Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Joseph BASQUIN

Loi de répartition moyenne des diviseurs des entiers friables

Tome 26, n° 2 (2014), p. 281-305.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2014__26_2_281_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **26** (2014), 281–305

Loi de répartition moyenne des diviseurs des entiers friables

par Joseph BASQUIN

Résumé. In this paper we consider an extension to friable integers of the arcsine law for the mean distribution of the divisors of integers, originally due to Deshouillers, Dress and Tenenbaum.

We describe the limit law and show that it departs from the arcsine law when the friability parameter $u := \log x/\log y$ increases. More precisely, as $u \to \infty$, the mean distribution shifts from the arcsine law towards Gaussian behaviour.

Abstract.
Ce travail est dédié à une extension aux entiers friables de la loi de l'arcsinus concernant la répartition en moyenne des diviseurs des entiers établie par Deshouillers, Dress and Tenenbaum. Nous décrivons la loi limite et montrons que celle-ci s'éloigne d'un comportement de type arcsinus lorsque le paramètre de friabilité $u := \log x/\log y$ croît. Plus précisément, nous établissons le glissement de la loi de l'arcsinus vers une loi approximativement gaussienne lorsque $u \to \infty$.

1. Introduction

1.1. Contexte.

L'étude du nombre de diviseurs d'un entier n a été abordée sous de nombreux aspects : la question des ordres moyens et extrémaux de la fonction nombre de diviseurs $\tau(n)$ fait, depuis bien longtemps, partie des problèmes classiques de la discipline.

La répartition des diviseurs d'un entier n dans l'intervalle $[1, n]$ a, quant à elle, été étudiée plus récemment. Désignons par

$$F_n(v) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n, d \leq n^v} 1$$

la proportion des diviseurs de n qui sont inférieurs à n^v.

Manuscrit reçu le 5 décembre 2012, accepté le 25 janvier 2013.
Mots clefs. Loi de l'arcsinus, distribution gaussienne, répartition des diviseurs, entiers friables, fonction multiplicative.
Classification math. 11N25, 11N37.

Deshouillers, Dress et Tenenbaum [2] obtiennent le résultat suivant, communément désigné sous le nom de *loi de l'arcsinus.*

Théorème ([2]). *Nous avons uniformément pour* $x \geq 2$, $0 \leq v \leq 1$,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F_n(v) = \frac{2}{\pi} \text{ arcsin } \sqrt{v} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big). \tag{1.1}$$

Ce résultat met en lumière notamment le fait qu'un entier a, en moyenne, beaucoup de petits et de grands diviseurs. En effet, les grandes et les petites valeurs sont très probables : si U est une variable aléatoire répartie selon la loi de l'arcsinus, on a $\mathbb{P}(U < 0,1 \text{ ou } U > 0,9) \approx 0,41$.

1.2. Entiers friables.

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel positif n, avec la convention $P(1) = 1$, et notons $S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$ l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x. Pour $x, y \geq 2$, nous posons, conformément à l'usage, $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$ et $u := \log x / \log y$.

L'étude des entiers friables a fait l'objet, depuis plusieurs décennies, d'une littérature importante, tant de par ses interactions avec des domaines connexes comme l'algorithmique ou la cryptographie, que par ses implications mêmes en théorie des nombres.

Avant de préciser le sujet de notre présente étude, rappelons quelques notations. Étant donné $\kappa > 0$, nous considérons la fonction ρ_κ, puissance fractionnaire de convolution d'ordre κ de la fonction de Dickmann $\rho = \rho_1$: ρ_κ est définie comme l'unique fonction continue sur $]0, \infty[$ et dérivable sur $[1, \infty[$ satisfaisant à

$$\begin{cases} u\rho_\kappa'(u) + (1-\kappa)\rho_\kappa(u) + \kappa\rho_\kappa(u-1) = 0 & (u > 1), \\ \rho_\kappa(u) = u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa) & (0 < u \leq 1), \\ \rho_\kappa(u) = 0 & (u \leq 0). \end{cases} \tag{1.2}$$

La fonction ρ_κ apparaît naturellement dans l'évaluation de sommes du type

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n),$$

où, pour un nombre complexe z, τ_z désigne la fonction arithmétique définie par l'identité $\zeta(s)^z := \sum_{n \geq 1} \tau_z(n) n^{-s}$ ($\Re s > 1$) et $\zeta(s)$ la fonction de Riemann.

On a en effet (voir [6]),

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) \sim x\rho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1},$$

uniformément pour x, y vérifiant

$$(H_\varepsilon) \qquad x \geq 3, \qquad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Les entiers friables étant définis par une contrainte sur les facteurs premiers, il est naturel de s'interroger sur la répartition de leurs diviseurs.

Ainsi, la question de la répartition des facteurs premiers des entiers friables a été étudiée en détail dans le travail de La Bretèche et Tenenbaum [1]. Y est établi notamment le résultat suivant concernant la fonction $\omega_t(n) := \sum_{\substack{p|n\\ p\leq t}} 1$.

Théorème ([1]). *Soient $b > 1$ et T_x une fonction positive tendant vers l'infini avec x. Pour tous les entiers n de $S(x, y)$ sauf au plus $o(\Psi(x, y))$ $(x \to \infty)$ d'entre eux et pour $T_x \leq t \leq y \leq x$, on a*

$$|\omega_t(n) - W(t)| \leq W(t)^{2/3}\{\log W(t)\}^{b/3},$$

où $W(t) := \sum_{n\leq t} p^{-\alpha}$ et où $\alpha(x, y)$ est défini comme l'unique solution positive de l'équation $\sum_{p\leq y} \log p/(p^\alpha - 1) = \log x$.

Les facteurs premiers des entiers friables suivent donc (sauf pour un nombre négligeable d'entre eux) une répartition régulière, représentée par la fonction $W(t)$. On se référera à [1] pour d'autres résultats concernant les facteurs premiers des entiers friables.

1.3. Énoncés des résultats.

Nous nous proposons ici de mener une étude de la répartition en moyenne des diviseurs d'un entier y-friable n, dans l'intervalle $[1, n]$. Posons

$$(1.3) \qquad J_u(v) := \frac{1}{\rho(u)} \int_0^{uv} \rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t \qquad (u \geq 1, 0 \leq v \leq 1).$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $0 \leq v \leq 1$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons*

$$(1.4) \qquad \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} F_n(v) = J_u(v) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big).$$

Remarque. Nous retrouvons en particulier, pour $y = x$ et $0 \leq v \leq 1$,

$$J_1(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^v \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v},$$

de sorte que l'estimation (1.4) pour $y = x$ est équivalente à (1.1).

Pour $t > 0$, $t \neq 1$, désignons par $\xi = \xi(t)$ l'unique racine réelle non nulle de l'équation

$$\mathrm{e}^{\xi} = 1 + t\xi, \tag{1.5}$$

avec la convention $\xi(1) = 0$.

L'étude de la dérivée logarithmique de $\rho_{1/2}$ (voir le Lemme 2.3, *infra*) nous permet de caractériser la loi limite — en particulier d'illustrer ses variations, ainsi que son caractère gaussien lorsque le paramètre u tend vers l'infini. Nous montrons le résultat suivant [1].

Théorème 1.2. *Nous avons, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq \min\{u/2 - 1, u^{3/4}\}$,*

$$\frac{\rho_{1/2}(u/2+h)\rho_{1/2}(u/2-h)}{\rho(u)} = \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}}\mathrm{e}^{-2h^2\xi'(u)}\Big(1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{h^4}{u^3}\Big)\Big). \tag{1.6}$$

On observe ainsi, lorsque le paramètre u croît, un glissement de la répartition des diviseurs en moyenne d'une loi de type arcsinus vers une loi de type gaussien.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Le résultat suivant exprime sous forme quantitative la convergence de J_u vers une fonction de répartition gaussienne.

