous les degrés

[2] *i.e.* en toutes sauf un nombre fini.

locaux sur L sont uniformément bornés en toutes les places de k. Ces deux contre-exemples sont construits de façon explicite comme des compositum d'extensions d'Artin-Schreier *i.e.* de corps de décomposition de polynômes du type $X^p - X - a^{-i}$ où a parcourt l'ensemble des polynômes irrédutibles et unitaires de k et i parcourt l'ensemble des entiers non divisibles par p.

1. Analogue du théorème A en caractéristique positive

Afin de démontrer le théorème B, on rappelle tout d'abord la définition suivante.

Définition. Soit G un groupe. On dit que G est un *groupe métacyclique* s'il existe un sous-groupe normal H de G tel que H et G/H soient cycliques.

Remarque. Si G est un groupe métacyclique fini d'exposant b, alors G est d'ordre un diviseur de b^2.

On démontre maintenant le théorème B en reprenant la preuve exposé par S. Checcoli dans [1] et en lui apportant les modifications nécessaires dans notre cadre : celui d'une extension finie K de $k := \mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration du théorème B. Supposons que presque toutes les places de K aient leurs degrés locaux sur L bornés par $d_0 \in \mathbb{N}$. Soit S l'ensemble des places de K dont le degré local sur L n'est par borné par d_0. Alors, par hypothèse, S est un ensemble fini. Soient E/K une extension galoisienne finie incluse dans L et $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$. D'après le théorème de densité de Tchebotarev (cf. théorème 9.13A de [5]), il existe une place finie $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_K \setminus S$ non ramifiée sur E telle que σ appartient à la classe de conjugaison d'Artin de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Gal}(E/K)$ (rappelons que d'après le corollaire 3.5.5 de [6], comme l'extension E/K est séparable finie, presque toutes les places de K sont non ramifiées dans E). Ainsi, si $\mathfrak{q}$ est une place de E au-dessus de $\mathfrak{p}$, il existe un conjugué $\eta \in \mathrm{Gal}(E/K)$ de σ qui engendre le groupe de décomposition de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{p}$ qui est cyclique (d'après le théorème 3.8.2 de [6]) et isomorphe à $\mathrm{Gal}(E_\mathfrak{q}/K_\mathfrak{p})$, où $E_\mathfrak{q}$ et $K_\mathfrak{p}$ sont respectivement les complétés des corps E et K en $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$. Or, par hypothèse, l'ordre de $\mathrm{Gal}(E_\mathfrak{q}/K_\mathfrak{p})$ est au plus d_0, ainsi $\sigma^{d_0!} = \eta^{d_o!} = \mathrm{id}$ et donc $\mathrm{Gal}(E/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$. Comme $\mathrm{Gal}(L/K)$ est la limite projective de la famille $\{Gal(E/K)\}_E$ indexée par les extensions galoisiennes finies de K contenues dans L, le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Gal}(L/K)$ soit d'exposant fini $b \in \mathbb{N}$ premier à p, la caractéristique de K. écrivons L comme une réunion croissante d'extensions galoisiennes finies L_j/K de groupe de Galois G_j. Soit w une place de L, pour chaque j on note v_j l'unique place de L_j en-dessous de w et L_{j,v_j} le complété de L_j en la place v_j. De même, on note v l'unique place de K en-dessous de w et K_v le complété de K en la place v. On rappelle que pour tout j, le quotient du groupe de décomposition par le groupe d'inertie de v_j sur v est isomorphe au groupe de Galois des corps résiduels et qu'il est donc cyclique (engendré par le Frobenius). On rappelle également que le groupe $\mathrm{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est isomorphe au groupe de décomposition de v_j sur v qui est un sous-groupe de G_j. Donc $\mathrm{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est d'exposant un diviseur de b. De plus, comme b est premier à p, il ne peut y avoir de ramification sauvage. Il y a donc deux cas possibles pour l'extension $L_{j,v_j}/K_v$:

(1) si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est non ramifiée, alors, $\mathrm{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est cyclique d'ordre un diviseur de b ;
(2) si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est modérément ramifiée, alors d'après la proposition 3.8.5 de [6], le groupe d'inertie de v_j sur v est cyclique, tout comme le quotient du groupe de décomposition par le groupe d'inertie, ainsi $\mathrm{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est métacyclique et donc d'ordre un diviseur de b^2.

