Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jean-Yves ENJALBERT et HOANG NGOC MINH

Propriétés combinatoires et prolongement analytique effectif de polyzêtas de Hurwitz et de leurs homologues

Tome 23, n° 2 (2011), p. 353-386.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2011__23_2_353_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **23** (2011), 353-386

Propriétés combinatoires et prolongement analytique effectif de polyzêtas de Hurwitz et de leurs homologues

par Jean-Yves ENJALBERT et HOANG NGOC MINH

Résumé. Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude d'une famille de séries paramétrées de Dirichlet qui englobe les polyzêtas colorés d'une part et les polyzêtas de Hurwitz d'autre part. Cette famille de fonctions vérifie deux relations de mélange ; nous mentionnons aussi des relations quasi-périodiques et des relations de translation de variables. Nous donnons un codage en terme d'intégrales itérées des séries étudiées, qui conduit à leur représentation intégrale. Celle-ci permet d'en effectuer un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$. Nous finissons par la description d'un algorithme calculant les multi-résidus de ce prolongement.

Abstract. *Combinatorial properties and effective analytic continuation of Hurwitz polyzetas and their analogous.*

In this work, we study a family of Parametrized Dirichlet generating series which contains coloured polyzeta and Hurwitz polyzeta functions. This family verifies two shuffle relations; and we also include quasi-periodic relations and translational variable relations. Thanks to encoding with iterated integral, we obtain an integral representation of this series and deduce their analytic continuation over $\mathbb{C}^r$. At the end, we describe an algorithm giving the residues of this continuation.

1. Introduction

L'analyse d'algorithmes [13, 5, 6] et le calcul des *diagrammes de Feynman* en mécanique quantique [2, 3, 1] conduit aux *polyzêtas colorés*, c'est-à-dire aux sommes suivantes :

$$\zeta\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_r \\ q^{i_1}, \ldots, q^{i_r} \end{pmatrix} = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{q^{i_1 n_1} \ldots q^{i_r n_r}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}, \tag{1.1}$$

où N est un entier positif fixé, et où q est une racine primitive N-ième de l'unité. L'algèbre des polyzêtas colorés contient, en plus des polyzêtas, des

Manuscrit reçu le 23 décembre 2009.

nombres transcendants comme :

$$\zeta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}=-\log(2). \tag{1.2}$$

Ces nombres sont apparus également comme des coefficients des matrices de périodes dans l'étude déquations fonctionnelles matricielles des polylogarithmes par Dupont [7], ou encore dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires avec singularités considérés par Dyson dans l'électrodynamique quantique [8] (voir également [20] pour une introduction à nos techniques développées dans ce cadre).

Nous avons introduit une autre extension des polyzêtas, que nous appelons *polyzêtas de Hurwitz*, qui sont indexés par un double multi-indice [21, 12] :

$$\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_r;t_r)]=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{1}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}, \tag{1.3}$$

où les s_i sont des entiers positifs, et où les t_i sont des variables formelles. On retrouve les polyzêtas en spécialisant toutes les variables formelles en $t_i=0$ pour tout i. L'algèbre des polyzêtas de Hurwitz contient quant à elle, en plus des polyzêtas, des constantes telles que le nombre de Catalan :

$$G=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\frac{1}{16}\left[\zeta\left(2;-\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(2;\frac{1}{4}\right)\right]. \tag{1.4}$$

et des polyzêtas colorés. En effet, nous verrons que la périodicité de $\{q^n\}_{n\geq 1}$ permet d'exprimer les polyzêtas colorés sous forme de combinaisons linéaires des polyzêtas de Hurwitz à coefficients dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(q)$ [21] :

$$\begin{aligned}\zeta\begin{pmatrix}s_1,\ldots,s_r\\q^{i_1},\ldots,q^{i_r}\end{pmatrix}&=\frac{1}{m^{s_1+\ldots+s_r}}\\&\sum_{a_1-a_2,\ldots,a_{r-1}-a_r,a_r=1}^{m}q^{i_1a_1+\ldots+i_ra_r}\zeta\left[\left(s_1;-\frac{a_1}{m}\right),\ldots,\left(s_r;-\frac{a_r}{m}\right)\right].\end{aligned} \tag{1.5}$$

Par conséquent, l'étude des *relations polynomiales* entre les polyzêtas colorés peut être faite à travers celle des polyzêtas de Hurwitz ayant pour paramètres des nombres rationnels de l'intervalle $[0,1[$.