Corollaire 1.1. *Pour $u \geq 3$ et $0 \leq v \leq 1$, nous avons*

$$J_u(v) = \Phi\Big(u\sqrt{2\xi'(u)}(v - \tfrac{1}{2})\Big) + O\Big(\frac{1}{u}\Big). \tag{1.7}$$

2. Résultats auxiliaires

2.1. Évaluations asymptotiques concernant la fonction de Dickman $\boldsymbol{\rho_{1/2}}$.

Citons un cas particulier du théorème 1 de [5] (appliqué dans le cas $\kappa = 1/2$, $K = 1$) permettant l'évaluation asymptotique [2] de $\rho_{1/2}$.

Lemme 2.1. *Il existe une fonction dérivable δ vérifiant*

$$\delta(u) \ll 1/u, \qquad \delta'(u) \ll 1/u^2 \qquad (u \geq 1) \tag{2.1}$$

telle que nous ayons uniformément, pour $u \geq 1$,

$$\rho_{1/2}(u) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{\gamma}\xi'(2u)}{\pi}} \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\int_1^{2u} \xi(t)\,\mathrm{d}t\Big\}\Big\{1 + \delta(u) + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\Big\}, \tag{2.2}$$

1. Dans un but purement heuristique, on rappelle ici que $\xi'(u) \sim 1/u \quad (u \geq 3)$.

2. Voir plus généralement [3] pour une étude des solutions de certaines équations différentielles aux différences telles que les fonctions ρ_κ.

où γ désigne la constante d'Euler.

La formulation (2.2) découle simplement des relations (3.5) et (3.6) de [5]. En effet, posant

$$I(s) := \int_0^s \frac{\mathrm{e}^v - 1}{v}\,\mathrm{d}v \qquad (s \in \mathbb{C}\ ),$$
$$\sigma_j := \sigma_j(v) = \tfrac{1}{2} I^{(j)}(\xi(2v)) \qquad (j \geq 0, v \geq 1),$$

on note que, par changement de variable $t = \xi(v)$ dans l'expression de $\sigma_0(v)$, l'on obtient, pour $v \geq 1/2$,

$$\sigma_0(v) = \tfrac{1}{2} \int_1^{2v} t\xi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où l'expression intégrale

$$\sigma_0(v) - v\xi(2v) = -\tfrac{1}{2} \int_1^{2v} \xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, par définition de $\sigma_j(v)$ et de $I(s)$, nous avons

$$\sigma_1(v) = \tfrac{1}{2} I'(\xi(2v)) = \tfrac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{\xi(2v)} - 1}{\xi(2v)} = v,$$

d'où il vient, pour $v \geq 1$,

$$\sigma_2(v) = \tfrac{1}{2}(I')'(\xi(2v)) = \frac{(I'(\xi(2v)))'}{\xi(2v)'} = \frac{1}{2\xi'(2v)}.$$

Enfin, la relation (3.6) de [5] montre que la fonction $\delta(u)$ de (2.2) a pour expression $\delta(u) = \sigma_4/(8\sigma_2) - 5\sigma_3^2/(8\sigma_2^2)$.

Il sera par la suite nécessaire de pouvoir comparer les quantités $\rho_{1/2}(u)$ et $\rho(u)$. Rappelons à cette fin la relation (3.10) de [5] — qui découle également du lemme précédent. Pour $k = 1/2$, nous avons

$$\rho_{1/2}(u) = 2^{-u+O(u/\log(u+1))}\rho(u) \qquad (u \geq 1). \tag{2.3}$$

Par ailleurs, on peut aussi écrire, grâce à l'estimation (3.5) de [5] appliquée pour $k = 1/2$ et $k = 1$,

$$\rho_{1/2}(u/2)^2 = \sqrt{\frac{2\,\xi'(u)}{\pi}}\rho(u)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big) \qquad (u \geq 1). \tag{2.4}$$

Citons également, à fin de référence ultérieure, la majoration (3.27) de [9].

$$\rho_{1/2}(u - v) \ll \rho_{1/2}(u)\mathrm{e}^{v\xi(2u)} \qquad (u \geq 1, 0 \leq v \leq u - 1/2). \tag{2.5}$$

L'estimation suivante fournit une majoration utile de la dérivée de la fonction $\rho_{1/2}$, en tenant compte de sa discontinuité pour $t = 1$.

Lemme 2.2. *Nous avons*[3]

$$\rho'_{1/2}(t) \ll \rho_{1/2}(t)\Big(\log(t+2) + \sqrt{\Big(\frac{1}{t-1}\Big)^{+}} + \frac{1}{t}\Big) \quad (t > 0, t \neq 1). \tag{2.6}$$

Remarque. En particulier, on a

$$\rho'_{1/2}(t) \ll \sqrt{\Big(\frac{1}{t-1}\Big)^{+}} \qquad (1/2 \leq t \leq 3, t \neq 1). \tag{2.7}$$

Démonstration. La relation (1.2) donne, pour $t > 1$,

$$\rho'_{1/2}(t) = \frac{-1}{2t}\Big\{\rho_{1/2}(t) + \rho_{1/2}(t-1)\Big\}.$$

En faisant usage de l'inégalité (2.5) sous la forme

$$\rho_{1/2}(t-1) \ll \big(t \log t\big)\rho_{1/2}(t) \qquad (t \geq 3/2)$$

et de la positivité de la fonction $\rho_{1/2}$, on obtient, pour $t \geq 3/2$,

$$\rho'_{1/2}(t) \ll (\log t)\rho_{1/2}(t). \tag{2.8}$$

Pour $0 < t \leq 1$, la relation (2.6) est bien vérifiée car on a $\rho_{1/2}(t) = 1/\sqrt{\pi t}$. Pour $1 < t \leq 2$, nous avons

$$\rho_{1/2}(t) = \frac{2 - \log(-1 + 2t + 2\sqrt{t(t-1)})}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Un simple calcul de dérivée montre que l'on a, pour $1 < t \leq 3/2$,

$$\rho'_{1/2}(t) \ll \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

□

2.2. Dérivée logarithmique de $\rho_{1/2}$.

Posons

$$r_{1/2}(t) := -\frac{\rho'_{1/2}(t)}{\rho_{1/2}(t)} \qquad (t > 1).$$

Montrons une propriété concernant la dérivée logarithmique de $\rho_{1/2}$.

Lemme 2.3. *Il existe une constante $t_0 > 0$, telle que la fonction $r_{1/2}$ soit croissante sur $[t_0, \infty[$. On a de plus, uniformément pour $t > 1$,*

$$r_{1/2}(t) = \xi(2t) + O\Big(\frac{\log(t+1)}{t}\Big), \tag{2.9}$$

$$r'_{1/2}(t) = 2\xi'(2t) + O\Big(\frac{(\log(t+1))^2}{t^2}\Big). \tag{2.10}$$

3. On pose, pour tout a réel, $a^{+} := \max\{a, 0\}$.

Démonstration. Nous écrivons, pour alléger les notations, et dans ce paragraphe uniquement,

$$\begin{aligned} \rho &:= \rho_{1/2}(t), \quad \rho_{-1} := \rho_{1/2}(t-1) \quad \xi := \xi(2t), \quad \xi_{-1} := \xi(2(t-1)),\\ \rho' &:= \rho'_{1/2}(t), \quad \rho'_{-1} := \rho'_{1/2}(t-1), \quad \xi' := \xi'(2t), \quad \xi'_{-1} := \xi'(2(t-1)), \end{aligned}$$

et de même pour les dérivées d'ordre supérieures. En tenant compte du fait que

$$\xi^{(j)}(v) := (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{v^j}\Big(1+O_j\Big(\frac{1}{\log(v+1)}\Big)\Big) \qquad (v \geq 1, j \geq 1),$$

nous avons, par utilisation de formules de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'_{-1}}{\xi'} &= 1 - \frac{2\xi''}{\xi'} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big),\\ \int_{2(t-1)}^{2t} \xi(v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^2 \Big(\xi - v\xi' + O\Big(\frac{v^2}{t^2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}v\\ &= 2\xi - 2\xi' + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \end{aligned}$$

et, avec une fonction δ satisfaisant l'énoncé du Lemme 2.1,

$$\frac{1+\delta(t-1)+O(1/t^2)}{1+\delta(t)+O(1/t^2)} = 1 + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big).$$

