Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Sylvain MAUGEAIS

Quelques calculs d'espaces $\mathrm{R}^i f_* G$ sur des courbes

Tome 28, n[o] 2 (2016), p. 361-390.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2016__28_2_361_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **28** (2016), 361–390

Quelques calculs d'espaces $\mathrm{R}^i f_* G$ sur des courbes

par Sylvain MAUGEAIS

Résumé. Nous donnons quelques propriétés (nullité, représentabilité, stratification) des espaces $\mathrm{R}^i f_* G$ pour $f\colon \mathcal{U} \to S$ une courbe affine lisse possédant une compactification lisse et G un groupe résoluble.

Abstract. We give some properties (vanishing, representability, stratification, ...) of the spaces $\mathrm{R}^i f_* G$ for an affine relative curve $f\colon \mathcal{U} \to S$ having a smooth compactification and G a solvable group.

1. Introduction

Soient S un schéma, $h\colon \mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse et $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Notons $f\colon \mathcal{U} \to S$ le morphisme induit. Pour tout groupe fini abstrait G résoluble, nous calculons les faisceaux $\mathrm{R}^i f_* G$ pour $i \in \{1, 2\}$. Lorsque f est propre, on sait que ces faisceaux sont constructibles, nous nous placerons donc dans le cas où f est affine. D'autre part, si l'ordre de G est inversible sur S alors le calcul est classique et peut se traiter avec des méthodes habituelles (voir § 5 pour un exemple). Le premier cas intéressant pour nous est donc celui où S est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p divisant l'ordre de G, on a alors $\mathrm{R}^2 f_* G = 0$ et $\mathrm{R}^1 f_* G$ peut être décrit comme une limite inductive de faisceaux représentables (cf. [11]). Notre but est de généraliser ces résultats dans le cas relatif. En particulier, nous montrons le théorème suivant, qui constitue le cœur de la première partie de cet article (cf. théorème 3.6).

Théorème 1.1. *Soient S un schéma noethérien, $h\colon \mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse, et $j\colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{C}$ une immersion ouverte définie comme le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif telle que $f\colon \mathcal{U} \to S$ soit* affine. *Pour tout groupe abstrait fini G on a* $\mathrm{R}^2 f_* G = 0$.

Manuscrit reçu le 24 mars 2014, révisé le 15 décembre 2015, accepté le 18 décembre 2015.
Mathematics Subject Classification. 14F20, 14F17, 14H30.
Mots-clefs. Revêtements de courbes, Cohomologie étale, Espaces de modules.
Je remercie Laurent Moret-Bailly, Lorenzo Ramero, Michel Raynaud et Matthieu Romagny pour les conversations que j'ai pu avoir avec chacun d'eux pendant la préparation de cet article. Je remercie également le rapporteur pour ses nombreuses remarques et corrections, qui ont incontestablement amélioré la qualité de l'article.

En particulier, on trouve une généralisation du principe local-global de [14] en la suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_* G \to \mathrm{R}^1 f_* G \to h_* \mathrm{R}^1 j_* G \to \mathrm{R}^2 h_* G \to 0 \tag{1.1}$$

dont seule la surjectivité de la dernière flèche est nouvelle. Comme h est propre, les termes $\mathrm{R}^i h_* G$ sont assez bien maîtrisés, il convient donc de mieux comprendre $h_* \mathrm{R}^1 j_* G$.

Ce théorème se démontre par dévissage en se ramenant au cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'un des problèmes fondamentaux est alors de pouvoir traiter simultanément le cas p inversible ou nul sur S : si p est nul on montre habituellement que $\mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ en utilisant la suite exacte d'Artin-Schreier, mais si p est inversible c'est une conséquence du théorème de changement de base lisse. Pour contourner ce problème, l'outil principal utilisé ici est la suite exacte de déformation d'Artin-Schreier à Kummer introduite par Oort, Sekiguchi et Suwa dans [22]. Cette théorie permet dans un premier temps de se ramener, par une suite de dévissages cohomologiques, à des termes plus simples, et dans un deuxième temps de montrer que ces nouveaux termes sont de nature géométrique (i.e. des limites de faisceaux représentables), donnant ainsi une rigidification "représentable" des espaces $\mathrm{R}^i f_* G$. Nous pouvons alors conclure la preuve du théorème principal en utilisant la géométrie de ces espaces et les cas déjà connus.

La suite de l'article est dédiée à une description géométrique de l'espace $\mathrm{R}^1 f_* G$: nous construisons une stratification de cet espace, puis relions chacune des strates à un espace de modules de courbes équivariantes *via* un morphisme naturel, dont on prouve qu'il est un "isomorphisme à altération près", cf. la proposition 4.7.

Plus précisément, étant donné un groupe abstrait fini G et deux entiers g et g', considérons l'espace de modules $\mathcal{M}_{g,g'}[G]$ classifiant les courbes propres et lisses de genre g munies d'une action de G fidèle dans chaque fibre et dont le quotient par G est de genre g'. Notons $n = |G|((2g-2) - |G|(2g'-2))$ et considérons l'espace $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}$ qui classifie les courbes propres et lisses de genre g' munies d'un diviseur de Cartier relatif de degré n. En associant à chaque courbe équivariante son quotient muni du diviseur de branchement, on obtient un morphisme

$$\Phi \colon \mathcal{M}_{g,g'}[G] \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}.$$

Notons $\mathfrak{C}$ la courbe universelle au-dessus de $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}$ et $\mathfrak{B}$ le diviseur universel. Notons de plus $\mathfrak{f} \colon \mathfrak{C} \setminus |\mathfrak{B}| \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}$ le morphisme induit. On peut alors, à tout morphisme $S \to \mathcal{M}_{g,g'}[G]$, associer un G-torseur au-dessus de $(\mathfrak{C} \setminus |\mathfrak{B}|) \times_{\mathcal{M}_{g'}^{[n]}} S$, puis un morphisme $S \to [\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* G]$, ce dernier espace étant un analogue champêtre des $\mathrm{R}^1 f_* G$. On obtient ainsi un morphisme de champs $\Psi\colon \mathcal{M}_{g,g'}[G] \to [\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*G]$ dont l'image est par définition dans la strate $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*G]_{\mathfrak{g}=g}$ définie par la constance du genre (cf. section 4.2).

D'autre part, nous montrons que le morphisme Ψ est assez proche d'un isomorphisme : il possède presque toutes les caractéristiques d'une immersion fermée (cf. proposition 4.9) et possède même une section "à altération près" ; plus précisément nous montrons qu'il existe une altération $X \to [\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*G]_{\mathfrak{g}=g}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ \mathcal{M}_{g,g'}[G] \arrow[r] & {[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*G]_{\mathfrak{g}=g}} \end{tikzcd}$$

(cf. théorème 4.7).

On peut donc dire que $\mathcal{M}_{g,g'}[G]$ et $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*G]_{\mathfrak{g}=g}$ sont "égaux à altération près".

Dans la dernière partie de cet article nous utilisons les constructions précédentes pour retrouver simplement des résultats connus sur l'espace de modules des courbes équivariantes dans le cas modéré. Les applications au cas sauvage feront l'objet d'un travail futur.

2. Faisceaux de torseurs

Le but de cette section est de donner quelques résultats sur les torseurs et en particulier de généraliser des résultats de Harbater (cf. [11]) et de Katz (cf. [14]). Plus précisément, soit C une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, U un sous-schéma ouvert de C affine et G un groupe abstrait fini. L'un des buts de chacun de ces articles était de calculer l'ensemble $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(U, G)$ et de donner ainsi un principe local-global pour les revêtements.

Nous souhaitons ici généraliser ce résultat dans le cas d'une courbe relative $\mathcal{C} \to S$. Pour cela, l'un des instruments essentiels est la suite exacte de déformation d'Artin-Schreier à Kummer dont nous rappelons la théorie ci-après.

Dans toute la suite, lorsque les groupes ne sont pas commutatifs, les suites exactes de cohomologie sont à comprendre au sens non abélien, i.e. suites exactes de faisceaux d'ensembles pointés.

2.1. Rappels et notations. Dans toute la suite de cet article, S sera un schéma noethérien, $\mathrm{f}\colon X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathcal{G}$ un schéma en groupes lisse sur X. Pour $i \leq 2$, on peut alors définir des ensembles pointés $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{G})$, cf. [7]. Nous noterons $\mathrm{R}^i\mathrm{f}_*\mathcal{G}$ le faisceau sur le gros site étale $S_{\text{ét}}$ associé au préfaisceau

$$T \mapsto \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X \times_S T, \mathcal{G} \times_S T).$$

Proposition 2.1. *Supposons* f *propre et* $\mathcal{G}$ *constructible. Alors* $\mathrm{R}^i\mathrm{f}_*\mathcal{G}$ *est constructible pour* $i \in \{1,2\}$.

Démonstration. Pour $i = 1$, le résultat s'obtient de la même manière que dans le cas commutatif en se ramenant à des déformations de torseurs : c'est le théorème de changement de base propre (cf. [1, XIV, 1.1]).

Pour $i = 2$, on sait que $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \times_S T, \mathcal{G} \times_S T)$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \times_S T, Z(\mathcal{G} \times_S T))$ où $Z(\mathcal{G} \times_S T)$ désigne le centre de $\mathcal{G} \times_S T$ (cf. [7, Théorème IV.3.3.3]). Par suite, le faisceau $\mathrm{R}^2\mathrm{f}_*\mathcal{G}$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{R}^2\mathrm{f}_*Z(\mathcal{G})$. On se ramène donc au cas abélien pour lequel on peut utiliser le théorème de changement de base propre. $\square$

Il est alors possible d'appliquer les opérations classiques de la cohomologie. Nous nous contentons ici de donner les exemples qui nous serons utiles (cf. [7]).

Donnons-nous une suite exacte de schémas en groupes lisses sur S

$$1 \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H} \to 1$$

avec $\mathcal{H} \subset Z(\mathcal{G})$. Alors il existe une suite exacte de faisceaux d'ensembles pointés

$$\begin{aligned}(2.1)\quad 0 \to \mathrm{R}^0\mathrm{f}_*\mathcal{H} \to \mathrm{R}^0\mathrm{f}_*\mathcal{G} \to \mathrm{R}^0\mathrm{f}_*(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \to \mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{H} \\ \to \mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G} \to \mathrm{R}^1\mathrm{f}_*(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \to \mathrm{R}^2\mathrm{f}_*\mathcal{H} \to \mathrm{R}^2\mathrm{f}_*\mathcal{G} \to \mathrm{R}^2\mathrm{f}_*(\mathcal{G}/\mathcal{H})\end{aligned}$$

cf. [7, IV.4.2.10]. $\square$

Cette suite peut être utilisée pour l'étude des faisceaux de torseurs sous des groupes résolubles afin de se ramener à l'étude des torseurs sous des groupes cycliques.