Inversement, ces dernièrs s'expriment également à l'aide des polyzêtas colorés. En effet, pour les paramètres a_j satisfaisant les conditions

$$1\leq a_1-a_2,\ldots,a_{r-1}-a_r,a_r<m, \tag{1.6}$$

nous avons le résultat partiel suivant [12] :

$$\zeta\left[\left(s_1;-\frac{a_1}{m}\right),\ldots,\left(s_r;-\frac{a_r}{m}\right)\right]=m^{s_1+\ldots+s_r-r} \sum_{i_1,\ldots,i_r=0}^{m-1} q^{-(i_1a_1+\ldots+i_ra_r)}\zeta\binom{s_1,\ldots,s_r}{q^{i_1},\ldots,q^{i_r}}. \tag{1.7}$$

En toute généralité, les variables formelles $t_1,\ldots,t_r$ ont pour vocation de permettre le calcul de certaines séries génératrices commutatives des polyzêtas, *i.e.* les séries génératrices commutatives des intégrales itérées, le long des chemins $0\rightsquigarrow 1$, sur les deux 1-formes différentielles

$$\omega_0(z)=\frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_1(z)=\frac{dz}{1-z} \tag{1.8}$$

codées par les séries génératrices non commutatives sur l'alphabet $X=\{x_0,x_1\}$ de la forme

$$x_0^{s_1-1}(t_1x_0)^{*s_1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}(t_rx_0)^{*s_r}x_1. \tag{1.9}$$

Ces séries génératrices proviennent des approximations rationnelles [18] des séries génératrices des systèmes dynamiques non linéaires avec deux singulatités (voir [22])

$$\begin{cases} y(z) &= f(q(z)),\\ dq(z) &= A_0(q)\,\omega_0(z)+A_1(q)\,\omega_1(z),\\ q(z_0) &= q_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où,

- l'état $q=(q_1,\ldots,q_n)$ évolue sur une variété analytique complexe de dimension n dénotée par Q,
- q_0 indique l'état initial en z_0,
- l'observation f est élément de l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes sur Q.
- pour $i=0..1, A_i$ est un champ de vecteur analytique sur Q défini par

$$A_i(q)=\sum_{j=1}^n A_i^j(q)\frac{\partial}{\partial q_j},\ \text{avec}\ A_i^j(q)\in\mathcal{O},\ \text{pour}\ j=1,\ldots,n, \tag{1.11}$$

Lorsque ces champs de vecteur sont linéaires, ces systèmes dynamiques sont des systèmes bilinéaires [14, 20] conduisant aux matrices de périodes que nous avons évoquées plus haut.

Les séries génératrices non commutatives en (1.9) codent, en fait, le développement de Volterra de la sortie y [14, 18] dont les variables formelles $t_1,\ldots,t_r$ proviennent des combinaisons linéaires des valeurs propres du linéarisant du champ de vecteur $A_0(q)$ [17, 18]. Les coefficients du développement de Taylor de y et les comportements asymptotiques de y en les singularités et des coefficients de Taylor à l'infini sont également détaillés dans [22].

Ces études gagnent à être étendues aux systèmes avec m singularités reliées par une équation algébrique de degré $m+1$ par exemple ($m > 1$). Ainsi, en élargissant le cadre des propriétés combinatoires [12] et en précisant l'effectivité du prolongement analytique des polyzêtas de Hurwitz, déjà obtenu dans [12], et de leurs homologues, nous organisons le travail de cet article comme suit :

(i) Dans la Section 2, nous étudions des propriétés combinatoires des séries

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{\xi_1^{n_1}\ldots\xi_r^{n_r}}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}, \tag{1.12}$$

où $\mathbf{t} = (t_1,\ldots,t_r)$ est une famille de paramètres et $\xi_1,\ldots,\xi_r$ des nombres complexes. Ce sont des fonctions génératrices paramétrées de Dirichlet qui englobent les cas des polyzêtas colorés et polyzêtas de Hurwitz (sous-section 2.1).