Il en découle directement, grâce à (2.2),

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{-1}}{\rho} &= \Big(1 - \frac{\xi''}{\xi'} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)\mathrm{e}^{\xi}\exp\Big\{-\xi' + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\Big(1+O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)\\ &= (1+2t\xi)\Big(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)\\ &= 2t\xi\Big(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + \frac{1}{2t\xi} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big), \end{aligned}$$

d'où

$$s(t) := \frac{\rho_{-1}}{2\,t\,\rho} = \xi - \xi\xi' - \frac{\xi\xi''}{\xi'} + \frac{1}{2t} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big). \tag{2.11}$$

Nous avons donc, pour $t > 1$,

$$r_{1/2}(t) = \frac{\rho + \rho_{-1}}{2\,t\,\rho} = \frac{1}{2t} + s(t) = \xi\big(1+O(1/t)\big), \tag{2.12}$$

ce qui prouve l'assertion (2.9).

Montrons à présent (2.10). Les estimations

$$\begin{aligned}\xi_{-1} &= \xi - 2\xi' + O(1/t^2),\\ \xi'_{-1} &= \xi' + O(1/t^2) = \xi'(1+O(1/t)),\\ \xi''_{-1} &= \xi'' + O(1/t^3) = \xi''(1+O(1/t))\end{aligned}$$

nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}s(t-1) &= \xi_{-1}\Big(1 - \xi'_{-1} - \frac{\xi''_{-1}}{\xi'_{-1}}\Big) + \frac{1}{2(t-1)} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big)\\ &= \Big(\xi - 2\xi' + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)\Big(1 - \xi' + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big) - \frac{\xi''}{\xi'}\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)\Big)\\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2(t-1)} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big)\\ &= \Big(\xi - 2\xi' + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)\Big(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big) + \frac{1}{2(t-1)} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big)\\ &= \xi - \xi\xi' - \frac{\xi\xi''}{\xi'} - 2\xi' + \frac{1}{2(t-1)} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big).\end{aligned}$$

Dérivons à présent la fonction $r_{1/2}$. On a

$$\begin{aligned}r'_{1/2}(t) &= -\frac{1}{t^2} + s(t)\Big(s(t) - s(t-1) - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2t}\Big)\\ &= s(t)\Big(2\xi' - \frac{1}{t} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big)\Big) + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big).\end{aligned}\tag{2.13}$$

On tire de (1.5) la relation $\xi'(v) = 1/(v - (v-1)/\xi(v))$ $(v > 1)$, ce qui implique

$$2\xi' - \frac{1}{t} - \frac{2\xi'}{\xi} = \frac{-1}{t(2\xi t - 2t + 1)} \ll \frac{1}{\xi t^2}.$$

En injectant cette dernière estimation ainsi que (2.11) dans (2.13), il vient

$$\begin{aligned}r'_{1/2}(t) &= \Big(\xi + O\Big(\frac{\xi}{t}\Big)\Big)\Big(\frac{2\xi'}{\xi} + O\Big(\frac{\xi}{t^2}\Big)\Big) + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\\ &= 2\xi' + O\Big(\frac{\xi^2}{t^2}\Big) > 0\end{aligned}$$

pour t assez grand, ce qui achève la démonstration. $\square$

Posons, pour $u \geq 1$ et $0 < t < u$,

$$f_u(t) := \rho_{1/2}(t)\,\rho_{1/2}(u-t).$$

Nous pouvons à présent préciser les variations de f_u sur l'intervalle $]0,u[$.

Lemme 2.4. *Soit $u \geq 2\,t_0$, où t_0 est une constante satisfaisant l'énoncé du Lemme 2.3. La fonction f_u est croissante sur $[t_0, u/2]$ et décroissante sur $[u/2, u-t_0]$.*

Démonstration. Soit $g_u(t) := \log f_u(t)$. Nous avons

$$g_u'(t) = \frac{\rho_{1/2}'(t)}{\rho_{1/2}(t)} - \frac{\rho_{1/2}'(u-t)}{\rho_{1/2}(u-t)} = r_{1/2}(u-t) - r_{1/2}(t).$$

Le Lemme 2.3 implique directement la décroissance de $g_u'(t)$ sur $[t_0, u-t_0]$. Comme par ailleurs $g_u'(u/2)=0$, on en déduit que g_u' est positive (donc f_u est croissante) sur $[t_0,u/2]$ et g_u' négative (f_u est donc décroissante) sur $[u/2,u-t_0]$. □

Lemme 2.5. *Nous avons, pour $u \geq 1$ et $0 < t \leq u/2$,*

$$\rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t) \ll \Big(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)\rho(u)$$

et, pour $0 < u \leq 1$ et $0 < t \leq u/2$,

$$\rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t) \ll \frac{1}{t}\cdot$$

Démonstration. Notons que sous les hypothèses effectuées, nous avons toujours $u-t \geq t$. Pour montrer la première assertion, plaçons nous tout d'abord dans le cas où $t \geq t_0$, où t_0 est une constante satisfaisant l'énoncé du Lemme 2.3. Puisque f_u est croissante sur $[t_0,u/2]$, nous avons

$$f_u(t) \leq f_u(u/2) = \rho_{1/2}(u/2)^2 \ll \rho(u),$$

d'après (2.4). Supposons maintenant $0 < t \leq t_0$. Nous avons, en appliquant (2.5) — car $u \geq 1$ et $t \leq u-1/2$ — ainsi que l'estimation (2.3),

$$f_u(t) \ll \rho_{1/2}(u)\mathrm{e}^{t\xi(2u)}\rho_{1/2}(t) \ll \rho_{1/2}(u)u^{O(1)}\rho_{1/2}(t) \ll \rho(u)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\Big).$$

La seconde assertion, quant à elle, découle aisément du fait que, pour $0 < t \leq 1$,

$$\rho_{1/2}(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot \tag{2.14}$$

□

3. Moyennes friables de fonctions arithmétiques

Énonçons tout d'abord un résultat valable pour toute fonction multiplicative positive ou nulle f satisfaisant à

$$f(p) = \tfrac{1}{2} + O(1/\sqrt{p}) \qquad (p \geq 2) \tag{3.1}$$

et

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)}{p^{(3/4)\nu}} \ll 1. \tag{3.2}$$

Posons à cette fin

$$C(f) := \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{1/2} \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)/p^\nu.$$

Lemme 3.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et f une fonction multiplicative positive ou nulle satisfaisant à* (3.1) *et* (3.2). *Nous avons, uniformément pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,*

$$\Psi_f(x, y) = \frac{C(f)\, x\, \rho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{3.3}$$

Lorsque $2 \leq x \leq y$, nous avons

$$\Psi_f(x, y) = \frac{C(f)\, x\, \rho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}. \tag{3.4}$$

Démonstration. L'assertion (3.3) résulte directement du Corollaire 2.3 de [9], appliqué avec $\kappa = \frac{1}{2}$. En effet, l'hypothèse (3.1) assure que l'on a, pour $z \geq 2$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{p \leq z} f(p) \log p - \tfrac{1}{2} z\Big| &\leq \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{p \leq z} \log p - z\Big| + O\Big(\sum_{p \leq z} \frac{\log p}{p^{1/2}}\Big) \\ &\ll z \exp\{-(\log z)^{3/5-\varepsilon}\},\end{aligned}$$

et les conditions sont ainsi pleinement remplies pour appliquer le résultat précité.