Le dévissage sous forme de suite exacte comme ci-dessus est très pratique en théorie mais difficile à manipuler en pratique. Dans les faits, il est souvent plus utile d'avoir des caractérisations des extensions galoisiennes d'extensions galoisiennes qui sont elles-mêmes galoisiennes. Ceci est donné par la proposition suivante dans le cas de groupes constants.

Proposition 2.2. *Soit X un schéma, P et H des groupes abstraits finis, Y un P-torseur au-dessus de X et $Z \in \mathrm{H}^1_{ét}(Y,H)$ un H-torseur au-dessus de Y qui soit connexe.*

Alors Z est un $\mathrm{Aut}_X(Z)$*-torseur au-dessus de X si et seulement si $Z \in \mathrm{H}^1_{ét}(Y,H)^P$. De plus on a dans ce cas une suite exacte* $0 \to H \to \mathrm{Aut}_X(Z) \to P \to 0$ *et deux tels H-torseurs isomorphes au-dessus de Y induisent des torseurs isomorphes au-dessus de X sous un même groupe.*

En résumé, on a une application injective

$$\mathrm{H}^1_{ét}(Y,H)^P_0 \hookrightarrow \coprod_{\{0\to H\to G\to P\to 0\}/isom} \mathrm{H}^1_{ét}(X,G)$$

où $\mathrm{H}^1_{ét}(Y,H)^P_0$ *désigne l'ensemble des éléments connexes de* $\mathrm{H}^1_{ét}(Y,H)^P$.

Démonstration. Pour tout $\sigma \in P$, notons Z_σ le H-torseur au-dessus de Y obtenu par changement de base $\sigma\colon Y \to Y$ à partir de Z.

Supposons tout d'abord que $Z \to X$ est un $\mathrm{Aut}_X(Z)$-torseur. En particulier, on a un morphisme surjectif $\mathrm{Aut}_X(Z) \to P$. N'importe quel relèvement de σ dans $\mathrm{Aut}_X(Z)$ fournit alors un isomorphisme entre Z_σ et Z.

Réciproquement, supposons que $Z \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(Y,H)^P$. D'après [16, Lemma 2.8], il suffit de prouver que $Z \times_X Z$ est totalement décomposé. Comme $Y \to X$ est un P-torseur, on a un isomorphisme

$$Z \times_X Z \cong \coprod_{\sigma \in P} Z_\sigma \times_Y Z.$$

Par suite, il suffit de montrer que $Z_\sigma \times_Y Z$ est un produit de copies de Z. Or par hypothèse, Z et Z_σ sont isomorphes en tant que H-torseurs donc $Z_\sigma \times_Y Z \cong Z \times_Y Z \cong \coprod_{\tau\in H} Z$. Ce qui fournit le résultat annoncé. □

Donnons-nous maintenant un morphisme propre $h\colon \mathcal{C} \to S$ ainsi qu'une immersion ouverte $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ et notons $f\colon \mathcal{U} \to S$ le morphisme induit. On se fixe également un schéma en groupes commutatif $\mathcal{G}$ lisse sur S.

On a alors une suite exacte à 5 termes

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_*(j_*\mathcal{G}) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathcal{G} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathcal{G} \to \mathrm{R}^2 h_*(j_*\mathcal{G}) \to \mathrm{R}^2 f_*\mathcal{G} \tag{2.2}$$

obtenue en faisceautisant l'analogue de la suite exacte en bas degrés obtenue par la suite spectrale de Leray. Remarquons que cette suite admet un analogue dans le cas où $\mathcal{G}$ n'est pas abélien, mais son expression est plus compliquée (cf. [7, Chapitre V §3]).

Cette suite permet de décomposer $\mathrm{R}^1 f_*\mathcal{G}$ en un terme local $h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathcal{G}$ et en termes globaux, elle est l'un des outils fondamentaux utilisés par Harbater (cf. [11]) et Katz (cf. [14]) lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos. La suite exacte ci-dessus doit être vue comme un principe local-global. Il est toutefois complètement différent de celui de Bertin et Mézard dans [2] car il ne dit rien sur les déformations infinitésimales de courbes (les déformations infinitésimales de torseurs affines étant triviales).

2.2. La suite exacte d'Artin-Schreier à Kummer et quelques conséquences. Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés de la théorie de la déformation d'Artin-Schreier à Kummer (cf. [22]) et donnerons quelques conséquences, la plus importante pour nous étant la proposition 2.7.

Dans toute la suite, nous fixons un nombre premier p et un anneau de valuation discrète R_0 de caractéristiques $(0,p)$ contenant une racine primitive p-ième de l'unité ζ, et notons $\lambda = \zeta - 1$. On a alors $\lambda^{p-1} = up$ avec u inversible dans R_0.

Pour tout R_0-schéma X plat et noethérien, et tout $\mu \in R_0$ non nul dans l'idéal maximal de R_0, notons $\mathscr{G}_X^{(\mu)} = X \times_{R_0} \operatorname{Spec}\left(R_0\left[x, \frac{1}{\mu x+1}\right]\right)$. On peut alors munir $\mathscr{G}_X^{(\mu)}$ d'une structure de schéma en groupes en utilisant la loi $a \star b = \mu ab + a + b$. Sa partie en caractéristique 0 est alors isomorphe à $\mathbb{G}_m$ et celle en caractéristique p à $\mathbb{G}_a$.

Notons i_μ l'immersion $X \times_{R_0} \operatorname{Spec} R_0/(\mu) \to X$. On a une suite exacte pour la topologie étale, et donc exacte sur le petit site *fppf* de X,

$$0 \to \mathscr{G}_X^{(\mu)} \to \mathbb{G}_m \to i_{\mu *}\mathbb{G}_m \to 0. \tag{2.3}$$

Toutefois, dans le cas du gros site, cette suite n'est plus exacte car la première flèche n'est pas injective en général. Il convient donc de la remplacer par la suite suivante, qui est exacte sur le gros site étale de X

$$0 \to \mathscr{F}_X \to \mathscr{G}_X^{(\mu)} \to \mathbb{G}_m \to i_{\mu *}\mathbb{G}_m \to 0. \tag{2.4}$$

où $\mathscr{F}_X$ est un schéma en groupes dont le support est en caractéristique p.

On définit ensuite un morphisme de groupes $\psi : \mathscr{G}_X^{(\lambda)} \to \mathscr{G}_X^{(\lambda^p)}$ par $x \mapsto \frac{(\lambda x+1)^p - 1}{\lambda^p}$, qui est bien défini car $\lambda^{p-1} = up$. On voit alors que ψ est fidèlement plat et que son noyau est étale isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui prouve en particulier que ψ est surjective étale car fidèlement plat à fibres étales. On a ainsi une suite exacte sur le gros site étale de X (cf. [22, Ch I, 2.2.4])

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathscr{G}_X^{(\lambda)} \to \mathscr{G}_X^{(\lambda^p)} \to 0 \tag{2.5}$$

dont la fibre spéciale s'identifie à la suite exacte d'Artin-Schreier et la fibre générique à la suite exacte de Kummer.

Appliquons cette théorie dans notre cas. Pour cela, considérons un R_0-schéma S, une courbe propre et lisse $h \colon \mathcal{C} \to S$ et un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ qui est le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Notons $j \colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ l'inclusion et $i_\mu \colon \mathcal{U} \times_{R_0} \operatorname{Spec} R_0/(\mu) \to \mathcal{U}$. Regardons tout d'abord la cohomologie de $\mathbb{G}_m$:

Lemme 2.3. *On a*

$$\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{G}_m = (\mathrm{R}^1 j_*) i_{\mu *}\mathbb{G}_m = 0 = (\mathrm{R}^2 j_*\mathbb{G}_m)_{tors} = ((\mathrm{R}^2 j_*) i_{\mu *}\mathbb{G}_m)_{tors}.$$

Démonstration. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \times_{R_0} \operatorname{Spec} R_0/(\mu) \arrow[r, "i_\mu"] \arrow[d, "j_\mu"'] & \mathcal{U} \arrow[d, "j"] \\
\mathcal{C} \times_{R_0} \operatorname{Spec} R_0/(\mu) \arrow[r, "\bar{\imath}_\mu"] & \mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

Comme i_μ et $\bar{\imath}_\mu$ sont des immersions fermées, $i_{\mu *}$ et $\bar{\imath}_{\mu *}$ sont exacts et on a des identifications canoniques venant de la suite spectrale de Leray

$$(\mathrm{R}^\ell j_*) i_{\mu *} \mathbb{G}_m = \mathrm{R}^\ell (j \circ i_\mu)_* \mathbb{G}_m = \bar{\imath}_{\mu *} \mathrm{R}^\ell j_{\mu *} \mathbb{G}_m$$

pour tout ℓ. Par suite, la nullité de $(\mathrm{R}^\ell j_*) i_{\mu *} \mathbb{G}_m$ est impliquée par celle de $\mathrm{R}^\ell j_{\mu *} \mathbb{G}_m$.

Le résultat concernant les termes de degré 1 est un résultat de trivialité de faisceaux inversibles. Pour le montrer, on peut supposer que S est local égal à $\operatorname{Spec} A$, et nous noterons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Comme le résultat est local sur $\mathcal{C}$, on peut remplacer ce dernier par un schéma local affine $\operatorname{Spec} B$ et $\mathcal{U}$ par $\operatorname{Spec} B[\frac{1}{b}]$ où b est un élément régulier de B. On se ramène alors à montrer le fait suivant.

Fait 2.4. *Avec les notations ci-dessus on a* $\mathrm{H}^1_{ét}(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_q) = 0$ *pour n'importe quel entier* $q > 0$.

Preuve du fait. Notons k le corps résiduel du point fermé s de S. Comme $B[\frac{1}{b}] \otimes_A k$ est un corps, tout module localement libre sur $\mathcal{U}_s$ est en fait trivial.

Si on suppose A artinien, on peut alors montrer que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_q) = 0$ en utilisant la suite exacte sur le gros site étale de $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} B[\frac{1}{b}]$

$$0 \to \mathfrak{m}^r \otimes \mathbb{G}_a^{q^2} \to \mathrm{GL}_q \to \mathrm{GL}_q \otimes A/\mathfrak{m}^r \to 0 \tag{2.6}$$

et en raisonnant par récurrence sur r car $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} B[\frac{1}{b}], \mathbb{G}_a) = 0$ puisque $\mathbb{G}_a$ est cohérent. On voit de plus que le relevé d'une base modulo $\mathfrak{m}$ d'un module M localement libre est une base de M.