Pour tout j, le degré de l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est donc un diviseur de b^2. Ainsi, les degrés locaux $[L_{j,v_j} : K_v]$ forment une suite croissante d'entiers majorées par b^2. Cette suite est donc constante à partir d'un certain rang. Il en résulte qu'il existe i tel que $L_{j,v_j} = L_{i,v_i}$ pour $j \geq i$. Et alors L_w est inclus dans L_{i,v_i} d'où le résultat. $\square$

2. Un contre-exemple en caractéristique positive

Dans le théorème B, on a vu que si $\mathrm{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini premier à la caractéristique de K, alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K. Dans cette partie nous allons donner un contre-exemple dans le cas où l'exposant du groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ est divisible par p. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{F}_q[T]$. Alors l'ensemble $\mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{M}_k$ des places de $k := \mathbb{F}_q(T)$. Si $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$, on note $v_a : k \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée à a et k_{v_a} le complété de k en v_a. Si w est une place de K qui prolonge v_a, on normalise w par la formule $w(\alpha) = v_a(\alpha)$ pour tout $\alpha \in k$. On a donc :

$$w(K) = \frac{1}{e}\mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a.

Lemme 2.1. *Soient $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ et $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$. On pose :*

$$P_{a,i}(X) := X^p - X - a^{-i}.$$

Soit $\theta_{a,i} \in \overline{k}$ une racine de $P_{a,i}$. On a les propriétés suivantes :

(1) *toutes les racines de $P_{a,i}$ sont de la forme $\theta_{a,i} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;*

(2) *$w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z}$ pour toute place $w|v_a$ de $k(\theta_{a,i})$;*
(3) *le polynôme $P_{a,i}$ est irréductible sur k ;*
(4) *l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est totalement ramifiée au-dessus de a ;*
(5) *l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est cyclique de degré p ;*
(6) *$w(\theta_{a,i}) = 0$ pour tout $b \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\} \setminus \{a\}$ et toute place $w|v_b$ de $k(\theta_{a,i})$;*
(7) *l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de toutes les places de k différentes de a.*

Démonstration. La propriété 1 est évidente. Vérifions la propriété 2. Soit $w|v_a$ une place de $k(\theta_{a,i})$. On a :

$$w\left(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}\right) = v_a\left(a^{-i}\right) = -i$$

et

$$w\left(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}\right) \geq \min\{p\, w(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) < 0$. Donc la dernière inégalité est en fait une égalité et on en déduit que $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p}$. Or $p \nmid i$ donc $w(\theta_{a,i}) \notin \mathbb{Z}$ d'où la propriété 2.

Maintenant, on a $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a. On en déduit donc que $p|e$. Or, le polynôme $P_{a,i}$ étant de degré p, l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est au plus de degré p. Donc $e = p$, ce qui prouve que l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est totalement ramifiée au-dessus de a, d'où la propriété 4. Les propriétés 3 et 5 s'en déduisent naturellement. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer les propriétés 6 et 7.

$$w\left(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}\right) = v_b\left(a^{-i}\right) = 0$$

et

$$w\left(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}\right) \geq \min\{p\, w(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) = 0$ et donc l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de b. $\square$

Dorénavant, pour alléger les notations, pour tous $a, b \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, nous noterons encore v_a une extension arbitraire de v_a à $k(\theta_{b,i})$. Ainsi, nous aurons toujours :

$$v_a(\theta_{b,i}) = \begin{cases} -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z} & \text{si } b = a \\ 0 & \text{si } b \neq a \end{cases}.$$

Nous allons maintenant construire une p-extension abélienne élémentaire[3] dont le degré local est infini au-dessus d'une place quelconque a de k. Pour cela, nous aurons besoin de montrer que certaines extensions sont linéairement disjointes (cf. §2.5 de [4] pour ce qui concerne ces dernières) :

[3] *i.e.* une extension dont le groupe de Galois est isomorphe à un produit de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Lemme 2.2. *Soit $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$. Alors, l'ensemble :*

$$\Lambda_{a,v_a} := \left\{k_{v_a}(\theta_{a,i}) \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\right\}$$

forme une famille d'extensions deux à deux linéairement disjointes sur k_{v_a}.