L'estimation (3.4), quant à elle, découle du fait que $S(x, y) = \{n \leq x\} = S(x, x)$ lorsque $2 \leq x \leq y$, et de l'application de la méthode de Selberg-Delange (voir [8], §II.5.2). On observe pour cela que l'on a, sous réserve de convergence,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s)^{1/2} \sum_{n \geq 1} \frac{\beta(n)}{n^s},$$

où β est la fonction multiplicative déterminée par

$$\sum_{k \geq 1} \beta(p^k) x^k = (1 - x)^{1/2} \sum_{k \geq 1} f(p^k) x^k \qquad (-1 < x < 1).$$

Les conditions (3.1) et (3.2), impliquant que $\beta(p) = f(p) - \frac{1}{2} \ll 1/\sqrt{p}$, nous assurent de l'absolue convergence de $\sum \beta(n)/n^s$ pour $\sigma > 3/4$, ce qui est suffisant pour appliquer le Théorème II.5.2 de [8]. On a alors, pour $2 \leq x \leq y$,

$$\begin{aligned}\Psi_f(x,y) = \Psi_f(x,x) &= \frac{C(f)\,x}{\sqrt{\pi\,\log x}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\\ &= \frac{C(f)\,x\,\rho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

en utilisant (2.14). □

Soit à présent, pour $d \geq 1$,

$$\varphi_d(n) := \frac{\tau(d)}{\tau(n\,d)} \qquad (n \geq 1).$$

La fonction φ_d est multiplicative et on a l'identité

$$\varphi_d(n) = \prod_p \frac{v_p(d)+1}{v_p(n)+v_p(d)+1} \qquad (d \geq 1,\ n \geq 1). \tag{3.5}$$

Nous souhaitons approcher la fonction φ_d par la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. Dans ce but, nous désignons par h_d la fonction multiplicative définie par la relation de convolution [4]

$$\varphi_d = h_d * \varphi_1 \tag{3.6}$$

et posons

$$H_d(t,y) := \sum_{\substack{m \leq t\\ P(m) \leq y}} \frac{h_d(m)}{m}, \qquad \widetilde{H}_d(y) := \sum_{\substack{m \geq 1\\ P(m) \leq y}} \frac{h_d(m)}{m}.$$

Soit encore g la fonction multiplicative définie par

$$g(p^\nu) := \Big(\sum_{j \geq 0} \frac{p^{-j}}{j+\nu+1}\Big)\Big(\sum_{j \geq 0} \frac{p^{-j}}{j+1}\Big)^{-1}. \tag{3.7}$$

Lemme 3.2. *Nous avons, pour tout $d \geq 1$,*

$$\sum_{m \geq 1} \frac{h_d(m)}{m} = \tau(d)g(d).$$

Il existe une constante absolue $C_1 > 0$ telle que, posant

$$M(d) := \prod_{p \mid d}\Big(1 + \frac{C_1}{\sqrt{p}}\Big) \qquad (d \geq 1), \tag{3.8}$$

4. Un autre choix envisageable aurait été d'approcher φ_d par la fonction $\tau_{1/2}$, en posant $\varphi_d = h_d * \tau_{1/2}$, ce qui aurait fourni l'expression de h_d suivante : $h_d = \varphi_d * \tau_{-1/2}$.

on ait les estimations pour $t, y \geq 1$

$$\sum_{m>t} \frac{|h_d(m)|}{m} \ll \frac{M(d)}{\sqrt{t}}, \tag{3.9}$$

$$H_d(t,y) = \widetilde{H}_d(y) + O\Big(\frac{M(d)}{\sqrt{t}}\Big), \tag{3.10}$$

$$\widetilde{H}_d(y) = \tau(d)g(d) + O\Big(\frac{M(d)}{\sqrt{y}}\Big). \tag{3.11}$$

Démonstration. On déduit de l'identité (3.6) que nous avons $h_d(p^\nu) = 0$ si $p \nmid d$, ainsi que la relation

$$h_d(p^\nu) = \sum_{j+k=\nu} \alpha(p^j)\varphi_d(p^k) \qquad (p \geq 2, \nu \geq 1), \tag{3.12}$$

où α est l'inverse de convolution de la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. La fonction α vérifie

$$\Big(\sum_{k\geq 0} \alpha(p^k)x^k\Big)\Big(\sum_{k\geq 0} (1/\tau(p^k))x^k\Big) = 1 \qquad (0 < x < 1),$$

ce qui implique que la série génératrice s'écrit, pour $0 < x < 1$,

$$\sum_{k\geq 0} \alpha(p^k)x^k = \frac{-x}{\log(1-x)}\cdot \tag{3.13}$$

La suite $\{\alpha(p^k)\}_{k\geq 0}$, appelée suite des coefficients de Gregory, a fait l'objet de nombreuses études (voir [4]). Steffensen ([7]) montre [5] notamment que $\alpha(p^k) \ll 1/\{k(\log k)^2\}$ $(k \geq 1)$, d'où l'on tire

$$|h_d(p^\nu)| \ll 1 \qquad (p \geq 2).$$

Cela nous permet d'établir la convergence de

$$\sum_{m\geq 1} \frac{|h_d(m)|}{\sqrt{m}} = \prod_p \sum_{\nu\geq 0} \frac{|h_d(p^\nu)|}{p^{\nu/2}} \leq \prod_{p|d} \Big(1 + \frac{C_1}{\sqrt{p}}\Big) =: M(d),$$

où C_1 est une constante absolue.

5. Par souci de complétion, notons que (3.13) implique directement

$$\sum_{k\geq 0} \alpha(p^k)x^k = \int_0^1 (1-x)^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k\geq 0} \binom{t}{k}(-x)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k\geq 0} \Big((-1)^k \int_0^1 \binom{t}{k} \,\mathrm{d}t\Big) x^k$$

et

$$|\alpha(p^k)| \leq \int_0^1 \Big|\binom{t}{k}\Big| \,\mathrm{d}t \leq \max_{t\in[0,1]} \frac{t(1-t)\cdots(k-1-t)}{k!} \leq \frac{1}{k} \qquad (k \geq 1),$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (3.12), l'estimation suffisante $|h_d(p^\nu)| \leq 2 + \log(\nu+1)$, pour $p \geq 2$.

Montrons à présent la première assertion du lemme. De l'identité de convolution (3.6), on peut déduire le calcul de la somme

$$\sum_{m\geq 1}\frac{h_d(m)}{m}=\sum_{m\geq 1}\frac{\tau(d)}{\tau(md)m}\Big(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{\tau(m)m}\Big)^{-1}.$$

Comme d'une part, nous avons

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{\tau(m)m}=\prod_p\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\tau(p^\nu)p^\nu}=\prod_p\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{(\nu+1)p^\nu}$$

et que, d'autre part, grâce à (3.5), nous avons

$$\sum_{m\geq 1}\frac{\tau(d)}{\tau(md)m}=\prod_p\sum_{\nu\geq 0}\frac{\tau(d)}{\tau(dp^\nu)p^\nu}=\prod_p\sum_{\nu\geq 0}\frac{v_p(d)+1}{(v_p(d)+\nu+1)p^\nu},$$

il vient finalement

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1}\frac{h_d(m)}{m}&=\prod_{p|d}\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{v_p(d)+1}{(v_p(d)+\nu+1)p^\nu}\Big)\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{(\nu+1)p^\nu}\Big)^{-1}\\&=\tau(d)\prod_{p|d}\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{(v_p(d)+\nu+1)p^\nu}\Big)\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{(\nu+1)p^\nu}\Big)^{-1}\\&=\tau(d)g(d).\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons, pour tout $t\geq 1$,

$$\sum_{m>t}\frac{h_d(m)}{m}\ll\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{m\geq 1}\frac{|h_d(m)|}{\sqrt{m}}\ll\frac{M(d)}{\sqrt{t}}.$$