Dans le cas général, donnons nous un $B[\frac{1}{b}]$-module M localement libre. Alors il existe une base $\omega_1, \ldots, \omega_q$ de $B[\frac{1}{b}] \otimes_A k$-module car ce dernier est libre d'après le cas d'un corps. Soit $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_q$ un relèvement de $\omega_1, \ldots, \omega_q$ dans M. Il s'agit de prouver que $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_q$ est une base de M.

Le choix de $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_q$ permet de définir un morphisme $B[\frac{1}{b}]^q \to M$ et, notant $\widehat{B[\frac{1}{b}]}$ le complété de $B[\frac{1}{b}]$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, le passage à la limite du cas artinien permet de voir que $B[\frac{1}{b}]^q \otimes_{B[\frac{1}{b}]} \widehat{B[\frac{1}{b}]} \to M \otimes_{B[\frac{1}{b}]} \widehat{B[\frac{1}{b}]}$ est un isomorphisme. On conclut alors sur le fait que M est libre par descente fidèlement plate. $\square$

Regardons maintenant les termes de degré 2. D'après [17, Thm. III.3.9] (cf. également l'exemple III.3.4 de op.cit. pour passer à la complétion qui n'est pas de présentation finie en général), on peut remplacer S par le spectre d'un anneau local complet A à corps résiduel algébriquement clos d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $\mathcal{C}$ par $\operatorname{Spec} A[[x]]$ et $\mathcal{U}$ par $\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}]$ où b est une fonction régulière modulo $\mathfrak{m}$.

Si A est un corps alors la nullité provient de l'étude du groupe de Brauer des corps locaux (cf. [23, chapitre X.7]). Si A est artinien, la nullité de $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}], \mathbb{G}_m)$ se démontre *via* la suite exacte (2.6) comme ci-dessus.

Dans le cas général (complet), on a un morphisme canonique

$$\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}], \mathbb{G}_m) \to \varprojlim_r \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}], \mathbb{G}_m)$$

dont il semble difficile de montrer l'injectivité. Toutefois, d'après [6, Theorem II.1], le morphisme induit sur les parties de torsions s'identifie à

$$\operatorname{Br}(\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}]) \to \varprojlim_r \operatorname{Br}(\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}]),$$

Br désignant le groupe de Brauer.

Pour montrer l'injectivité de ce morphisme, nous suivons la preuve de [9, Lemme 3.3], en l'adaptant à notre cas.

Soit donc $\mathcal{A} \in \operatorname{Br}(\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}])$ une algèbre d'Azumaya dont l'image dans la limite projective est triviale. On peut la considérer comme un élément de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}], \mathrm{PGL}_q)$ pour un certain entier $q > 0$.

Or, pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{H}^i\left((\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}], \mathbb{G}_m\right) = 0$ si $i = 1$ (cf. fait 2.4) ou $i = 2$ (cf. début de la présente preuve). La suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_q \to \mathrm{PGL}_q \to 0$$

permet alors de voir que

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}], \mathrm{PGL}_q) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}], \mathrm{GL}_q) = 0$$

la dernière égalité provenant du fait 2.4.

Par suite, il existe un $(A/\mathfrak{m}^r)[[x]]$-module libre W_r tel que

$$\mathcal{A} \otimes A/\mathfrak{m}^r \cong \operatorname{End}(W_r \otimes_{A[[x]]} A[[x]][\frac{1}{b}]). \tag{2.7}$$

et on peut choisir des isomorphismes $W_r \to W_{r+1} \otimes (A/\mathfrak{m}^r)\,[[x]]$ compatibles avec ceux de (2.7) car cela revient seulement à choisir des bases. Nous noterons W la limite projective des W_r de sorte que

$$\operatorname{End}\left(W \otimes_{A[[x]]} \varprojlim_r \left((A/\mathfrak{m}^r)[[x]][\frac{1}{b}]\right)\right) \cong \varprojlim_r \mathcal{A} \otimes A/\mathfrak{m}^r.$$

On montre alors que $\mathcal{A} \cong \operatorname{End}_{A[[x]][\frac{1}{b}]}(W \otimes_{A[[x]]} A[[x]][\frac{1}{b}])$ en relevant dans $\mathcal{A}$ une base de $\operatorname{End}(W_1)$ et en concluant par descente fidèlement plate comme dans la preuve ci-dessus pour les termes de degrés 1. $\square$

Lemme 2.5. *Supposons S noethérien et considérons le schéma en groupes $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ définit dans la suite* (2.4)*. Alors, avec les notations ci-dessus, on a*

$$\mathrm{R}^1 j_* \mathscr{F}_{\mathcal{U}} = \mathrm{R}^2 j_* \mathscr{F}_{\mathcal{U}} = 0$$

Démonstration. Si $\mu = 0$ dans S on a $\mathscr{F}_{\mathcal{U}} = \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)} \cong \mathbb{G}_a \times \mathcal{U}$. Le résultat découle alors de la nullité de la cohomologie de $\mathbb{G}_a$ sur les schémas affines.

Comme S est noethérien et que $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ est à support dans le sous-schéma fermé défini par p il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathscr{F}_{\mathcal{U}} = v_{n*} v_n^* \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ où v_n est l'immersion fermée $\mathcal{U} \times R_0/\mu^n \to \mathcal{U}$. On conclut alors par récurrence en utilisant la suite exacte

$$0 \to \mu^\ell \mathbb{G}_a \otimes_{R_0} R_0/(\mu^{\ell+1}) \to v_{\ell+1,*} \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \to v_{\ell *} \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \to 0$$

et la nullité de la cohomologie de $\mu^\ell \mathbb{G}_a \otimes_{R_0} R_0/(\mu^{\ell+1})$. □

Nous pouvons alors conclure sur la cohomologie de $\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)}$ en utilisant la suite exacte (2.4).

Corollaire 2.6. *Supposososns S noethérien. On a*

$$\mathrm{R}^1 j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)} = (\mathrm{R}^2 j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)})_{tors} = 0.$$

Démonstration. Notons $\mathscr{G}'$ le noyau du morphisme $\mathbb{G}_m \to i_{\mu *} \mathbb{G}_m$ de sorte qu'on a deux suites exactes

$$0 \to \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \to \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)} \to \mathscr{G}' \to 0$$

et

$$0 \to \mathscr{G}' \to \mathbb{G}_m \to i_{\mu *} \mathbb{G}_m \to 0.$$

En appliquant le foncteur j_* à ces deux suites et en utilisant les lemmes 2.3 et 2.5, on voit qu'il suffit, pour avoir le résultat, de montrer que le morphisme de faisceaux $j_* \mathbb{G}_m \to j_* i_{\mu *} \mathbb{G}_m$ est surjectif. D'après [17, Theorem III.3.9 et Example III.3.4], on peut supposer que $S = \operatorname{Spec} A$ avec A local complet, $\mathcal{C} = \operatorname{Spec} A[[x]]$ et $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A[[x]][\frac{1}{b}]$ avec b distingué. Le résultat est alors un corollaire du théorème de préparation de Weierstrass qui permet de caractériser les inversibles de $A[[x]][\frac{1}{b}]$ comme étant les éléments de la forme ab^q avec $q \in \mathbb{Z}$ et a inversible dans $A[[x]]$, et une caractérisation similaire pour les inversibles de $(A/(\mu))[[x]][\frac{1}{b}]$. □

Nous pouvons maintenant passer à la cohomologie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition 2.7. *Supposons S noethérien. On a deux suites exactes pour la topologie étale*

$$0 \to h_*\Big((j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda)}\Big) \to h_*\Big((j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)}\Big) \to h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0, \tag{2.8}$$

$$h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0. \tag{2.9}$$

Démonstration. En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite (2.5) par application du foncteur j_* on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} \to j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^1 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)}$$

dont le dernier terme est nul d'après le corollaire précédent.

En particulier, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} \arrow[r] & j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \arrow[r] & \mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent fournit alors la suite exacte

$$(2.10) \qquad 0 \to (j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda)} \to (j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0.$$

Les faisceaux présents dans cette suite étant à support fini sur S (le support est dans $\mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$ qui est le support d'un diviseur de Cartier relatif), on obtient la suite exacte (2.8) en appliquant le foncteur h_* qui est exact sur ces faisceaux (cf. [17, Lemma III.3.10]). $\square$

La suite exacte (2.9) provient de la suite spectrale de Leray

$$\mathrm{R}^\ell h_* \mathrm{R}^m j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{R}^{\ell+m} f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

et d'un argument de dégénérescence *via* le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Si S est un R_0-schéma noethérien, on a*

$$\mathrm{R}^3 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathrm{R}^2 h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathrm{R}^1 h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathrm{R}^2 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0.$$

Démonstration. On a $\mathrm{R}^3 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ pour des raisons de dimension cohomologique (cf. [17, Corollary VI.2.5]).

La suite exacte (2.10) permet de voir que $\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est à support de dimension relative nulle sur S (car dans $\mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$), donc $\mathrm{R}^\ell h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ pour tout $\ell > 0$.

La suite exacte longue associée à la suite exacte (2.5) nous donne

$$\mathrm{R}^1 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^2 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)}.$$

Mais comme $\mathrm{R}^2 j_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est de torsion, on a en fait une suite exacte

$$\mathrm{R}^1 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^2 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathrm{R}^2 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})_{tors}.$$

Or on a vu que $\mathrm{R}^1 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} = 0$ et $(\mathrm{R}^2 j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})_{tors} = 0$. $\square$

3. Représentabilité et description

Nous souhaitons dans ce chapitre montrer la représentabilité des faisceaux $\mathrm{R}^i f_* G$ par des limites inductives d'espaces algébriques, puis d'en déduire l'annulation de certains de ces espaces.

Dans un second temps, nous généralisons ces constructions au-dessus de champs algébriques.

3.1. Rigidification des $\mathbf{R}^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{f}_* \mathbb{Z}/\boldsymbol{p}\mathbb{Z}$. Nous allons maintenant introduire un espace proche de ce que devrait être l'espace $h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si ce dernier était représentable, nous utiliserons en particulier les objets introduits dans la section 2.2, et plus précisément ceux apparaissant dans la suite exacte (2.8).