- Les fonctions génératrices paramétrées de Dirichlet pouvant s'exprimer comme des intégrales itérées (dont on rappelle des propriétés en 2.1.3), les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ vérifient donc des relations de mélange dans l'algèbre des fonctions génératrices paramétrées de Dirichlet.
  Le théorème 1 de la sous-section 2.2 précise que tout élément de l'algèbre engendré par les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ s'exprime comme combinaison linéaire de séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ uniquement.
- D'autre part, leurs sommes tronquées généralisent les séries quasi-symétriques de Gessel [16]. On établit en sous-section 2.3 que ces sommes tronquées vérifient des relations de mélange dont on précise la loi dans la proposition 3. Ces relations se prolongent aux séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ (Théorème 2).
- En sous-section 2.4, on montre par la proposition 5 une famille de relations (Egalité 5) dans la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre des polyzêtas colorés $\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{i}}}$ pour une racine de l'unité q fixée.
- Enfin ces objets vérifient un certain nombre d'équations de translation : nous en donnons une en sous-section 2.5 car elle permettera d'obtenir de manière effective les multi-résidus en section 3.

(ii) L'objectif de la Section 3 est d'obtenir un prolongement méromorphe pour $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$ des séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ initialement définies pour une composition $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^r$ avec $s_1 > 1$.

- Dans un premier temps, nous transformons, en sous-section 3.1, l'expression de ces séries afin d'en trouver une forme intégrale. En effet la forme intégrale donnée par le Théorème 3 permet déjà d'obtenir un prolongement holomorphe sur l'ouvert

$$\Re(s_1) > 0, \dots, \Re(s_r) > 0, \text{ et } \forall i \in \{2, \dots, r\},\ \Re\Big(\sum_{j=1}^{i} s_j\Big) > i. \tag{1.13}$$

  Cet ouvert peut même être plus important selon les valeurs des complexes ξ_i (remarque 9).
- Une première approche pour étendre ce prolongement intégral en un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$ consiste à écrire la représentation intégrale en termes de régularisées, en généralisant le point de vue adopté en [12]. La sous-section 3.2 rappelle les définitions et résultats utilisés des régularisées entre 0 et 1.
- La sous-section 3.3 utilise un découpage en deux parties de la représentation intégrale (égalité (3.11)) qui s'expriment en terme de régularisées. Ceci montre au Théorème 5 le prolongement méromorphe des séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s})$ et en situe les “multipôles”, mais l'expression en terme de régularisées ne fournit pas une expression simple des multi-résidus.
- La sous-section 3.4 propose un algorithme récursif, inspiré des propositions de Jean Ecalle sur les polyzêtas colorés, pour calculer ces multi-résidus [9]. L'idée est d'inverser l'équation de translation obtenue en 2.5.

2. Étude combinatoire

2.1. Définitions et rappels.

2.1.1. ***Objets de base.*** Introduisons tout d'abord les objets travaillés dans cet article en gardant les notations de [12]. Dans un premier temps, nous allons considérer des fonctions à variables dans $\mathbb{N}^r$.

Définition 1. *Une composition* $\mathbf{s}$ *est une séquence d'entiers naturels non nuls :*

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{N}^r_{>0}.$$

L'entier r est sa profondeur, son poids est l'entier $\sum_{i=1}^{r} s_i$.

L'objet générique, qui chapeaute les fonctions étudiées par la suite, se définit sur les compositions par une somme sur des muti-indices.