Démonstration. L'élément a de $\mathcal{P}\cup\left\{\frac{1}{T}\right\}$ étant fixé, on simplifie les notations en posant $v := v_a$ et $\theta_i := \theta_{a,i}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$.

Soit $i, j \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $i \neq j$. Les extensions $k_v(\theta_i)/k_v$ et $k_v(\theta_j)/k_v$ étants galoisiennes, elles sont linéairement disjointes si $k_v(\theta_i) \cap k_v(\theta_j) = k_v$ (cf. remarque suivant le corollaire 2.5.2 de [4]). De plus, comme ces extensions sont de degré p premier, il suffit de montrer que $\theta_j \notin k_v(\theta_i)$.

Supposons que $\theta_j \in k_v(\theta_i)$. Il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in k_v$ non tous nuls tels que :

$$\theta_j = \alpha_0 + \alpha_1\,\theta_i + \cdots + \alpha_{p-1}\,\theta_i^{p-1}.$$

Or, $\theta_j^p = \theta_j + a^{-j}$ et :

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_0 + \alpha_1\,\theta_i + \cdots + \alpha_{p-1}\,\theta_i^{p-1}\right)^p \\ &\qquad\qquad = \alpha_0^p + \alpha_1^p\left(\theta_i + a^{-i}\right) + \cdots + \alpha_{p-1}^p\left(\theta_i + a^{-i}\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&a^{-j} + \alpha_0 + \alpha_1\,\theta_i + \cdots + \alpha_{p-1}\,\theta_i^{p-1} \\ &\qquad\qquad = \alpha_0^p + \alpha_1^p\left(\theta_i + a^{-i}\right) + \cdots + \alpha_{p-1}^p\left(\theta_i + a^{-i}\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Comme les éléments $1, \theta_i, \dots, \theta_i^{p-1}$ sont k_v-linéairement indépendants, les coefficients des puissances de θ_i sont égaux dans l'égalité précédente. Ainsi, en comparant les coefficients des monômes en θ_i^{p-1}, on obtient :

$$\alpha_{p-1} = \alpha_{p-1}^p,$$

d'où on déduit $\alpha_{p-1} \in \mathbb{F}_p$. En comparant les coefficients des monômes en θ_i^{p-2}, on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_{p-2} &= \alpha_{p-2}^p + \alpha_{p-1}^p\,(p-1)\,a^{-i} \\ &= \alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-1}\,a^{-i}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-2} - \alpha_{p-1}\,a^{-i} = 0.$$

On a donc deux possibilités : soit $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$, soit $\alpha_{p-1} \neq 0$ et $\alpha_{p-2} = \alpha_{p-1}\,\theta_i + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$. Or, $\theta_i \notin k_v$, donc $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$. De la même façon, on montre de proche en proche que $\alpha_{p-1} = \cdots = \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \in \mathbb{F}_p$. Il ne reste donc plus qu'à comparer les termes constants, *i.e.* :

$$\alpha_0 + a^{-j} = \alpha_0^p + \alpha_1^p\,a^{-i} = \alpha_0^p + \alpha_1\,a^{-i}.$$

D'où

$$\alpha_0^p - \alpha_0 - a^{-j} + \alpha_1\, a^{-i} = 0.$$

Deux cas s'offrent à nous :

(1) $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_0 = \theta_j + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;
(2) $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_0 = \theta_j - \alpha_1\, \theta_i + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$.

Dans le premier cas, on obtient $\theta_j \in k_v(\alpha_0)$. Ce qui est absurde car $\alpha_0 \in k_v$ et $\theta_j \notin k_v$.