On peut ensuite écrire, pour tout $t\geq 1$,

$$|\widetilde{H}_d(y)-H_d(t,y)|=\Big|\sum_{\substack{m>t\\ P(m)\leq y}}\frac{h_d(m)}{m}\Big|\leq\sum_{m>t}\frac{|h_d(m)|}{m}\ll\frac{M(d)}{\sqrt{t}},$$

et pour $y\geq 1$,

$$|\tau(d)g(d)-\widetilde{H}_d(y)|=\Big|\sum_{\substack{m\geq 1\\ P(m)>y}}\frac{h_d(m)}{m}\Big|\leq\sum_{m>y}\frac{|h_d(m)|}{m}\ll\frac{M(d)}{\sqrt{y}}.$$

□

Nous donnons à présent une extension du Théorème II.6.8 de [8].

Posons $h := \prod_p \sqrt{p(p-1)}\log\{1/(1-1/p)\}$ et

$$E_1(x,y) := \frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\cdot \tag{3.14}$$

Lemme 3.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $d \geq 1$ et $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \frac{\tau(d)}{\tau(nd)} = \frac{h\,x\rho_{1/2}(u)g(d)\tau(d)}{\sqrt{\log y}}\Big\{1 + O\big(M(d)E_1(x,y)\big)\Big\}. \tag{3.15}$$

où g et M sont les fonctions multiplicatives positives définies respectivement en (3.7) *et* (3.8).

Remarque. Nous utiliserons également (3.15) sous la forme affaiblie

$$\sum_{n\in S(x,y)} \frac{1}{\tau(nd)} \ll \frac{x\rho_{1/2}(u)g(d)M(d)}{\sqrt{\log y}} \qquad ((x,y)\in (H_\varepsilon),\ d\geq 1). \tag{3.16}$$

Démonstration. Afin d'évaluer la somme requise, nous effectuons la décomposition suivante. Pour $x \geq y \geq 2$, nous avons

$$\Psi_{\varphi_d}(x,y) = \sum_{m\in S(x,y)} h_d(m)\Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m},y\Big) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

où

$$\Sigma_1 := \sum_{m\in S(\sqrt{x},y)} h_d(m)\Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m},y\Big), \qquad \Sigma_2 := \sum_{\substack{\sqrt{x}<m\leq x\\ P(m)\leq y}} h_d(m)\Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m},y\Big).$$

Notons d'emblée, en vertu du Lemme 3.2 et puisque $0 < 1/\tau(n) \leq 1$, que

$$\begin{aligned}|\Sigma_2| &\leq \sum_{\sqrt{x}<m\leq x} |h_d(m)| \sum_{n\leq x/m} 1 \leq x \sum_{m>\sqrt{x}} \frac{|h_d(m)|}{m}\\ &\ll M(d)x^{3/4} \ll \frac{x\rho_{1/2}(u)M(d)}{(\log y)^2},\end{aligned}$$

car, dans le domaine considéré, $\rho_{1/2}(u) \gg x^{-1/4}(\log y)^2$, d'après (2.2). Cela implique que Σ_2 est un terme d'erreur.

Appliquons maintenant le Lemme 3.1 à la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. En posant $u_t := \log t/\log y$ pour $m \geq 2$, nous avons, pour $x/m \geq y \geq 2$,

$$\Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m},y\Big) = \frac{h\,x\rho_{1/2}(u-u_m)}{m\sqrt{\log y}}\Big\{1 + O\big(E_1(x,y)\big)\Big\}$$

et, lorsque $2 \le x/m < y$,

$$\Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m}, y\Big) = \Psi_{1/\tau}\Big(\frac{x}{m}, \frac{x}{m}\Big) = \frac{h\,x}{m\sqrt{\pi \log(x/m)}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log(x/m)}\Big)\Big\}$$
$$= \frac{h\,x\rho_{1/2}(u-u_m)}{m\sqrt{\log y}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log(x/m)}\Big)\Big\}.$$

On peut donc écrire, puisque $m \le \sqrt{x}$ implique $\log(x/m) \gg \log x \ge \log y$,

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{h\,x}{\sqrt{\log y}} \sum_{m\in S(\sqrt{x},y)} \frac{h_d(m)}{m}\rho_{1/2}(u-u_m)\\ &\qquad \times\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\log(x/m)}\Big)\Big)\\ &= \frac{h\,x\,\Sigma_3}{\sqrt{\log y}}\Big\{1 + O\big(E_1(x,y)\big)\Big\},\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec

$$\Sigma_3 := \sum_{m\in S(\sqrt{x},y)} \frac{h_d(m)}{m}\rho_{1/2}(u-u_m) = \int_{1^-}^{\sqrt{x}} \rho_{1/2}(u-u_t)dH_d(t,y).$$

Observons que la fonction $\rho_{1/2}$ est continue, dérivable pour tout $v \ne 1$, et sa dérivée est intégrable sur tout segment ne contenant pas 0 d'après le Lemme 2.2 (on peut écrire, pour $v > 0$, $\rho_{1/2}(v) = -\int_v^\infty \rho_{1/2}'(t)\,\mathrm{d}t$).

Ceci nous permet de traiter Σ_3 par intégration par parties. On obtient alors, en appliquant de plus la relation (3.10),

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= \rho_{1/2}(u/2)H_d(\sqrt{x},y) + \int_1^{\sqrt{x}} H_d(t,y)\frac{\rho_{1/2}'(u-u_t)}{t\log y}\,\mathrm{d}t\\ &= \rho_{1/2}(u/2)\Big(\widetilde{H}_d(y) + O\Big(\frac{M(d)}{x^{1/4}}\Big)\Big)\\ &\qquad + \int_1^{\sqrt{x}} \Big(\widetilde{H}_d(y) + O\Big(\frac{M(d)}{\sqrt{t}}\Big)\Big)\frac{\rho_{1/2}'(u-u_t)}{t\log y}\,\mathrm{d}t\\ &= \widetilde{H}_d(y)\rho_{1/2}(u) + R,\end{aligned}$$

avec

$$R \ll \frac{M(d)}{x^{1/4}} + \frac{M(d)}{\log y}\int_1^{\sqrt{x}} |\rho_{1/2}'(u-u_t)|\,t^{-3/2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

Lorsque $u \ge 3$, l'intégrale précédente est clairement

$$\ll \rho_{1/2}(u)\log(u+1)\int_1^{\sqrt{x}} t^{\xi(2u)/\log y - 3/2}\,\mathrm{d}t \ll \rho_{1/2}(u)\log(u+1),$$

où l'on a utilisé (2.6) car $u - u_t \ge u/2 \ge 3/2$ et également (2.5) car $u \ge 1$ et $u_t \le u/2 \le u - 1/2$.