Dans toute la suite on se fixe un anneau de valuation discrète R_0 de caractéristique $(0, p)$ contenant une racine primitive p-ième ζ de l'unité. On notera de plus $\lambda = \zeta - 1$.

Définition 3.1. Soient $\mathcal{S}$ un R_0-espace algébrique, $\mu \in R_0$ un élément non nul de l'idéal maximal, $h \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse, et $j : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Nous noterons $\mathscr{T}_\mu(f)_{loc} = h_* \left((j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)}) / \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\mu)} \right)$.

En particulier, on a un morphisme $\mathscr{T}_\lambda(f)_{loc} \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc}$ déduit de la section 2.2.

Il existe un morphisme canonique

$$\mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc} \to h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

qui est un épimorphisme pour la topologie étale d'après la suite exacte (2.8).

La fibre en caractéristique nulle du faisceau $\mathscr{T}_\mu(f)_{loc}$ est localement isomorphe à une somme de copies de $\mathbb{Z}$ tandis que sa fibre en caractéristique p est localement isomorphe à une somme de copies de $\varinjlim_n \mathbb{A}^n$, ce qui interdit toute représentabilité par un espace ayant de bonnes propriétés. Toutefois, il est possible de le dominer par une limite inductive d'espaces lisses. En effet, on a la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit $\mu \in R_0$ un élément non nul de l'idéal maximal. Pour tout point $Q \in \mathcal{S}$ il existe un voisinage $\mathcal{S}_Q \subset \mathcal{S}$ de Q et un épimorphisme sur le gros site étale de $\mathcal{S}_Q$*

$$T \to \mathscr{T}_\mu(f|_{f^{-1}(\mathcal{S}_Q)})_{loc}$$

où T est une limite inductive d'espaces algébriques de type fini et lisses sur $\mathcal{S}_Q$.

Démonstration. Quitte à faire un changement de base étale, on peut supposer que $\mathcal{S}$ est en fait un schéma.

Pour tout point $P \in f^{-1}(Q) \cap \mathcal{B}$, choisissons

(1) une uniformisante ϖ de $\mathcal{B}_P$
(2) une $\mathcal{O}_{\mathcal{S},P}$-base $(\bar{\beta}_i)_{i \in I}$ de $(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})/\mathcal{O}_{\mathcal{C}})_P$, qui existe car $\mathcal{B}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{S},Q}$-plat,
(3) pour chaque $i \in I$ un relèvement $\beta_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})_P$.

D'autre part, les β_i et ϖ sont définies sur un voisinage $\mathcal{U}_P$ de P et, quitte à restreindre $\mathcal{U}_p$, on peut supposer quelles vérifient les propriétés *1-2-3* pour tout point de $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}_P$.

Pour tout entier $m \geq 0$, on définit un morphisme au-dessus de $\mathcal{S}_P = f(\mathcal{U}_P) \subset \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta_P^{[m]}\colon & \left(\mathscr{G}_{\mathcal{S}_P}^{(\mu)}\right)^{I \times [\![-m,m]\!]} & \to & h_*\left(\left(\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)}/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\mu)}\right)_{\mathcal{U}_P}\right) \\ & (a_{i,j})_{i \in I, -m \leq j \leq m} & \mapsto & \bigstar_{i,j}\left(a_{i,j}\beta_i\varpi^j\right) \end{array}$$

le produit $\bigstar$ étant pris au sens de $\mathcal{G}^{(\mu)}$. Une étude locale permet de voir que $\delta_P = \varinjlim_m \delta_P^{[m]}$ est un épimorphisme. On en déduit que l'homomorphisme $\bigoplus_{P \in f^{-1}(Q) \cap \mathcal{B}} \delta_P$ induit un épimorphisme sur $h_*\left(\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\mu)}/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\mu)}\right)$ au-dessus de $\mathcal{S}_Q = \bigcap_{P \in f^{-1}(Q) \cap \mathcal{B}} \mathcal{S}_P$. □

Nous allons maintenant introduire une version "globale" de $\mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc}$ en utilisant le morphisme $\mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et le morphisme de localisation $\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ provenant de la suite exacte (2.2).

Définition 3.3. Soient $\mathcal{S}$ un R_0-espace algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. On note

$$\mathscr{T}_{\lambda^p}(f) = \mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times_{h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc}.$$

On a alors une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f) \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc} \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{3.1}$$

provenant de la suite exacte (2.2) par produit fibré. D'autre part, comme h est propre, $\mathrm{R}^i h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est constructible pour tout $i \geq 0$.

Proposition 3.4. *On a une suite exacte pour la topologie étale*

$$0 \to \mathscr{T}_{\lambda}(f)_{loc} \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0.$$

Démonstration. La suite exacte (2.8) se réécrit

$$0 \to \mathscr{T}_{\lambda}(f)_{loc} \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0.$$

Il suffit alors de la tirer en arrière par le morphisme

$$\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \qquad \square$$

Dire que le morphisme $\mathscr{T}_{\lambda^p}(f) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme revient à dire que si on se donne un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseur on peut l'écrire localement sous la forme $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t$.

D'autre part, deux morphismes $T \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)$ sont égaux si et seulement s'ils correspondent localement à des torseurs $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t_1$ et $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t_2$ avec $t_1 - t_2$ n'ayant pas de pâles (i.e. on ne prend pas de quotients supplémentaires).

Nous pouvons maintenant donner une première application de ces résultats. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 3.5. *Soit $\psi\colon E \to F$ un morphisme de faisceaux étales sur une base S. Supposons que*

(1) pour tout point géométrique $s \to S$, $\psi(s)$ est surjectif ;
(2) E est une limite inductive de schémas lisses ;
(3) F est constructible.

Alors ψ est un épimorphisme de faisceaux étales.

Démonstration. On peut supposer que S est strictement hensélien et se restreindre à montrer que l'application induite $E(S) \to F(S)$ est surjective. Notons s le point fermé de S, fixons $\alpha \in F(S)$ et notons α_s l'image de α dans $F(s)$. D'après *(1)*, il existe un relèvement β_s de α_s dans $E(s)$. Utilisant *(2)*, écrivons $E = \varinjlim_{\ell\in L} E_\ell$ où les E_ℓ sont représentables par des schémas lisses sur S. Il existe alors $\ell \in L$ tel que $\beta_s \in E_\ell(s)$. Comme $E_\ell \to S$ est un schéma lisse et que S est strictement hensélien, β_s peut se relever en un élément $\beta \in E_\ell(S)$.

Finalement, comme $\psi(\beta)$ et α ont α_s pour image dans $F(s)$, et que F est constructible d'après *3.*, on a $\psi(\beta) = \alpha$. $\square$

Théorème 3.6. *Soient S un schéma noethérien et $f\colon \mathcal{U} \to S$ un morphisme affine qui est le complémentaire dans une courbe propre et lisse du support d'un diviseur de cartier relatif. Pour tout groupe abstrait fini G on a $\mathrm{R}^2 f_* G = 0$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après la suite exacte (2.9), il suffit de montrer que le morphisme $h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme. En particulier, on peut supposer que S est local. Si p est inversible sur S, le résultat découle du théorème de changement de base lisse, on peut donc supposer que $\mathcal{O}_S$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre locale. On peut de plus supposer que S contient une racine primitive p-ième ζ de l'unité quitte à faire un changement de base fini, ce qui ne change pas le résultat car de tels morphismes sont exacts d'après [17, Corollary II.3.6]. Le schéma S est alors un schéma au-dessus de $R_0 = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta]$. En particulier il existe un épimorphisme $T \to \mathscr{T}_{\lambda^p}(f)_{loc}$ avec T limite inductive de schémas lisses de type fini d'après la proposition 3.2. Celui-ci induit un épimorphisme $T \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'après la proposition 2.7.

Considérant le diagramme commutatif dont la première ligne est exacte

$$\begin{tikzcd} h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^2 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\ T \arrow[u] \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

on se ramène à montrer que $T \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme. D'autre part, le morphisme $h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est surjectif au niveau des points géométriques car $\mathrm{R}^2 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ en chaque point (car f est affine). Par suite, il en est de même du morphisme $T \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $T \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme. Comme T est ind-représentable par des schémas lisses et que $\mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est constructible, on trouve que $T \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme de faisceaux étales d'après le lemme 3.5.

Dans le cas où G est quelconque, d'après [7, Théorème IV.3.3.3], il suffit de montrer que $\mathrm{R}^2 f_* Z(G) = 0$, on peut donc supposer que G est abélien. Le résultat découle alors du cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en utilisant la suite (2.1). ☐

Corollaire 3.7. *Reprenons les notations ci-dessus. Pour tout sous-groupe p-cyclique $H \subset Z(G)$ on a des suites exactes*

$$0 \to h_*\mathrm{R}^1 j_* H \to h_*\mathrm{R}^1 j_* G \to h_*\mathrm{R}^1 j_*(G/H) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{R}^1 f_* H \to \mathrm{R}^1 f_* G \to \mathrm{R}^1 f_*(G/H) \to 0$$

Démonstration. Cela découle de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to H \to G \to G/H \to 0,$$

du théorème 3.6 qui montre que $\mathrm{R}^2 f_* H = 0$ et du lemme 2.8 qui assure que $\mathrm{R}^2 j_* H = 0 = \mathrm{R}^1 h_*\mathrm{R}^1 j_* H$. ☐

3.2. Généralisation aux champs algébriques. Notre but est ici de généraliser aux champs algébriques les constructions faites dans 2.1 et dans la section ci-dessus.

Définition 3.8. Soit $\mathrm{f}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme représentable de champs algébriques et G un groupe abstrait fini. Notons $[\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}]$ le groupoïde sur $\mathcal{S}$ dont la fibre au-dessus d'un schéma T est la catégorie dont

- les objets sont les couples $(\alpha,\ \xi)$ avec $\alpha\colon T \to \mathcal{S}$ et $\xi \in \mathrm{H}^0(T, \mathrm{R}^1\mathrm{f}_{T*}G)$ où f_T est obtenu de f changement de base ;

- les morphismes $(\alpha, \xi) \to (\alpha', \xi')$ sont les isomorphismes $\alpha \to \alpha'$ qui envoient ξ sur ξ'.

Lorsque $\mathcal{S}$ est un espace algébrique, on retrouve le faisceau $\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}$ comme défini précédemment.