Définition 2. *À toute famille finie $(F_i)_{1\leq i\leq r}$ de séries : $F_i(z) = \sum_{n\geq 1} f_{i,n}z^n$, on associe la fonction génératrice paramétrée de Dirichlet par*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\mathbf{t}};\mathbf{s}) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{f_{1,n_1-n_2}\ldots f_{r-1,n_{r-1}-n_r}f_{r,n_r}}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}},$$

pour toute composition $\mathbf{s}$ *de profondeur r, avec* $\mathbf{t} = (t_1,\ldots,t_r)$ *une famille de r paramètres.*

Dans cet article, nous allons nous focaliser sur les fonctions paramétrées de Dirichlet des séries suivantes :

Notation 1. *On notera $(F_\xi) = (F_{\xi,i})_{1\leqslant i\leqslant r}$ la famille de séries associée à la suite de nombres complexes $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $f_{i,n} = \prod_{k=1}^{i}\xi_k$, i.e.*

$$F_{\xi,i}(z) = \sum_{n>0}\left(\prod_{k=1}^{i}\xi_k\right)^n z^n$$

pour tout $i\in\{1,\ldots,r\}$.

Proposition 1. *Pour toute famille (F_ξ) définie comme dans la notation 1, la fonction génératrice paramétrée de Dirichlet est :*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{\xi_1^{n_1}\ldots\xi_r^{n_r}}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}.$$

Démonstration. En effet, avec la famille (F_ξ), pour tout r-uplet $(n_1,\ldots,n_r)$ de $\mathbb{N}^r$ tel que $n_1>\ldots>n_r>0$,

$$\begin{aligned}
&f_{1,n_1-n_2}\ldots f_{r-1,n_{r-1}-n_r}f_{r,n_r}\\
&\qquad= (\xi_1)^{n_1-n_2}(\xi_1\xi_2)^{n_2-n_3}\ldots\left(\prod_{k=1}^{r-1}\xi_k\right)^{n_{r-1}-n_r}\left(\prod_{k=1}^{r}\xi_k\right)^{n_r}\\
&\qquad= \xi_1^{\sum_{k=1}^{r-1}(n_k-n_{k+1})+n_r}\,\xi_2^{\sum_{k=2}^{r-1}(n_k-n_{k+1})+n_r}\ldots\xi_{r-1}^{n_{r-1}-n_r+n_r}\,\xi_r^{n_r}\\
&\qquad= \xi_1^{n_1}\,\xi_2^{n_2}\ldots\xi_{r-1}^{n_{r-1}}\,\xi_r^{n_r}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 1. *Il apparaît donc que, lorsque $\left|\prod_{k=1}^{i}\xi_k\right|\leq 1$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, la série $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ converge dès que $s_1>1$.*

Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des uplets complexes vérifiant cette condition :

$$\forall i, \left|\prod_{k=1}^{i}\xi_k\right|\leq 1.$$

Cet ensemble $\mathcal{E}$ contient les boules unités.

2.1.2. *Exemples de fonctions* $\mathbf{Di(F_{\xi,t};s)}$. La famille de fonctions $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ contient certains polyzêtas déjà étudiés comme les polyzêtas colorés (appelés aussi fonctions zêtas multiples modulées [10]) :

Définition 3. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et q une racine m-ème de l'unité. Pour toute composition $\mathbf{i}$ on note $q^{\mathbf{i}}$ la composition $q^{\mathbf{i}} = (q^{i_1}, \ldots, q^{i_r})$.*

Le polyzêta coloré associé à $\mathbf{s}$ et $q^{\mathbf{i}}$ est défini lorsque $0 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m-1$ par :

$$\zeta\begin{pmatrix}\mathbf{s}\\ q^{\mathbf{i}}\end{pmatrix} = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{q^{i_1 n_1} \ldots q^{i_r n_r}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}.$$

Remarque 2. *Le polyzêta coloré $\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{i}}}$ apparaît comme la fonction génératrice de Dirichlet associée à la famille $F_k(z) = \sum_{n\geq 1} q^{(i_1+\ldots+i_k)n} z^n$:*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\mathbf{0}};\mathbf{s}) = \zeta\begin{pmatrix}\mathbf{s}\\ q^{\mathbf{i}}\end{pmatrix},$$

avec le paramètre $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Autrement dit, en considérant la notation 1,

$$\zeta\begin{pmatrix}\mathbf{s}\\ q^{\mathbf{i}}\end{pmatrix} = \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{q^{\mathbf{i}},\mathbf{0}};\mathbf{s}).$$