Supposons que nous soyons dans le deuxième cas. Alors, comme $\alpha_1 \in \mathbb{F}_p$ et $\zeta \in \mathbb{F}_p$, on a :

$$v(\alpha_0) = \min\{v(\theta_i); v(\theta_j)\} = \min\left\{\frac{-i}{p}; \frac{-j}{p}\right\}.$$

Or, $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc $v(\alpha_0) \notin \mathbb{Z}$ ce qui contredit le fait que $\alpha_0 \in k_v$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les extensions $k_v(\theta_i)$ sont deux à deux linéairement disjointes. □

La proposition suivante nous donne un premier contre-exemple d'extension galoisienne infinie d'exposant fini ayant une place au-dessus de laquelle tous les degrés locaux sont infinis.

Proposition 2.1. *Soient $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ et L_a le compositum des corps de la famille*

$$\Lambda_a := \left\{k(\theta_{a,i}) \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\right\}.$$

Alors l'extension L_a est une p-extension abélienne infinie de k telle que pour toute place $w|v_a$ de L_a, l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ est une p-extension abélienne infinie.

Démonstration. Les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant abéliennes de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on en déduit que l'extension L_a est une p-extension abélienne de k. Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour toute place $w|v_a$ de L_a, l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ est infinie. En effet, la non finitude du degré de l'extension L_a/k découle directement de celle des degrés locaux au-dessus de a.

L'élément a de $\mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ étant fixé, on simplifie les notations en posant $v := v_a$ et $\theta_i := \theta_{a,i}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$.

Soit $(i_j)_{j>0}$ la suite d'entiers définie par $i_0 = 1$ et :

$$i_{n+1} = \begin{cases} i_n + 1 & \text{si } i_n + 1 \notin p\mathbb{N} \\ i_n + 2 & \text{si } i_n + 1 \in p\mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $n > 0$ un entier. Si pour tout entier $m > n$ on avait :

$$k_v(\theta_{i_1}, \ldots \theta_{i_n}) \cap k_v(\theta_{i_m}) \neq k_v,$$

alors on aurait, comme $[k_v(\theta_{i_m}) : k_v] = p$:

$$k_v(\theta_{i_1}, \dots \theta_{i_n}) \cap k_v(\theta_{i_m}) = k_v(\theta_{i_m}).$$

On aurait donc $k_v(\theta_{i_m}) \subset k_v(\theta_{i_1}, \dots \theta_{i_n})$ pour tout $m > n$. Ainsi, tous les corps $k_v(\theta_{i_m})$ seraient des corps entre k_v et $k_v(\theta_{i_1}, \dots \theta_{i_n})$. Mais il n'y a qu'un nombre fini de tels corps. Ce n'est donc pas possible car d'après le lemme 2.2, les extensions $k_v(\theta_{i_m})$ sont deux à deux disjointes. Donc pour tout entier $n > 0$ il existe un entier $m > n$ tel que :

$$k_v(\theta_{i_1}, \dots \theta_{i_n}) \cap k_v(\theta_{i_m}) = k_v.$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner le contre-exemple annoncé *i.e.* celui d'une extension galoisienne d'exposant finie dont tous les degrés locaux sont infinis au-dessus de toutes les places de k :

Théorème 2.1. *Soit L le compositum des corps de la famille*

$$\Lambda := \left\{ k(\theta_{a,i}) \,|\, a \in \mathcal{P} \cup \left\{ \frac{1}{T} \right\}, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N} \right\}.$$

Alors, L est une p-extension abélienne de k dont les degrés locaux sur L sont infinis au-dessus de toutes les places de k.

Démonstration. Comme L est un compositum d'extensions de degré p, c'est clairement une p-extension abélienne de k. Le fait que tous les degrés locaux sur L soient infinis au-dessus des places de k provient de la proposition 2.1. En effet, si $a \in \mathcal{P} \cup \left\{ \frac{1}{T} \right\}$, alors $L_a \subset L$. □

Nous terminons cette partie en donnant un exemple d'une extension galoisienne infinie de k dont le groupe de Galois est d'exposant divisible par la caractéristique de k et dont néanmoins les degrés locaux sont uniformément bornés.