Le groupoïde $[\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}]$ doit être vu comme un espace de module grossier “partiel” associé à $\mathrm{f}_*[\mathcal{X}/\mathcal{G}]$ qui vit au-dessus de $\mathcal{S}$. En particulier, on a un morphisme de $\mathcal{S}$-groupoïdes

$$\mathrm{f}_*[\mathcal{X}/\mathcal{G}] \to [\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}].$$

Le groupoïde $[\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}]$ est en fait un champ (ceci provient du fait qu'on considère le faisceau $\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}$). Par contre, même sous des hypothèses très restrictives, il n'est pas algébrique. Le problème fondamental est que le faisceau des automorphismes d'un objet n'est pas représentable en général.

Comme $[\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*\mathcal{G}]$ n'est pas *a priori* représentable, on ne peut pas parler de séparation. Par contre, on peut vérifier le critère valuatif de séparation.

Proposition 3.9. *Soit G un groupe abstrait fini. Si* f *est lisse, le morphisme* $[\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*G] \to \mathcal{S}$ *vérifie le critère valuatif de séparation.*

Démonstration. Donnons nous un anneau de valuation R au-dessus de $\mathcal{S}$ de corps de fractions K et un morphisme $\phi\colon \mathrm{Spec}\, K \to [\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*G]$.

Supposons que ϕ puisse s'étendre en un morphisme $\tilde{\phi}\colon \mathrm{Spec}\, R \to [\mathrm{R}^1\mathrm{f}_*G]$. Par suite, il existe un morphisme étale surjectif $T \to \mathrm{Spec}\, R$ tel que $\tilde{\phi} \otimes T$ représente un G-torseur $\mathcal{V}$ au-dessus de $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} T$.

Comme T est un schéma normal, car étale au-dessus de $\mathrm{Spec}\, R$, $\mathcal{V}$ est la normalisation de $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} T$ dans $\mathcal{V} \times_S \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Frac} T)$. En particulier il est déterminé de manière unique par ϕ.

Par descente étale, cela montre que $\tilde{\phi}$ est l'unique extension possible de ϕ à $\mathrm{Spec}\, R$. □

Lorsque $\mathcal{S}$ est d'égale caractéristique et que f est le complémentaire dans une courbe lisse d'un diviseur de Cartier relatif, il est possible de donner une bonne description des points géométriques.

Proposition 3.10. *Soient $\mathcal{S}$ un champ algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Si l'entier p est premier à toutes les caractéristiques résiduelles de $\mathcal{S}$ alors $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable au-dessus de $\mathcal{S}$.*

Si le champ $\mathcal{S}$ est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p, alors les points géométriques de $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ sont les points d'une limite inductive de schémas dans la catégorie des faisceaux : l'espace de modules formels de Harbater.

Démonstration. Par descente, on se ramène au cas où $\mathcal{S}$ est un espace algébrique. Comme h est propre, les faisceaux $\mathrm{R}^i h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont représentables d'après la proposition 2.1. Utilisant la suite (2.2) on se ramène à montrer que $h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est représentable. Par suite la première partie est classique (voir la section 5), la deuxième est démontrée par Harbater dans [11, Theorem I.2].

Lorsque f est affine, le problème fondamental pour la représentabilité de $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est qu'il n'y a qu'une déformation à isomorphisme près d'un torseur au-dessus d'un schéma affine. Si $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ était représentable, il serait donc formellement étale sur $\mathcal{S}$, or on voit avec l'espace de modules formels de Harbater que ce n'est pas le cas (cf. [11, Theorem 1.2]). $\square$

4. Extensions de torseurs et courbes équivariantes

Le but de ce chapitre est de comparer les espaces de torseurs introduits précédemment à des espaces de modules de courbes équivariantes.

Dans un premier temps, nous donnons quelques résultats préliminaires, en particulier une propriété d'extensions de morphismes de torseurs en morphismes entre courbes lisses. Nous passons ensuite à quelques propriétés du genre des courbe affines, ce qui nous permet de définir une stratification des espaces $[\mathrm{R}^1 f_* G]$ pour un groupe constant fini G. Pour finir, nous comparons les strates obtenues à des espaces de modules de courbes.

4.1. Extension de morphismes et de torseurs. Nous souhaitons caractériser les courbes affines relatives qui possèdent une compactification lisse, cf. théorème 4.3. Plus précisément, étant donné une courbe propre et lisse $\mathcal{C} \to S$, un ouvert $\mathcal{U} \subset S$ qui soit le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif, et $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ un G-torseur, nous souhaitons savoir quelles sont les conditions à imposer sur ces données afin que $\mathcal{V} \to S$ possède une compactification (équivariante) lisse.

Un première condition nécessaire est que les compactifications lisses des fibres géométriques de $\mathcal{V} \to S$ doivent, localement sur S, être de même genre. Il se trouve que c'est également une condition suffisante, au moins si on s'autorise une altération de la base S, i.e. la donnée d'un schéma réduit S' et d'un morphisme $S' \to S$ surjectif et génériquement fini.

En effet, même lorsque S est le spectre d'un corps, il est parfois nécessaire de faire une extension (cf. toutefois §5 pour une étude du cas modéré). À titre d'exemple, considérons un corps k non parfait de caractéristique p, $a \in k \setminus k^p$ et V le revêtement de $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ donné par $y^p - y = \frac{a}{x^p}$. La normalisation de $\mathbb{P}^1$ dans le corps des fractions de V est donnée par $u^p - x^{p-1}u = a$ qui n'est pas lisse au-dessus de $x = 0$. Toutefois, il va exister une compactification lisse sur $k(\sqrt[p]{a})$.

Ici, le problème principal vient en fait du cas où S est non réduit. En effet, les déformations infinitésimales d'un torseur étale au-dessus d'un schéma affine sont toutes isomorphes, alors qu'il existe en général des déformations infinitésimales de courbes propres qui ne le sont pas.

C'est ce phénomène qui explique que l'exemple ci-dessus ne peut pas se redescendre à k : l'anneau $k(\sqrt[p]{a}) \otimes_k k(\sqrt[p]{a})$ n'étant pas réduit, on ne peut pas utiliser l'unicité de la compactification pour redescendre la courbe lisse par descente finie plate.

Ainsi, lorsqu'elle existe, la compactification lisse n'a aucune raison d'être unique : si c'est le cas pour un corps, ce n'est déjà plus vrai pour des anneaux artiniens. Toutefois, si S' est normal, la compactification lisse est unique à unique isomorphisme près car elle s'obtient par normalisation de $\mathcal{C} \times_S S'$ dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{V} \times_S S'$. Le cas S' réduit quelconque semble plus difficile, le problème principal venant du fait que pour une courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S$, le schéma des automorphismes $\mathrm{Aut}_S(\mathcal{D})$ est parfois ramifié sur S, au moins si le genre est < 2 (cf. [5, Theorem 1.11]).

Il est possible de prouver l'unicité de la compactification lorsqu'un morphisme fini vers une courbe lisse est fixé, c'est l'objet du corollaire 4.2. Avant cela, nous avons besoin d'une proposition précisant la géométrie du schéma des automorphismes.

Étant donné un diagramme de S-schémas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr] & \mathcal{C} \arrow[d] & \mathcal{D}_2 \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[dl] \\ & S, & \end{tikzcd}$$

nous noterons $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ le foncteur sur la catégorie des S-schémas définit par

$$\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)(T) = \mathrm{Isom}_{\mathcal{C}\times_S T}(\mathcal{D}_1 \times_S T, \mathcal{D}_2 \times_S T).$$

En particulier, on voit que le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est naturellement l'image réciproque par le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) & \to & \mathrm{Hom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}) \\ \phi & \mapsto & \pi_2 \circ \phi \end{array}$$

de la section définie par π_1.

Proposition 4.1. *Soit S un schéma, $\mathcal{C} \to S$ une courbe projective lisse et pour $i \in \{1, 2\}$, $\pi_i \colon \mathcal{D}_i \to \mathcal{C}$ des S-morphismes finis entre courbes lisses, séparables dans chaque fibre au-dessus de S. Le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est représentable par un schéma $\mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ fini et non ramifié sur S.*

Démonstration. Tout d'abord, comme $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{C}$ sont projectives sur S, on voit que $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{C})$ et $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ sont des schémas quasi-projectifs sur S d'après [10, 4.c]. On en déduit que $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \subset \mathrm{Isom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est représentable par un schéma quasi-projectif sur S d'après la description donnée ci-dessus comme image réciproque de π_1.

Montrons qu'il est à fibres finies sur S. Pour cela, on peut supposer que S est le spectre d'un corps. Les corps de fonctions de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont alors finis sur le corps de fonctions de $\mathcal{C}$, il n'existe donc qu'un nombre fini d'isomorphismes.

Par suite, il suffit de montrer que $\mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est propre et non ramifié sur S. Pour ce qui est de la propreté, il suffit de vérifier le critère valuatif car on sait déjà qu'il est de présentation finie. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation. Par suite, si on a un isomorphisme à la fibre générique, on peut l'étendre de manière unique car $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les normalisations de $\mathcal{C}$ dans leur corps de fonctions.

Passons maintenant à la non ramification. Pour cela, on peut supposer que S est le spectre d'un anneau artinien A de corps résiduel algébriquement clos, que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ et qu'on a $\phi \in \mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1)$ qui est l'identité modulo un élément $\epsilon \in A$ annulé par l'idéal maximal de A.

Notons D_1 la fibre spéciale de $\mathcal{D}_1$. Utilisant la théorie des déformations des courbes comme dans [5, Theorem 1.11], on voit que ϕ définit un élément $\chi \in \mathrm{H}^0(D_1, \Omega_{D_1}^{\vee})$. Soit $\mathfrak{p} \in D_1$ un point en lequel le morphisme π_1 est étale. Comme ϕ est un $\mathcal{C}$-morphisme, on trouve que χ possède un zéro en $\mathfrak{p}$. Le morphisme π_1 étant génériquement étale, le champ de vecteur χ s'annule sur un ensemble dense. Il s'ensuit que $\chi = 0$ et donc $\phi = Id$. □

Corollaire 4.2. *Soit S un schéma noethérien* ***réduit*** *excellent, $\mathcal{C} \to S$, $\mathcal{D}_1 \to S$ et $\mathcal{D}_2 \to S$ trois courbes projectives et lisses, $\pi_1 \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}$ et $\pi_2 \colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{C}$ deux revêtements finis tels que leur lieu de branchement soit contenu dans le support d'un diviseur de Cartier relatif $B \subset \mathcal{C}$. En particulier, on suppose que π_1 et π_2 sont génériquement séparables dans chaque fibre au-dessus de S. Notons $\mathcal{V}_i = \pi_i^{-1}(\mathcal{C} \setminus B)$ et donnons nous un $\mathcal{C}$-isomorphisme $\phi\colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ au-dessus de $\mathcal{C} \setminus B$. Alors ϕ s'étend en un* ***unique*** *$\mathcal{C}$-isomorphisme $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$.*

Démonstration. Il s'agit de construire une section $S \to \mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ induisant ϕ.