Les fonctions $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ généralisent les polyzêtas colorés par les nombres du numérateur, qui ne sont pas forcément des racines de l'unité, mais aussi par l'introduction de paramètres au dénominateur. En ce sens elles généralisent les polyzêtas "paramétrés", eux aussi déjà étudiés en [12] ; plus précisément :

Définition 4. *On appelle polyzêta de Hurwitz la fonction qui, pour une famille de paramètres $\mathbf{t}$, associe à chaque composition le réel*

$$\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r} \frac{1}{(n_1 - t_1)^{s_1} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}}.$$

Remarque 3. *$\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t})$ correspond au cas où chaque $\xi_i = 1$: en effet, en notant $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$,*

$$\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t}) = \mathrm{Di}(F_{\mathbf{1};\mathbf{t}}, \mathbf{s}).$$

Rappelons (voir [21]) que chaque polyzêta coloré se décompose en combinaison linéaire des polyzêtas de Hurwitz par

$$(2.1)\quad \zeta\begin{pmatrix}s_1, \ldots, s_r\\ q^{i_1}, \ldots, q^{i_r}\end{pmatrix} = \frac{1}{m^{s_1+\ldots+s_r}} \sum_{a_1 - a_2, \ldots, a_{r-1} - a_r, a_r = 1}^{m} q^{i_1 a_1 + \ldots + i_r a_r} \zeta\left[\left(s_1; -\frac{a_1}{m}\right), \ldots, \left(s_r; -\frac{a_r}{m}\right)\right].$$

2.1.3. ***Intégrales itérées.*** Soit X un alphabet. On note X^* le monoïde libre (pour la concaténation) généré par X : c'est l'ensemble des mots sur X. Le mot vide sera noté "ϵ".

Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre commutative A, on note $A\langle X\rangle$ (respectivement $A\langle\langle X\rangle\rangle$) l'anneau des polynômes (resp. des séries formelles) non-commutatifs (resp. non-commutatives). Une série formelle S de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ peut s'écrire

$$S = \sum_{w\in X^*} \langle S \mid w\rangle\, w. \tag{2.2}$$

Définition 5. *Le produit de battage (ou shuffle) est une application bilinéaire de $A\langle X\rangle$ définie recursivement par*

$$\epsilon \sqcup\!\sqcup u = u \sqcup\!\sqcup \epsilon = u \quad \textit{et} \quad au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v),$$

pour tout $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$.

On étend le produit de battage sur $A\langle\langle X\rangle\rangle$ par distributivité : pour toute série S et T de $A\langle\langle X\rangle\rangle$,

$$S \sqcup\!\sqcup T = \sum_{u,v\in X^*} \langle S|u\rangle\langle T|v\rangle\, u \sqcup\!\sqcup v. \tag{2.3}$$

Exemple 1. *Si x_i, $0 \leqslant i \leqslant 3$, sont des lettres d'un alphabet X,*

$$\begin{aligned}
x_0x_1x_2 \sqcup\!\sqcup x_0x_3 &= x_0(x_1x_2 \sqcup\!\sqcup x_0x_3) + x_0(x_0x_1x_2 \sqcup\!\sqcup x_3)\\
&= x_0x_1(x_2 \sqcup\!\sqcup x_0x_3) + x_0^2(x_1x_2 \sqcup\!\sqcup x_3)\\
&\quad + x_0^2(x_1x_2 \sqcup\!\sqcup x_3) + x_0x_3(x_0x_1x_2 \sqcup\!\sqcup \epsilon)\\
&= x_0x_1x_2(\epsilon \sqcup\!\sqcup x_0x_3) + x_0x_1x_0(x_2 \sqcup\!\sqcup x_3)\\
&\quad + x_0^2x_1(x_2 \sqcup\!\sqcup x_3) + x_0^2x_3(x_1x_2 \sqcup\!\sqcup \epsilon)\\
&\quad + x_0^2x_1(x_2 \sqcup\!\sqcup x_3) + x_0^2x_3(x_1x_2 \sqcup\!\sqcup \epsilon) + x_0x_3x_0x_1x_2\\
&= x_0x_1x_2x_0x_3 + x_0x_1x_0x_2x_3 + x_0x_1x_0x_3x_2 + x_0x_3x_0x_1x_2\\
&\quad + 2x_0^2x_1x_2x_3 + 2x_0^2x_1x_3x_2 + 2x_0^2x_3x_1x_2.
\end{aligned}$$