Proposition 2.2. *Soient $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ et L_i le compositum des corps de la famille*

$$\Lambda_i := \left\{ k(\theta_{a,i}) \,|\, a \in \mathcal{P} \cup \left\{ \frac{1}{T} \right\} \right\}.$$

Alors, L_i est une p-extension abélienne infinie de k dont les degrés locaux sont uniformément bornés par p^2.

Démonstration. Les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant abéliennes de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on en déduit que l'extension L_i est une p-extension abélienne de k.

Montrons maintenant que l'extension L_i/k est infinie. Soient $n > 2$ un entier et $a_1, \dots, a_n$ des places deux à deux distincts de k. D'après le lemme 2.1, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, l'extension $k(\theta_{a_j,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de toutes les places de k différentes de a_j et totalement ramifiée au-dessus de a_j. Ainsi, l'extension $k(\theta_{a_n,i})/k$ est totalement ramifiée au-dessus de a_n, alors que l'extension $k(\theta_{a_1,i},\dots,\theta_{a_{n-1},i})/k$ est non ramifiée au-dessus de a_n comme composée de $n-1$ extensions non ramifiées au-dessus de a_n. On en déduit ainsi que les corps de la famille Λ_i sont linéairement disjoints sur k, et donc que le degré de l'extension L_i/k est infini.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que les degrés locaux sont uniformément bornés par p^2. Soient $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ et $L_{i\setminus a}$ le compositum des corps de la famille :

$$\Lambda_{i\setminus a} := \left\{ k(\theta_{b,i}) \,\middle|\, b \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\} \setminus \{a\} \right\}.$$

Alors L_i est le compositum de $k(\theta_{a,i})$ et de $L_{i\setminus a}$. Soit $w|v_a$ une place de L_i, on note encore w la restriction de w à $L_{i\setminus a}$. L'extension $k(\theta_{a,i})/k$ étant totalement ramifiée au-dessus de a, on a $[k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] = p$. D'autre part, l'extension $L_{i\setminus a}/k$ est une p-extension abélienne infinie qui est non ramifiée au-dessus de a. Or les extensions non ramifiées d'un corps local sont cycliques (cf. la proposition p. 113 de [3]) ce qui n'est pas le cas de l'extension $L_{i\setminus a,w}/k_{v_a}$ dès que $\left[L_{i\setminus a,w} : k_{v_a}\right] > p$ car c'est une p-extension abélienne. On obtient donc :

$$[L_{i,w} : k_{v_a}] \leq \left[L_{i\setminus a,w} : k_{v_a}\right] [k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] \leq p^2.$$

D'où le résultat annoncé. □

Remerciements

Je souhaite remercier Francesco Amoroso et Vincent Bosser mes directeurs de thèse ainsi que Bruno Anglès pour toutes les discussions que nous avons eus à propos de ce travail.

Bibliographie

[1] S. Checcoli, « Fields of algebraic numbers with bounded local degrees and their properties », *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013), nº 4, p. 2223-2240.

[2] S. Checcoli & P. Dèbes, « Tchebotarev theorems for function fields », to appear on Journal of Algebra, `http://arxiv.org/abs/1301.1815`, 2013.

[3] I. B. Fesenko & S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions*, second éd., Translations of Mathematical Monographs, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, With a foreword by I. R. Shafarevich, xii+345 pages.

[4] M. D. Fried & M. Jarden, *Field arithmetic*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Revised by Jarden, xxiv+792 pages.

[5] M. Rosen, *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 210, Springer-Verlag, New York, 2002, xii+358 pages.

[6] H. Stichtenoth, *Algebraic function fields and codes*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 2009, xiv+355 pages.

Hugues BAUCHÈRE
LMNO, CNRS UMR 6139,
Université de Caen - Campus Côte de Nacre
Boulevard Maréchal Juin,
B.P. 5186,
14032 Caen Cedex 5, France.
E-mail: hugues.bauchere@unicaen.fr