Supposons dans un premier temps que S est le spectre d'un corps ou bien le spectre d'un anneau de valuation, ou plus généralement que S est normal. Alors le résultat est trivialement vrai car ϕ induit un isomorphisme sur les normalisations de $\mathcal{C}$ dans les corps de fractions de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$, et comme celles-ci sont $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ on obtient le résultat.

Revenant au cas général, notons S_{gen} la réunion disjointe des points génériques de S. Par suite, d'après le cas des corps, il existe une unique section $S_{gen} \to \mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ induisant ϕ au-dessus de S_{gen}. Notons Z l'adhérence schématique de cette section dans $\mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ (la structure de schéma étant la structure réduite). Il s'agit de voir que $Z \to S$ est un isomorphisme.

Comme $\mathrm{Isom}_S^{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \to S$ est fini et non ramifié d'après la proposition 4.1, il en est de même de $Z \to S$.

D'autre part, en utilisant le cas normal, on voit que $Z \to S$ est injectif au niveau ensembliste. Par suite, comme il est également non ramifié et propre, c'est une immersion fermée, et comme il est dominant et que S est réduit, c'est un isomorphisme. □

Théorème 4.3. *Soit S un schéma noethérien, G un groupe abstrait fini, $\mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse de genre g', $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif et $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ un G-torseur étale. Supposons que*

i) les fibres géométriques de $\mathcal{V} \to S$ sont connexes ;
ii) il existe un entier g tel que pour tout point géométrique $\bar{s} \to S$, l'unique complétion lisse de $\mathcal{V}_{\bar{s}}$ est de genre g.

Alors il existe une altération $S' \to S$ (i.e. un morphisme surjectif génériquement fini) et une unique *courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S'$ contenant $\mathcal{V} \times_S S'$ comme sous-schéma ouvert telle qu'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D} \arrow[d] \\ \mathcal{U} \times_S S' \arrow[r] & \mathcal{C} \times_S S'. \end{tikzcd}$$

Il est possible de démontrer assez simplement ce théorème lorsque les courbes sont de genre ≥ 2 car la compactification est alors unique lorsqu'elle existe. La démonstration se déroule en effet de la manière suivante : après avoir construit une compactification projective avec le théorème de Nagata et le lemme de Chow, on se ramène à des courbes stables après une altération grâce à [13, Theorem 2.4]. La constance du genre des fibres géométriques assure alors que chacune des fibres est composée d'une seule composante irréductible, et que celle-ci est lisse.

Démonstration. Dans tous les cas, l'unicité provient du corollaire 4.2. Si S est le spectre d'un corps, le résultat est direct, même s'il demande une éventuelle extension du corps de base.

Si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, le résultat provient de [22, Lemma IV.2.3].

Passons maintenant au cas général. Quitte à remplacer S par l'une de ses composantes irréductibles munies de la structure réduite, on peut supposer que S est intègre de point générique η.

Considérons le morphisme $\mathcal{M}_{g,g'}[G] \to \mathcal{M}_{g'}$ induit par $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}/G$ (cf. l'introduction de la section 4.3).

Par définition, la courbe $\mathcal{C} \to S$ définit un morphisme $S \to \mathcal{M}_{g'}$ et, notant η le point générique de S, le cas d'un corps traité ci-dessus permet de prouver l'existence d'une extension K' de $k(\eta)$ sur laquelle la compactification de $\mathcal{V} \times_\eta \operatorname{Spec} K'$ est définie. On a alors un morphisme $\operatorname{Spec} K' \to S \times_{\mathcal{M}_{g'}} \mathcal{M}_{g,g'}[G]$ et nous noterons S' son adhérence schématique. Par hypothèse, $S' \to S$ est dominant. Comme S est irréductible, il suffit de prouver que $S' \to S$ est propre, et comme S est noethérien, il suffit même de montrer que $S' \to S$ vérifie le critère valuatif de propreté, mais celui-ci est une conséquence du cas d'un anneau de valuation discrète (traité ci-dessus) et de l'unicité de la compactification qui découle du corollaire 4.2. $\square$

4.2. Stratification par le genre. Soient S un schéma et $\mathcal{V} \to S$ un morphisme lisse à fibres géométriquement connexes de dimension 1. Pour tout point $s \in S$, nous noterons $\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}(s)$ le genre de l'unique compactification lisse de $\mathcal{V}_{\bar{s}}$, où $\bar{s}$ est un point géométrique au-dessus de s. Cet entier ne dépend en fait que de s et commute à tout changement de base $S' \to S$.

Proposition 4.4. *Supposons que S est un schéma noethérien, excellent et de dimension finie, alors l'application $\mathfrak{g}_{\mathcal{V}} \colon S \to \mathbb{N}$ est constructible.*

Démonstration. Comme l'image d'un ensemble constructible par un morphisme de type fini de schémas est constructible, on peut remplacer S par son normalisé sans en changer la dimension car il est excellent. On peut donc supposer S normal et intègre de point générique η. D'autre part, quitte à faire une extension finie de S, on peut supposer que $\mathcal{V}_\eta$ possède une compactification lisse. Choisissons une compactification $\mathcal{D} \to S$ de $\mathcal{V}$, qui existe d'après Nagata. En particulier, on peut la choisir normale, ce qui assure que la fibre générique de $\mathcal{D} \to S$ est lisse car on a supposé que $\mathcal{V}_\eta$ possède une compactification lisse, de sorte que celle-ci est automatiquement $\mathcal{D}_\eta$.

D'après [8, Proposition IV.17.7.11], le lieu S' des points $s \in S$ où $\mathcal{D}_s \to \operatorname{Spec} k(s)$ est lisse est constructible, et on voit que $\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}$ est localement constant sur cet ensemble car c'est le cas du genre de $\mathcal{D}$. On peut alors répéter cette construction sur $S \setminus S'$ qui est de codimension > 0. Comme S est noethérien de dimension finie, on obtient le résultat après un nombre fini d'étapes. $\square$

En particulier, pour tout entier $g \in \mathbb{N}$, nous pouvons considérer le sous-schéma $S_{\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}=g}$ composé des points s de S pour lesquels $\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}(s) = g$. En effet, comme S est noethérien et $S_{\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}=g}$ est constructible, ce dernier est une réunion finie d'ensembles localement fermés. On peut donc le munir d'une structure de schéma en considérant sa structure réduite. On prendra toutefois garde au fait que ce schéma ne commute pas au changement de base quelconque car la structure réduite n'a ici rien de canonique.

Dans les faits, nous devrons utiliser cette construction pour un groupoïde qui est limite inductive de champs algébriques noethériens. Le fait que ce soit un groupoïde ne pose pas de problème car l'application $\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}$ commute aux changements de base. On généralise alors aisément la construction ci-dessus au cas de la limite inductive.

Nous donnons maintenant quelques propriétés de la fonction $\mathfrak{g}$.

Proposition 4.5. *Reprenons les notations précédentes et supposons S noethérien. Soient η un point de S et s une spécialisation de η. Alors*

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{V}}(s) \leq \mathfrak{g}_{\mathcal{V}}(\eta).$$

Démonstration. On peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, les points η et s étant ses points générique et fermé. Quitte à faire une extension finie de S, on peut de plus supposer que la compactification normale de chaque fibre est lisse. Par suite, on peut choisir une compactification $\mathcal{D}$ de $\mathcal{V}$ telle que ce dernier est dense dans chaque fibre. Si on suppose de plus $\mathcal{D}$ normal alors il est Cohen-Macaulay d'après le critère de Serre, et sa fibre spéciale est réduite. On voit alors que la caractéristique d'Euler de la fibre spéciale est plus petite que celle de sa normalisée. Le résultat provient alors de la constance de la caractéristique d'Euler dans les familles projectives lisses (cf [15, Proposition 5.3.28]). □

4.3. Un morphisme entre espaces de modules de courbes. Soient g un entier et G un groupe abstrait fini. Nous noterons $\mathcal{M}_g[G]$ l'espace de modules des courbes propres et lisses de genre g munies d'une action de G fidèle dans chaque fibre (cf. par exemple [24]).

Soient $\mathcal{D} \to S$ une telle courbe et H un sous-groupe de G. Dans [21], Samuel montre que le quotient $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$ commute aux changements de base quelconques et que $\mathcal{D}/H \to S$ est une courbe propre et lisse (voir aussi [3] pour une autre preuve). Par suite, le genre du quotient $\mathcal{D}/H$ est localement constant, il est donc naturel de s'intéresser aux champs algébriques $\mathcal{M}_{g,g'}[H \subset G]$ des courbes propres et lisses de genre g telles que le quotient par H est de genre g'. On obtient ainsi une décomposition

$$\mathcal{M}_g[G] = \coprod_{g'} \mathcal{M}_{g,g'}[H \subset G]$$

en sous champs ouverts et fermés.

Dans la suite, nous fixerons un sous-groupe distingué $H \lhd G$ et noterons $\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]$ afin de conserver visuellement l'information. La formation du quotient étant ici fonctorielle, on obtient un morphisme $\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to \mathcal{M}_{g'}[G/H]$ défini par $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$.

Supposons que $\mathcal{D}/H$ soit de genre constant g' et notons B le diviseur de branchement du morphisme quotient $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$. Alors B est un diviseur de Cartier relatif et la formule de Hurwitz montre qu'il est de degré $n = |H|((2g-2) - (2g'-2)|H|)$ et que sa formation commute aux changements de base.

Notons $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$ l'espace de modules des courbes de genre g' munies d'une action de G/H fidèle dans chaque fibre, et d'un diviseur de Cartier relatif G/H-équivariant de degré n (cf. [20, Corollaire II.1.2.4] pour l'algébricité de $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}$, celle de $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$ s'en déduit par un argument semblable à celui de [24, Lemme 1.4]).