Associons à chaque lettre x_i de l'alphabet X une 1-forme différentielle ω_i, definie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ simplement connexe. Pour tout chemin $z_0 \rightsquigarrow z$ dans $\mathcal{U}$, l'*intégrale itérée de Chen* associée au mot $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ le long du chemin $z_0 \rightsquigarrow z$, notée $\alpha_{z_0}^z(w)$, est définie de manière récursive par [4] :

$$\begin{aligned}
\alpha_{z_0}^z(w) &= \int_{z_0 \rightsquigarrow z} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_k}\\
&= \int_{z_0 \rightsquigarrow z} \omega_{i_1}(z_1) \int_{z_0 \rightsquigarrow z_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_k}\\
&= \int_{z_0 \rightsquigarrow z} \omega_{i_1}(z_1) \alpha_{z_0}^z(w_{i_2} \ldots w_{i_k}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

avec $\alpha_{z_0}^z(\varepsilon) = 1$.

Nous ne rappellerons ici que les propriétés suivantes (cf [12] pour l'ensemble des règles) :

- *La règle d'intégration par parties* : pour tout mot u et v de X^*,

$$\alpha_{z_0}^z(u \sqcup\!\sqcup v) = \alpha_{z_0}^z(u)\alpha_{z_0}^z(v). \tag{2.5}$$

- *Le théorème de convolution* : Pour toutes lettres x et x' associées respectivement aux formes ω et ω', si φ est une primitive de ω, alors, pour tout entier naturel n et tout mot w,

$$\alpha_{z_0}^z(x^n x' w) = \int_{z_0}^{z} \frac{(\varphi(z) - \varphi(z_1))^n}{n!}\omega'(z_1)\alpha_{z_0}^{z_1}(w). \tag{2.6}$$

En définissant l'intégrale itérée de tout polynôme (resp. série formelle) S par

$$\alpha_{z_0}^z(S) = \sum_{w \in X^*} \langle S|w\rangle \alpha_{z_0}^z(w), \tag{2.7}$$

la règle d'intégration par parties devient : pour tout polynôme (resp. série formelle) S et T.

$$\alpha_{z_0}^z(S \sqcup\!\sqcup T) = \alpha_{z_0}^z(S)\alpha_{z_0}^z(T). \tag{2.8}$$

2.2. Relations de mélange des $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,t};\mathbf{s})$. Pour coder, en termes d'intégrales itérées, les fonctions génératrices paramétrées de Dirichlet, on relie les familles de paramétres $\mathbf{t} = \{t_1, \cdots, t_r\}$ et $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_r\}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = \bar{t}_1 + \cdots + \bar{t}_r, \\ t_2 = \bar{t}_2 + \cdots + \bar{t}_r, \\ \vdots \\ t_r = \bar{t}_r. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \bar{t}_1 = t_1 - t_2, \\ \bar{t}_2 = t_2 - t_3, \\ \vdots \\ \bar{t}_r = t_r. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

À chaque lettre x_i, $i \geqslant 1$, de l'alphabet $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, on associe la forme différentielle $\omega_i(z) = F_i(z)dz/z^{1+\bar{t}_i}$, où F_i est la série $F_i(z) = \sum_{n\geq 1} f_{i,n}z^n$. On associe à $x_0 \in X$ la forme $\omega_0(z) = dz/z$. Alors,

Proposition 2 ([19])**.** *Soit* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ *une composition, définissons le mot associé* $w = x_0^{s_1-1}x_{i_1}\ldots x_0^{s_r-1}x_{i_r}$. *Alors,*

$$\alpha_0^z(w) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{f_{i_1,n_1-n_2}\cdots f_{i_{r-1},n_{r-1}-n_r} f_{i_r,n_r}}{(n_1 - t_1)^{s_1}\ldots(n_r - t_r)^{s_r}} z^{n_1 - t_1}.$$

En particulier, $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_t;\mathbf{s}) = \alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_r)$.