Lorsque $1 \leq u \leq 3$, il faut tenir compte de la discontinuité de la dérivée de $\rho_{1/2}$ en 1, et l'intégrale de (3.18) vaut, en vertu de la majoration (2.7),

$$\begin{aligned}
&\ll \int_1^{\sqrt{x}} t^{-3/2} \sqrt{\Big(\frac{1}{u-u_t-1}\Big)^+}\, \mathrm{d}t \\
&\ll \int_1^{\sqrt{x}} t^{-3/2}\, \mathrm{d}t + \sqrt{\log y} \int_{x/(\mathrm{e}y)}^{x/y} \frac{t^{-3/2}}{\sqrt{\log(x/(ty))}}\, \mathrm{d}t \\
&\ll 1 + \sqrt{\log y}\, \Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/2} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{w/2}\, \mathrm{d}w}{\sqrt{w}} \\
&\ll \rho_{1/2}(u)\Big(1 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/2} \sqrt{\log y}\Big).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ainsi

$$R \ll M(d)\rho_{1/2}(u)E_1(x,y). \tag{3.20}$$

Finalement, en appliquant (3.11), il vient

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \tau(d)g(d)\rho_{1/2}(u) + O\Big(\frac{M(d)\rho_{1/2}(u)}{\sqrt{y}}\Big) + R \\
&= \rho_{1/2}(u)\Big(\tau(d)g(d) + O\big(M(d)E_1(x,y)\big)\Big).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En injectant cette estimation dans (3.17), on obtient

$$\Sigma_1 = \frac{h\, x\, \rho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \Big\{\tau(d)g(d) + O\Big(\big(\tau(d)g(d) + M(d)\big)E_1(x,y)\Big)\Big\}.$$

Or, pour tout $d \geq 1$, on a $M(d) \leq \tau(d)g(d)M(d)$ car $\tau(d)g(d) \geq 1$. Cette dernière assertion s'obtient en remarquant dans la relation (3.7) que $(\nu+1)/(j+\nu+1) \geq 1/(j+1)$. On obtient alors le résultat attendu.

Remarque. Lorsque $u \geq 1 + (\log_2 y)/\log y$, le terme d'erreur (3.19) est en fait $\ll \rho_{1/2}(u)\log(u+1)$, impliquant les améliorations respectives de (3.20) et (3.21)

$$R \ll \frac{M(d)\rho_{1/2}(u)\log(u+1)}{\log y},$$

$$\Sigma_3 = \rho_{1/2}(u)\Big\{\tau(d)g(d) + O\Big(\frac{M(d)\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Le lemme suivant fait apparaître la loi limite $J_u(v)$, définie en (1.3).

Lemme 3.4. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* f *une fonction multiplicative positive ou nulle satisfaisant à* (3.1) *et* (3.2). *Nous avons, pour* $0 \leq v \leq 1/2$ *et* $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$\sum_{d\in S(x^v,y)} \frac{f(d)\,\rho_{1/2}(u-u_d)}{C(f)\,d\sqrt{\log y}} = \rho(u)\Big\{J_u(v) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}, \tag{3.22}$$

où $u_d := \log d/\log y$.

Démonstration. Désignons par S_1 le membre de gauche de (3.22) et posons, pour $t > 0$ et $y > 1$,

$$F(t, y) := \frac{1}{C(f)\sqrt{\log y}} \sum_{n\in S(y^t,y)} f(n).$$

Lorsque $t \geq 1$, nous pouvons appliquer l'estimation (3.3) pour $(y^t, y) \in (H_\varepsilon)$. Pour $\varepsilon_y := \log 2/\log y \leq t < 1$, nous faisons usage de la relation (3.4). Il vient

$$F(t, y) = \frac{y^t\,\rho_{1/2}(t)}{\log y} + R(t, y),$$

où

$$R(t, y) \ll \begin{cases} \dfrac{y^t \rho_{1/2}(t)}{t(\log y)^2} & (\varepsilon_y \leq t \leq 1), \\[2ex] \dfrac{y^t \rho_{1/2}(t)}{\log y} E_1(x, y) & (t > 1), \end{cases}$$

où le terme $E_1(x, y)$ est défini en (3.14).

Supposons maintenant que $x^v \geq 2$. On peut écrire

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\rho_{1/2}(u)}{C(f)\sqrt{\log y}} + \int_{2-}^{x^v} d^{-1}\rho_{1/2}\Big(u - \frac{\log d}{\log y}\Big)\,\mathrm{d}F\Big(u - \frac{\log d}{\log y}, y\Big) \\ &= \int_{\varepsilon_y^-}^{u\,v} y^{-t}\rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}F(t, y) + O\Big(\frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}}\Big) \\ &= \int_{\varepsilon_y}^{u\,v} \rho_{1/2}(u-t)\Big\{\rho_{1/2}(t) + \frac{\rho_{1/2}'(t)}{\log y}\Big\}\,\mathrm{d}t + S_2 + O\Big(\frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}}\Big) \\ &= \rho(u)\Big\{J_u(v) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\Big)\Big\} - S_4 + S_3 + S_2, \end{aligned}$$

avec

$$S_2 := \int_{\varepsilon_y}^{u\,v} y^{-t}\rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}R(t,y),$$
$$S_3 := \frac{1}{\log y}\int_{\varepsilon_y}^{u\,v} \rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}'(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$S_4 := \int_0^{\varepsilon_y} \rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Majorons tout d'abord la quantité S_4. Pour $y \geq 4$, nous avons $\varepsilon_y \leq 1/2$ et

$$S_4 \ll \int_0^{\varepsilon_y} \frac{\rho_{1/2}(u-t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ll \frac{\rho_{1/2}(u)u^2}{\sqrt{\log y}} \ll \frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}},$$

où nous avons fait usage des relations (2.5) et (2.3).

Évaluons maintenant S_3, grâce au Lemme 2.2. On a

$$\begin{aligned} S_3 \ll \frac{1}{\log y}\Big(&\int_{\varepsilon_y}^{1/2} \rho_{1/2}(u-t)t^{-3/2}\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} \rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_1^{3/2} \frac{\rho_{1/2}(u-t)}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t + \int_{3/2}^{u/2} \rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}(t)\log(t)\,\mathrm{d}t\Big), \end{aligned} \tag{3.23}$$

où les deux dernières intégrales ne sont en réalité présentes que lorsque $u \geq 2$.

Pour la première de ces quatre intégrales, nous utilisons la relation, valable pour t borné,

$$\rho_{1/2}(u-t) \ll \rho_{1/2}(u)\,\mathrm{e}^{t\xi(2u)} \ll \rho_{1/2}(u)u^{O(1)} \ll \rho(u) \qquad (u \geq 1,\ u-t \geq 1/2),$$

qui découle de (2.5) et (2.3). Nous utilisons encore cette majoration pour traiter la seconde intégrale, dans le cas $u \geq 3/2$ (en notant que, dans le cas contraire, cette seconde intégrale est trivialement $\ll \rho(u)$). Il en va de même pour la troisième intégrale, qui n'est présente que lorsque $u \geq 2$. La quatrième de ces intégrales, quant à elle, est majorée en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{u/2} \rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}(t)\log(t)\,\mathrm{d}t &\ll \log(u+1)\int_0^u \rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ll \log(u+1)\,\rho(u). \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$S_3 \ll \frac{\rho(u)}{\log y}\Big(\sqrt{\log y} + O(1) + \log(u+1)\Big) \ll \rho(u)E_1(x,y).$$

Il nous reste à présent à traiter le terme S_2. Par une intégration par parties, nous avons

$$S_2 = \Big[y^{-t}R(t,y)\rho_{1/2}(u-t)\Big]_{\varepsilon_y}^{u\,v} + \int_{\varepsilon_y}^{u\,v} R(t,y)y^{-t}\big(\rho_{1/2}(u-t)\log y + \rho'_{1/2}(u-t)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{3.24}$$

Le terme entre crochets est clairement

$$\ll \frac{\rho_{1/2}(u\,v)\rho_{1/2}(u(1-v))}{\log y} + \frac{\rho_{1/2}(\varepsilon_y)\rho_{1/2}(u-\varepsilon_y)}{\log y} \ll \frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}}.$$