D'après ce qui a été dit précédemment on a un morphisme

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] & \to & \mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H] \\ & & (\mathcal{D} \to S) & \mapsto & (\mathcal{D}/H \to S, B). \end{array}$$

Les fibres de Φ sont les “déformations non obstruées” de [18] et l'espace tangent relatif de ce morphisme possède une interprétation simple en termes de déformations infinitésimales, et dont l'expression passe par une généralisation du principe local-global (infinitésimal) de Bertin et Mézard obtenu dans [2]. En effet, soit k un corps, $D \to \operatorname{Spec} k$ une courbe propre et lisse munie d'une action fidèle de G et telle que le quotient $C = D/H$ soit de genre g'. Notons $\pi\colon D \to C$ le morphisme quotient et $\mathrm{H}^i_G(D, \Omega^\vee_{D/k})$ la cohomologie équivariante du faisceau tangent. On a une suite exacte provenant de la suite spectrale associée au foncteur dérivé de $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \pi^H_* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^0_G(D, \mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{H}^1_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^1_G(D, \Omega^\vee_{D/k}) \\ &\to \mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_G(D, \Omega^\vee_{D/k}). \end{aligned}$$

Le terme $\mathrm{H}^1_G(D, \Omega^\vee_{D/k})$ classifie les déformations G-équivariantes du premier ordre de D. Le terme $\mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi^H_*\Omega^\vee_{D/k})$ classifie les déformations H-équivariantes locales dont l'image doit être nulle dans $\mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k})$ afin de définir une déformation globale.

Les termes $\mathrm{H}^i_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k})$ peuvent s'interpréter en terme de déformations G/H-équivariantes de C munie de son sous-schéma fermé B, définit ici comme le conoyau de l'homomorphisme de faisceaux $\pi^H_*\Omega^\vee_{D/k} \to \Omega^\vee_{C/k}$. Ce schéma est une version “réduite” du diviseur de branchement, mais il ne commute pas au changement de base quelconque en général, voir toutefois le chapitre 5.

On a donc une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}^0_{G/H}(C, \mathcal{O}_B) \to \mathrm{H}^1_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^1_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k}) \\ &\qquad \to \mathrm{H}^1_{G/H}(C, \mathcal{O}_B) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k}) \end{aligned}$$

dans laquelle le terme $\mathrm{H}^1_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k})$ correspond aux déformations G/H-équivariantes de C et $\mathrm{H}^2_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k})$ correspond aux obstructions à la déformations G/H-équivariantes de C.

Finalement, le terme $\mathrm{H}^0_{G/H}(C, \mathcal{O}_B)$ correspond aux déformations équivariantes du diviseur de branchement. On peut donc préciser l'espace tangent relatif du morphisme Φ.

Proposition 4.6. *L'espace tangent relatif du morphisme*

$$\Phi\colon \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$$

en un point correspondant à une courbe D s'identifie naturellement avec le noyau du morphisme

$$\mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi^H_*\Omega^\vee_{D/k}),$$

l'espace source classifiant les déformations locales *H-équivariantes qui sont invariantes sous l'action de G/H.*

Cette proposition reformule le fait que les déformations induites de B et de C sont nulles dans l'espace tangent relatif.

4.4. Lien avec un espace de torseur et rigidification. Considérons une courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S$ munie d'une action de G fidèle dans chaque fibre et notons B le diviseur de branchement du morphisme $\pi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$. Alors le morphisme $\mathcal{D} \setminus |\pi^{-1}(B)| \to (\mathcal{D}/H) \setminus |B|$ est étale et définit donc un H-torseur qui est invariant sous l'action de G/H d'après la proposition 2.2.

Notons $\mathfrak{h} : \mathfrak{C} \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$ la courbe universelle, $\mathfrak{B}$ le diviseur universel sur cette courbe et $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{C}\setminus|\mathfrak{B}| \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$. La construction ci-dessus définit un morphisme naturel

$$\Psi\colon \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to [\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*H]^{G/H}.$$

D'autre part, comme H agit trivialement sur $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*H]$ par construction, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H \arrow[d] \\
& {[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*H]^{G/H}}
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{M}_{g,g'}[H\lhd G]/\!\!/H$ désigne le 2-quotient obtenu en quotientant les groupes d'automorphismes par le sous-groupe distingué H (cf. [20, §I.3] pour plus de précisions).

Par définition, l'image de Ψ tombe dans la strate $\mathfrak{g} = g$ de la stratification définie par le genre (cf. §4.2). Il convient toutefois de préciser ce que cela signifie car $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*H]$ n'est pas représentable en général : soit

$$M \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$$

une présentation lisse et f le morphisme obtenu de $\mathfrak{f}$ par changement de base.

Pour tout M-schéma S, on définit $\left(\mathrm{R}^1 f_* H\right)_{\mathfrak{g}=g}(S)$ comme le sous-ensemble de $\mathrm{R}^1 f_* H(S)$ composé des éléments qui sont localement des torseurs V pour lesquels la fonction associée $\mathfrak{g}_V$ est constante égale à g (cf. a section 4.2) et tels que $V \to S$ est géométriquement connexe. Ce sous-ensemble est bien définit car les fonctions $\mathfrak{g}_V$ commutent à tout changement de base.

On définit ainsi un faisceau sur le gros site étale au-dessus de M

$$S \mapsto \left(\mathrm{R}^1 f_* H\right)_{\mathfrak{g}=g}(S).$$

On peut alors définir $[\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]_{\mathfrak{g}=g}$ par descente à partir de $\left(\mathrm{R}^1 f_* H\right)_{\mathfrak{g}=g}$.

Si on regarde la restriction du morphisme Ψ aux caractéristiques premières à $\mathrm{card} H$ on sait que $[\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]^{G/H}$ est représentable par un champ algébrique et on peut même montrer que Ψ est une immersion fermée. Nous y reviendrons dans le chapitre 5.

Notons $[\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]^{G/H}_G$ le sous-champ de $[\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]^{G/H}$ classifiant les H-torseurs $V \to U$ invariants sous G/H, qui sont géométriquement intègres sur S et tels que le groupe des automorphismes de $V \to U/(G/H)$ soit G (cf. proposition 2.2).

Théorème 4.7. *Pour tout morphisme* $S \to \left([\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]^{G/H}_G\right)_{\mathfrak{g}=g}$ *il existe une altération* $S' \to S$ *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \arrow[r] & \left([\mathrm{R}^1 \mathfrak{f}_* H]^{G/H}_G\right)_{\mathfrak{g}=g} \end{tikzcd}.$$

Démonstration. Oubliant l'action de G, c'est un corollaire de 4.3. Il s'agit alors de construire l'action de G. Toutefois, d'après la proposition 2.2, l'action de G existe sur les torseurs. On peut alors l'étendre grâce au corollaire 4.2. $\square$

Ainsi, but et source de Ψ sont isomorphes "à altération près".

Il est possible d'obtenir plus d'informations sur le morphisme Ψ dans certains cas particuliers. Pour fixer les idées, nous allons supposer que $H = G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le cas H plus général semblant difficile à atteindre, et allons montrer que, dans ce cas, le morphisme Ψ se comporte presque comme une immersion fermée. La stratégie repose sur le lemme ci-dessous.

Pour tout schéma X et pour tout point géométrique $x\colon \mathrm{Spec}\, k \to X$ nous noterons $T_{X,x}$ l'image réciproque de x par l'application $X(\mathrm{Spec}\, k[\epsilon]/(\epsilon^2)) \to X(\mathrm{Spec}\, k)$.

Lemme 4.8. *Soient Y un schéma localement noethérien et $f: X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors f est une immersion fermée si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

i) pour tout corps algébriquement clos k, l'application induite sur les k-points $X(\operatorname{Spec} k) \to Y(\operatorname{Spec} k)$ est injective ;
ii) le morphisme f vérifie le critère valuatif de propreté ;
iii) pour tout point géométrique $x: \operatorname{Spec} k \to X$ l'application $T_{X,x} \to T_{Y,f(x)}$ est injective.

Les hypothèses de ce lemme sont énoncées sous une forme se prêtant à leur vérification sur des foncteurs, comme ce sera le cas dans la proposition 4.9.

Démonstration. Le sens direct est évident. Réciproquement, d'après la propriété *ii*), le morphisme f est propre. La propriété *i*) impose alors que f induit une bijection entre X et un sous-schéma fermé de Y. Il s'agit de montrer que le morphisme induit sur les faisceaux est surjectif.

La propriété *iii*) permet de voir que l'espace tangent relatif de f est nul en chaque point, ce qui montre en particulier que les fibres géométriques de f sont réduites. Combinée avec la propriété *i*), elle impose que f induit des isomorphismes sur les corps résiduels en chaque point : en effet *i*) impose que l'extension induite est purement inséparable, et elle est séparable car les fibres géométriques sont réduites.

Finalement, [12, Lemma II.7.4] permet de voir que $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ est surjectif, montrant ainsi que f est une immersion fermée. □

Pour tout point géométrique $s: \operatorname{Spec} k \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$ nous noterons Ψ_s le morphisme déduit de Ψ par changement de base à s. En particulier, d'après la proposition 3.10, l'espace d'arrivée de Ψ_s est représentable par un schéma si la caractéristique de k est première à p et, dans le cas de la caractéristique p, on peut le remplacer par l'espace modulaire de Harbater.

Proposition 4.9. *Supposons que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = H$. Alors le morphisme Ψ vérifie les hypothèses i) et ii) du lemme 4.8.*

De plus, pour tout point géométrique $s: \operatorname{Spec} k \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$, quitte à remplacer l'espace d'arrivée par l'espace modulaire de Harbater si k est de caractéristique p, le morphisme Ψ_s vérifie l'hypothèse iii) du lemme 4.8.

En particulier, si $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable par un champ algébrique, alors Ψ est une immersion fermée.

Démonstration. Le point *i*) s'obtient en prenant la normalisation des torseurs définis sur un corps, ce qui donne automatiquement une courbe lisse de bon genre car on ne considère que des corps algébriquement clos.

Le point *ii*) s'obtient de la même manière modulo une altération *via* le corollaire 4.3 qui montre qu'on obtient bien une courbe lisse (voir aussi [22, Lemma IV.2.3]).

Il reste donc à voir la nullité de l'espace tangent relatif.

Supposons que k est de caractéristique première à p. La description explicite de la proposition 4.6 permet de voir que l'espace tangent relatif du morphisme

$$\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}$$

en chaque point est nul car π_*^H est exact. Le résultat est donc évident.

Supposons maintenant que k est de caractéristique p. Suivant Harbater dans [11, Theorem 1.2], on peut identifier $\left(\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)_s$ à une somme de termes de la forme $\displaystyle\bigoplus_i \bigoplus_{\ell>0, p\nmid\ell} \frac{1}{x_i^\ell}k$ où i parcourt les points de branchements et x_i est une uniformisante au point i.

D'autre part, on peut décrire l'espace tangent en un point de $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ en utilisant la proposition 4.6.