On peut ainsi exprimer la sous-famille $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,t};\mathbf{s})$ en termes d'intégrales itérées ; précisons les formes différentielles en jeu pour cette famille.

Soit $\xi = (\xi_n)$ une suite de nombres complexes, T une famille de paramètres. On utilise un alphabet X^* indexé sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times T$ et on travaille avec l'alphabet $X = \{x_0\} \cup X^*$. À chaque lettre x de X on associe la forme

$$\begin{cases} \omega_0(z) = \dfrac{dz}{z} & \text{si } x = x_0 \\ \omega_{i,\xi,t}(z) = \dfrac{\prod_{k=1}^{i} \xi_k}{1 - \prod_{k=1}^{i} \xi_k\, z} \times \dfrac{dz}{z^t} & \text{si } x = x_{i,\xi,t} \text{ avec } i \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

En travaillant avec une famille (F_ξ) de Notation 1, il découle :

Corollaire 1. *Pour toute composition* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$*, si* $(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathcal{E}$*,*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,t}; \mathbf{s}) = \alpha_0^1(x_0^{s_1-1} x_{1,\xi,\overline{t_1}} \ldots x_0^{s_r-1} x_{r,\xi,\overline{t_r}}).$$

Remarque 4. *Dans* $x_{i,\xi,t}$*, seuls les* i *premiers termes de* ξ *sont utilisés ; on peut donc se contenter de noter* $x_{i,\xi,t} = x_{i,(\xi_1,\ldots,\xi_i),t}$.

Démonstration. En effet,

$$F_{\xi,i}(z) = \sum_{n>0} \Big(\prod_{k=1}^{i} \xi_k \Big)^n z^n = \frac{\prod_{k=1}^{i} \xi_k\, z}{1 - \prod_{k=1}^{i} \xi_k\, z}$$

donc la forme associée à $x_{i,\xi,\overline{t_i}}$, $i \geqslant 1$, est

$$F_{\xi,i}(z) \frac{dz}{z^{1+\bar{t}_i}} = \omega_{i,\xi,\overline{t_i}}(z).$$

L'application de la proposition 2 donne le résultat. □

Théorème 1. *Soit* T *une famille de paramètres, notons* $(T; +)$ *le sous-groupe engendré par* T*. Soit* $\mathcal{C}$ *un sous-groupe multiplicatif de* $(\mathbb{C}^*; .)$*.*

Pour tout sous-anneau A *de* $\mathbb{C}$*, la* A*-algèbre engendrée par les* $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; .)$*, lorsque* ξ *décrit l'ensemble des suites à valeurs dans* $\mathcal{C}$ *avec la condition de convergence de la remarque 1 et que* $\mathbf{t}$ *décrit l'ensemble des familles finies à éléments dans* $\mathcal{T}$*, est le* A*-module engendré par les* $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; .)$ *lorsque* ξ *décrit* $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ *en vérifiant la condition de la remarque 1 et que* $\mathbf{t}$ *décrit l'ensemble des familles finies à éléments dans* $\mathcal{T}$*.*

Exemple 2. *Considérons les produits de*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,(t_1,t_2)}; (2;1)) = \alpha_0^1(x_0 x_{1,\xi,\bar{t}_1} x_{2,\xi,\bar{t}_2}) \quad \textit{et}$$
$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',t'}; (2)) = \alpha_0^1(x_0 x_{1,\xi',\overline{t'}}).$$

En profondeur 1*,* $\overline{t'} = t'$*, on peut donc écrire plus simplement*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',t'}; (2)) = \alpha_0^1(x_0 x_{1,\xi',\bar{t}'}).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,(t_1,t_2)}; (2;1))\, \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',t'}; (2)) = \alpha_0^1(x_0 x_{1,\xi,\bar{t}_1} x_{2,\xi,\bar{t}_2} \sqcup\!\sqcup\, x_0 x_{1,\xi',t'}).$$