Posons

$$I_2 := \frac{1}{\log y}\int_{\varepsilon_y}^{u/2} \rho_{1/2}(t)\rho'_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale de (3.24) est

$$\begin{aligned}&\ll \int_{\varepsilon_y}^{1/2} \frac{\rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t)}{t\log y}\,\mathrm{d}t + E_1(x,y)\int_{1/2}^{u/2}\rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t + I_2\\ &\ll \frac{1}{\log y}\int_{\varepsilon_y}^{1/2}\rho_{1/2}(u-t)t^{-3/2}\,\mathrm{d}t + \rho(u)E_1(x,y) + I_2 \ll \rho(u)E_1(x,y) + I_2,\end{aligned}$$

Lorsque $u \geq 3$, nous avons $u-t \geq u(1-v) \geq u/2 \geq 3/2$ et par (2.6), il vient

$$I_2 \ll \frac{\log(u+1)}{\log y}\int_{\varepsilon_y}^{u/2}\rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t \ll \rho(u)E_1(x,y).$$

Pour $1 \leq u \leq 3$, on a aisément

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \frac{1}{\sqrt{\log y}}\int_{\varepsilon_y}^{u/2}\rho'_{1/2}(u-t)\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}}\int_{1/2}^{3}\rho'_{1/2}(w)\,\mathrm{d}w\\ &\ll \frac{1}{\sqrt{\log y}} \ll \frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}}.\end{aligned}$$

Ceci montre finalement que

$$S_2 \ll \rho(u)E_1(x,y),$$

ce qui achève la démonstration lorsque $x^v \geq 2$.

Dans le cas où $x^v < 2$, nous avons $S_1 = \rho_{1/2}(u)/(C(f)\sqrt{\log y})$. Le membre de droite de (3.22) est

$$\ll S_4 + O\Big(\frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}}\Big) \ll \frac{\rho(u)}{\sqrt{\log y}},$$

et la relation (3.22) est donc bien vérifiée. □

En appliquant ce résultat pour les fonctions g et M définies en (3.7) et (3.8), nous obtenons les estimations suivantes.

Lemme 3.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $0 \le v \le 1/2$ et $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons*

$$\sum_{d \in S(x^v,y)} \frac{h\, g(d)\, \rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}} = \rho(u)\Big\{J_u(v)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}+\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \tag{3.25}$$

et

$$\sum_{d \in S(\sqrt{x},y)} \frac{g(d)M(d)\rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}} \ll \rho(u). \tag{3.26}$$

Démonstration. Les fonctions g et $n \mapsto g(n)M(n)$ vérifient toutes deux les conditions (3.1) et (3.2). En effet, on a d'une part $g(p) = 1/2 + O(1/p)$ et $M(p) = 1 + O(1/\sqrt{p})$, et, d'autre part, pour tout $\nu \ge 1$, $0 \le g(p^\nu) \le 1$ et $0 \le g(p^\nu)M(p^\nu) \ll 1$.

La relation (3.25) découle donc simplement de (3.22) appliqué pour $f = g$. Par ailleurs, pour $f = gM$, la formule (3.22) fournit

$$\begin{aligned}\sum_{d \in S(x^v,y)} \frac{g(d)M(d)\,\rho_{1/2}(u-u_d)}{C(gM)\,d\sqrt{\log y}} = \rho(u)\Big\{J_u(v) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\\ + \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\},\end{aligned} \tag{3.27}$$

et l'on en déduit (3.26) en prenant $v = 1/2$. $\square$

4. Démonstration du Théorème 1.1

Posons

$$S(x,y;v) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} F_n(v).$$

En observant que

$$F_n(v) = 1 - F_n(1-v) + O\Big(\frac{1}{\tau(n)}\Big),$$

il vient, grâce à (3.16) et (2.3),

$$S(x,y;v) + S(x,y;1-v) = 1 + O\Big(\frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} \frac{1}{\tau(n)}\Big) = 1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\Big).$$

De plus, pour $0 \le v \le 1/2$, on obtient, par changement de variable et par convolution,

$$J_u(v) + J_u(1-v) = \frac{1}{\rho(u)} \int_0^u \rho_{1/2}(w)\rho_{1/2}(u-w)\,\mathrm{d}w = 1.$$

Il suffit donc d'établir le résultat pour $0 \leq v \leq 1/2$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
S(x,y;v) &= \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} \frac{1}{\tau(n)} \Big\{ \sum_{d \mid n,\, d \leq x^v} 1 - \sum_{d \mid n,\, n^v < d \leq x^v} 1 \Big\} \\
&= T(x,y;v) - R_1(x,y;v),
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

avec

$$
T(x,y;v) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{d \in S(x^v,y)} \sum_{m \in S(x/d,y)} \frac{1}{\tau(md)}
$$

et

$$
R_1(x,y;v) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{d \in S(x^v,y)} \sum_{\substack{m \in S(x/d,y) \\ (md)^v < d}} \frac{1}{\tau(md)}.
$$

Utilisons encore la notation $u_d := \log d / \log y$. Le Lemme 3.3 nous amène à écrire

$$
T(x,y;v) = \frac{h\,x}{\Psi(x,y)} \sum_{d \in S(x^v,y)} \frac{g(d)\,\rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}} + R_2,
$$

avec

$$
\begin{aligned}
R_2 &\ll \frac{x}{\Psi(x,y)} \Big\{ E_1(x,y) \sum_{\substack{d \in S(\sqrt{x},y) \\ d \leq x/y}} \frac{g(d)M(d)\rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}} \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{d \in S(\sqrt{x},y) \\ d > x/y}} \frac{g(d)M(d)\rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}\,\log(x/d)} \Big\} \\
&\ll \frac{x\,E_1(x,y)}{\Psi(x,y)} \sum_{d \in S(\sqrt{x},y)} \frac{g(d)M(d)\rho_{1/2}(u-u_d)}{d\sqrt{\log y}} \\
&\ll \frac{x\rho(u)E_1(x,y)}{\Psi(x,y)} \ll E_1(x,y),
\end{aligned}
$$

puisque $d \leq \sqrt{x}$ implique $x/d \geq \sqrt{x}$ et $1/\log(x/d) \ll 1/\log x \leq E_1(x,y)$. Notons que l'on a ici fait usage de la majoration (3.26), et du résultat classique valable dans (H_ε) (voir par exemple [8], Corollaire III.5.19)

$$
\Psi(x,y) = x\rho(u)\Big(1 + O\Big(\frac{\log u + 1)}{\log y}\Big)\Big).
$$

Le Lemme 3.5 nous permet donc à présent d'obtenir

$$
T(x,y;v) = J_u(v) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big).
$$

Voyons maintenant comment nous pouvons estimer la quantité R_1. Nous supposons $x^v \geq 2$, car dans le cas contraire ce terme est nul. En vertu de la majoration (3.16), nous avons, avec $\varepsilon_y := \log 2/\log y$,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{\substack{d \in S(x^v,y) \\ d \geq 2}} \sum_{m \in S(d^{(1-v)/v},y)} \frac{1}{\tau(md)} \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x,y)\sqrt{\log y}} \sum_{d \in S(x^v,y),\, d\geq 2} g(d)\, M(d)\, d^{(1-v)/v} \rho_{1/2}\Big(\frac{1-v}{v}\frac{\log d}{\log y}\Big) \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x,y)\sqrt{\log y}} \int_{\varepsilon_y}^{uv} y^{t/v-t} \rho_{1/2}(t/v-t)\, \mathrm{d}\Psi_{gM}(y^t,y). \end{aligned}$$

Il vient, par intégration par parties, grâce à (3.27),

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\Psi(x,y)} \int_{\varepsilon_y}^{uv} \rho_{1/2}(t)\rho_{1/2}(t/v-t)\, y^{t/v}\, \mathrm{d}t \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x,y)} \int_{\varepsilon_y/v}^{u} \rho_{1/2}(tv)\rho_{1/2}(t-tv)\, y^t\, v\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite écrire, en faisant usage du Lemme 2.5,