Finalement, le résultat provient de l'étude des déformations non obstruées obtenue par Pries dans [19, Theorem 2.2.10] (description de $\mathcal{M}_\phi$). $\square$

Remarque 4.10. Un analogue dans le cas $H \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ semble difficile à obtenir car l'étude de l'espace tangent est alors plus compliquée, le groupe H n'étant même pas *a priori* cyclique, et [19] ne couvre que le cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \boldsymbol{\mu}_\ell$.

5. Espace de modules dans le cas modéré

Nous souhaitons appliquer les résultats des sections précédentes au cas des actions modérées afin de décrire les espaces $\mathcal{M}_g[G]$. Pour cela, il convient tout d'abord de préciser quelques propriétés de ces actions. La première concerne le diviseur de branchement, qu'on peut en fait remplacer fonctoriellement par un diviseur étale.

Lemme 5.1. *Soit S un schéma, G un groupe abstrait fini dont l'ordre est inversible sur S, $\mathcal{D} \to S$ une courbe propre et lisse munie d'une action de G fidèle dans chaque fibre. Notons $\pi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C} = \mathcal{D}/G$ le morphisme quotient. Alors le conoyau de l'homomorphisme $\pi_*^G\Omega_{\mathcal{D}/S}^\vee \to \Omega_{\mathcal{C}/S}^\vee$ définit un diviseur de Cartier étale sur S et sa formation commute au changement de base.*

Démonstration. Comme G est réductif sur S, la formation de $\pi_*^G\Omega_{\mathcal{D}/S}^\vee$ commute aux changements de base, et il s'ensuit que le conoyau est plat. Il s'agit alors de montrer qu'il définit un schéma étale sur S, mais ceci peut se faire dans le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. De plus, en localisant et complétant on peut même remplacer $\mathcal{D}$ par $\operatorname{Spec} k[[x]]$ et G par un groupe cyclique, l'action étant alors donnée par $x \mapsto \zeta x$ où ζ est une racine de l'unité. Le calcul montre alors que $\pi_*^G \Omega_{\mathcal{D}/S}^\vee$ est engendré par $x\frac{\partial}{\partial x}$ et donc que le diviseur défini par le conoyau est étale. □

Nous noterons B_r le diviseur ainsi obtenu, et le nommerons le diviseur de branchement **réduit**. En effet, un calcul explicite montre qu'il a même schéma sous-jacent que le diviseur de branchement classique, ce dernier étant en fait une puissance de B_r.

Donnons-nous donc une courbe propre et lisse $h\colon \mathcal{C} \to S$ ainsi qu'une immersion ouverte $j : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ définie par le complémentaire de $\ell > 0$ sections disjointes.

Plaçons nous dans le cas où $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un nombre premier p, et S est un $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$-champ, ζ désignant une racine primitive p-ième de l'unité. Il est alors possible de calculer complètement la plupart des termes de la suite (1.1).

En effet, par dualité de Poincaré (cf. [17, Proposition VI.11.8]) on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}^2 h_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1).$$

On peut construire explicitement un isomorphisme $h_*\mathrm{R}^1 j_* \boldsymbol{\mu}_p \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell$ de la manière suivante : un $\boldsymbol{\mu}_p$ torseur étant localement de la forme $y^p = \beta$ pour une fraction rationnelle β, on lui associe l'ordre d'annulation modulo p de β en chacune des sections. Par suite, si on choisit un isomorphisme $\theta\colon \boldsymbol{\mu}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on en déduit un isomorphisme canonique

$$h_*\mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1))^\ell$$

dont on montre qu'il ne dépend pas de θ mais seulement du choix d'un ordre sur les sections. On peut donc réécrire cette suite exacte (1.1) sous la forme

$$(5.1)\qquad 0 \to \mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1))^\ell \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1) \to 0.$$

Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus jusqu'à maintenant à l'étude du champ algébrique $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ dont on sait qu'il est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ et donc réduit.

Pour étudier cet espace, il est commode d'en introduire un autre qui est un peu plus rigide. Notons $\ell = \frac{2g-2-p(2g'-2)}{p-1}$. On sait que si $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est non vide, alors d'après la formule de Hurwitz ce nombre est un entier (la réciproque est également vraie). On supposera donc que c'est le cas.

Notons $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell$ l'espace de modules classifiant les couples $(\mathcal{D} \to S, (e_1, \ldots, e_\ell))$ où $\mathcal{D} \to S$ est une courbe propre et lisse de genre g munie d'une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ fidèle dans chaque fibre, et les $e_i\colon S \to \mathcal{D}$ sont des sections disjointes invariantes sous $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telles que le lieu de ramification soit précisément $\cup_i \mathrm{supp}(e_i)$. En oubliant les sections e_i, on obtient un morphisme

$$\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}] \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

qui est un revêtement étale car les sections sont dans le lieu de ramification.

D'autre part, $\mathfrak{S}_\ell$ agit sur ce morphisme par permutation des e_i. On montre alors que le morphisme induit

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right)/\mathfrak{S}_\ell \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

est un isomorphisme. Nous allons donc nous concentrer sur $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ dans un premier temps.

Notons $\mathcal{M}^\ell_{g'}$ l'espace de modules des courbes de genre g' munies de ℓ sections disjointes, $\mathfrak{h} : \mathfrak{C} \to \mathcal{M}^\ell_{g'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ la courbe universelle, $e_1 \dots, e_\ell$ les sections universelles et $\mathfrak{U}$ le complémentaire dans $\mathfrak{C}$ du support des e_i. Notons de plus $\mathfrak{f} : \mathfrak{U} \to \mathcal{M}^\ell_{g'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ le morphisme induit.

On sait que $[\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable d'après la proposition 3.10, le théorème 4.9 montre alors qu'on a un isomorphisme

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right)/\!/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to [\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_{\mathfrak{g}=g}.$$

Reprenons la suite exacte (2.2). Dans le cas où p est premier à toutes les caractéristiques résiduelles et que la base contient une racine primitive p-ième de l'unité, les calculs aboutissant à la suite (5.1) peuvent alors être appliqués ici et on en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to [\mathrm{R}^1\mathfrak{h}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to [\mathrm{R}^1\mathfrak{f}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1))^\ell_{\mathcal{M}_{g'}\times\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta,\frac{1}{p}]} \\ \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1))_{\mathcal{M}_{g'}\times\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta,\frac{1}{p}]} \to 0. \end{aligned}$$

Prenant en compte la condition $\mathfrak{g} = g$, on voit que l'espace

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right)/\!/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est muni d'une action de $[\mathrm{R}^1\mathfrak{h}_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ et que le quotient s'identifie naturellement avec

$$\left\{(m_i) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})^\ell | \sum m_i = 0\right\}_{\mathcal{M}_{g'}\times\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta,\frac{1}{p}]}.$$

Utilisant l'isomorphisme

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right)/\mathfrak{S}_\ell \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

on obtient alors la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Le champ algébrique*

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right) /\!/ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est naturellement muni d'une action de $[\mathrm{R}^1 \mathfrak{h}_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ *et le quotient s'identifie avec*

$$\left(\left\{(m_i) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})^\ell \middle| \sum m_i = 0\right\} / \mathfrak{S}_\ell\right)_{\mathcal{M}_{g'} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]}.$$

De plus, le morphisme quotient induit une bijection entre les composantes irréductibles des espaces de départ et d'arrivée.

Démonstration. Seule la dernière assertion est à démontrer, elle provient de [4, Remark 1]. □

Comme $\mathcal{M}_{g'}^\ell$ est géométriquement irréductible, on a une description complète des composantes irréductibles de $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$.

Dans le cas où p n'est pas premier, il est possible d'obtenir une description semblable. Les différences proviennent du calcul de la fonction $\mathfrak{g}$ ainsi que de l'irréductibilité des composantes.

Bibliographie

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat, vi+640 pages.

[2] J. Bertin & A. Mézard, « Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques », *Invent. Math.* **141** (2000), n° 1, p. 195-238.

[3] ———, « Problem of formation of quotients and base change », *Manuscripta Math.* **115** (2004), n° 4, p. 467-487.

[4] M. Cornalba, « On the locus of curves with automorphisms », *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **149** (1987), p. 135-151.

[5] P. Deligne & D. Mumford, « The irreducibility of the space of curves of given genus », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), n° 36, p. 75-109.

[6] O. Gabber, « Some theorems on Azumaya algebras », in *The Brauer group (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980)*, Lecture Notes in Math., vol. 844, Springer, Berlin-New York, 1981, p. 129-209.

[7] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179, ix+467 pages.

[8] A. Grothendieck, « Éléments de géométrie algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961-1967), n° 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[9] ———, « Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 88-188.

[10] ———, « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 221, 249-276.

[11] D. Harbater, « Moduli of p-covers of curves », *Comm. Algebra* **8** (1980), n° 12, p. 1095-1122.

[12] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, xvi+496 pages.

[13] A. J. de Jong, « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), n° 2, p. 599-621.

[14] N. M. KATZ, « Local-to-global extensions of representations of fundamental groups », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **36** (1986), n° 4, p. 69-106.

[15] Q. LIU, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications, xvi+576 pages.

[16] A. MÉZARD, « Fundamental group », in *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, Progr. Math., vol. 187, Birkhäuser, Basel, 2000, p. 141-155.

[17] J. S. MILNE, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980, xiii+323 pages.

[18] R. J. PRIES, « Equiramified deformations of covers in positive characteristic », `http://arxiv.org/abs/math/0403056`.

[19] ———, « Families of wildly ramified covers of curves », *Amer. J. Math.* **124** (2002), n° 4, p. 737-768.

[20] M. ROMAGNY, « Sur quelques aspects des champs de revêtements de courbes algébriques », Thèse, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, France, 2002.

[21] P. SAMUEL, « Groupes finis d'automorphismes des anneaux de séries formelles », *Bull. Sci. Math. (2)* **90** (1966), p. 97-101.

[22] T. SEKIGUCHI, F. OORT & N. SUWA, « On the deformation of Artin-Schreier to Kummer », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), n° 3, p. 345-375.

[23] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962, 243 pages.

[24] S. TUFFÉRY, « Déformations de courbes avec action de groupe », *Forum Math.* **5** (1993), n° 3, p. 243-259.

Sylvain MAUGEAIS
Département de mathématiques, Université du Maine
Av. Olivier Messiaen, BP 535
72017 Le Mans CEDEX, France
E-mail: `sylvain.maugeais@univ-lemans.fr`
URL: `http://perso.univ-lemans.fr/~smauge/`