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\Psi(x,y)}\Big(\int_{2\varepsilon_y}^{1} \frac{y^t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^u \rho(t)\, y^t \sqrt{v}\ \mathrm{d}t\Big) \\ &\ll \frac{y}{\Psi(x,y)\log y} + \frac{1}{\Psi(x,y)} \int_1^u \rho(t)\, y^t\ \mathrm{d}t \\ &\ll \frac{1}{\log y} + \frac{x}{\Psi(x,y)} \int_0^{u-1} \rho(u-s)\, y^{-s}\ \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

En appliquant le Corollaire III.5.15 de [8], il vient enfin

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\log y} + \frac{x\rho(u)}{\Psi(x,y)} \int_0^{u-1} y^{-s+s\xi(u)/\log y}\ \mathrm{d}s \\ &\ll \frac{1}{\log y} + \int_0^{\infty} y^{-s/2}\ \mathrm{d}s \ll \frac{1}{\log y}, \end{aligned}$$

ce qui montre que R_1 peut être considéré comme un terme d'erreur. Cela achève la preuve du Théorème 1.1. □

5. Étude asymptotique de la loi limite

5.1. Démonstration du Théorème 1.2.

Le Lemme 2.1 implique, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq u/2 - 1$,

$$\frac{\rho_{1/2}(u/2+h)\ \rho_{1/2}(u/2-h)}{\rho_{1/2}(u/2)^2} = \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\int_u^{u+2h} \xi(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}\int_{u-2h}^{u} \xi(t)\,\mathrm{d}t\Big\}$$
$$\times \sqrt{\frac{\xi'(u+2h)\xi'(u-2h)}{\xi'(u)^2}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big).$$

Le terme sous la racine est

$$\frac{(\xi'(u)+2h\xi''(u)+O(h^2/u^3))(\xi'(u)-2h\xi''(u)+O(h^2/u^3))}{\xi'(u)^2} = 1+O\Big(\frac{h^2}{u^2}\Big),$$

tandis que

$$\begin{aligned}\int_u^{u+2h}\xi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_u^{u+2h}\Big\{\xi(u)+(t-u)\xi'(u)+\frac{(t-u)^2}{2}\xi''(u) \\ &\qquad + O\Big(\frac{(t-u)^3}{u^3}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}t \\ &= 2h\xi(u)+2h^2\xi'(u)+\frac{4h^3}{3}\xi''(u)+O\Big(\frac{h^4}{u^3}\Big).\end{aligned}$$

Il vient alors, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq u/2 - 1$,

$$\frac{\rho_{1/2}(\frac{u}{2}+h)\rho_{1/2}(\frac{u}{2}-h)}{\rho_{1/2}(u/2)^2} = \exp\Big\{-2h^2\xi'(u)+O\Big(\frac{h^4}{u^3}\Big)\Big\}\Big(1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{h^2}{u^2}\Big)\Big).$$

Utilisant enfin l'estimation (2.4), nous obtenons, sous la condition supplémentaire $|h| \leq u^{3/4}$,

$$\frac{\rho_{1/2}(\frac{u}{2}+h)\ \rho_{1/2}(\frac{u}{2}-h)}{\rho(u)} = \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}}\exp\big\{-2h^2\xi'(u)\big\}\Big(1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{h^4}{u^3}\Big)\Big),$$

d'où le résultat.

5.2. Démonstration du Corollaire 1.1.

Étant donné la symétrie[6] par rapport à $v = 1/2$ de $J_u(v)$ et du membre de droite de (1.7), nous pouvons nous limiter à montrer (1.7) pour $v \in [0, 1/2]$.

Pour $u \geq 3$, posons $\eta_u := \sqrt{(\log u)/u}$ et

$$K_u(v) := \int_{u(1/2-\eta_u)}^{uv} \frac{\rho_{1/2}(u-t)\rho_{1/2}(t)}{\rho(u)}\,\mathrm{d}t.$$

6. On a, plus précisément, $J_u(1-v) = 1 - J_u(v)$ pour $v \in [0,1]$ et $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

En effectuant le changement de variable $h := t - u/2$ et en appliquant (1.6), nous obtenons pour $1/2 - \eta_u \leq v \leq 1/2$,

$$\begin{aligned}
K_u(v) &= \Big(1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)\sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}}\int_{-\sqrt{u\log u}}^{u(v-1/2)} \mathrm{e}^{-2h^2\xi'(u)}\,\mathrm{d}h \\
&= \Big(1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{2u\xi'(u)\log u}}^{\sqrt{2\xi'(u)}\,u\,(v-1/2)} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w \\
&= \Big(1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)\Big\{\Phi\Big(u\sqrt{2\xi'(u)}(v - \tfrac{1}{2})\Big) - \Phi\Big(-\sqrt{2u\xi'(u)\log u}\Big)\Big\} \\
&= \Phi\Big(u\sqrt{2\xi'(u)}(v - \tfrac{1}{2})\Big) + O\Big(\frac{1}{u}\Big),
\end{aligned}$$

où l'on a fait usage des estimations classiques

$$\Phi(-x) \ll \mathrm{e}^{-x^2/2} \qquad (x \geq 0)$$

et

$$v\,\xi'(v) = 1 + \frac{1}{\log(v)} + O\Big(\frac{\log_2 v}{(\log v)^2}\Big) \qquad (v \geq 3).$$

Écrivons ensuite

$$\begin{aligned}
J_u(1/2) &= \tfrac{1}{2}J_u(1) = \tfrac{1}{2} \\
&= J_u(1/2 - \eta_u) + K_u(1/2) \\
&= J_u(1/2 - \eta_u) + \tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{u}\Big).
\end{aligned}$$

Comme $v \mapsto J_u(v)$ est croissante, cela prouve, pour $0 \leq v \leq 1/2 - \eta_u$, que

$$J_u(v) \leq J_u(1/2 - \eta_u) \ll \frac{1}{u},$$

et (1.7) est donc bien vérifiée dans ce cas.

Dans l'intervalle complémentaire $1/2 - \eta_u \leq v \leq 1/2$, nous avons

$$\begin{aligned}
J_u(v) &= J_u(1/2 - \eta_u) + K_u(v) \\
&= \Phi\Big(u\sqrt{2\xi'(u)}(v - \tfrac{1}{2})\Big) + O\Big(\frac{1}{u}\Big),
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure.

Remerciements. L'auteur remercie Gérald Tenenbaum pour l'aide qu'il lui a apportée tout au long de l'élaboration de ce travail.

Bibliographie

[1] R. de la Bretèche, G. Tenenbaum, *Entiers friables : inégalitéé de Turán-Kubilius et applications*. Invent. Math. **159**, (2005), 531–588.

[2] J.-M. Deshouillers, F. Dress & G. Tenenbaum, *Lois de répartition des diviseurs, 1*. Acta Arith. **34**, (1979), 273–285.

[3] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, *On a class of differential-difference equations arising in number theory*. J. Analyse **61**, (1993), 145–179.

[4] G. Nemes, *An asymptotic expansion for the Bernoulli numbers of the second kind*. J. Integer Seq. **14**, (2011), article 11.4.8.

[5] H. Smida, *Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman*. Acta Arith. **59**, (1991), 123–143.

[6] H. Smida, *Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier*. Acta Arith. **63**, (1993), 21–50.

[7] J. F. Steffensen, *On Laplace's and Gauss' summation formulas*. Skandinavisk Aktuarietidskrift (1924), 1–15.

[8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, Belin, (2008).

[9] G. Tenenbaum, J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables*. J. Reine Angew. Math. **564**, (2003), 119–166.

Joseph Basquin
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France
E-mail: `joseph.basquin@univ-orleans.fr`