Mais, par l'exemple 1

$$\begin{aligned}x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2} \sqcup\!\sqcup\, x_0x_{1,\xi',t'} &= x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}x_0x_{1,\xi',t'} + x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_0x_{2,\xi,\bar t_2}x_{1,\xi',t'}\\ &+ x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_0x_{1,\xi',t'}x_{2,\xi,\bar t_2} + x_0x_{1,\xi',t'}x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}\\ &+ 2x_0^2x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}x_{1,\xi',t'} + 2x_0^2x_{1,\xi,\bar t_1}x_{1,\xi',t'}x_{2,\xi,\bar t_2}\\ &+ 2x_0^2x_{1,\xi',t'}x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}.\end{aligned}$$

Calculons le premier terme $\alpha_0^1(x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}x_0x_{1,\xi',t'})$ *:*

$$\begin{aligned}&\alpha_0^1(x_0x_{1,\xi,\bar t_1}x_{2,\xi,\bar t_2}x_0x_{1,\xi',t'})\\ &= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\sum_{m_1>0}\xi_1^{m_1}z_2^{m_1-\bar t_1-1}dz_2\int_0^{z_2}\sum_{m_2>0}(\xi_1\xi_2)^{m_2}z_3^{m_2-\bar t_2-1}dz_3\\ &\int_0^{z_3}\frac{dz_4}{z_4}\int_0^{z_4}\sum_{m>0}{\xi'}_1^{m}z^{m-t'-1}dz\\ &= \sum_{m_1,m_2,m>0}\frac{\xi_1^{m_1}(\xi_1\xi_2)^{m_2}{\xi'}_1^{m}}{(m_1+m_2+m-\bar t_1-\bar t_2-t')^2(m_2+m-\bar t_2-t')(m-t')^2}\\ &= \sum_{m_1,m_2,m>0}\frac{\xi_1^{m_1+m_2+m}\xi_2^{m_2+m}\left(\frac{{\xi'}_1}{\xi_1\xi_2}\right)^m}{(m_1+m_2+m-\bar t_1-\bar t_2-t')^2(m_2+m-\bar t_2-t')(m-t')^2}\\ &= \sum_{n_1>n_2>n_3>0}\frac{\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\left(\frac{{\xi'}_1}{\xi_1\xi_2}\right)^{n_3}}{(n_1-t_1-t')^2(n_2-t_2-t')(n_3-t')^2}\\ &= \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,\xi_2,{\xi'}_1/(\xi_1\xi_2)),(t_1+t',t_2+t',t')};(2;1;2)).\end{aligned}$$

En calculant de même les autres termes, il en découle :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,(t_1,t_2)};(2;1))\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',t'};(2))\\ &\qquad= \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,\xi_2,{\xi'}_1/(\xi_1\xi_2)),(t_1+t',t_2+t',t')};(2;1;2))\\ &\qquad+ \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,\xi_2,{\xi'}_1/(\xi_1\xi_2)),(t_1+t',t_2+t',t')};(2;2;1))\\ &\qquad+ \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,{\xi'}_1/\xi_1,\xi_1\xi_2/{\xi'}_1)),(t_1+t',t_2+t',t_2)};(2;2;1))\\ &\qquad+ \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{({\xi'}_1,\xi_1/{\xi'}_1,\xi_2),(t_1+t',t_1,t_2)};(2;2;1))\\ &\qquad+ 2\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,\xi_2,{\xi'}_1/(\xi_1\xi_2)),(t_1+t',t_2+t',t')};(3;1;1))\\ &\qquad+ 2\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1,{\xi'}_1/\xi_1,\xi_1\xi_2/{\xi'}_1)),(t_1+t',t_2+t',t_2)};(3;1;1))\\ &\qquad+ 2\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{({\xi'}_1,\xi_1/{\xi'}_1,\xi_2),(t_1+t',t_1,t_2)};(3;1;1)).\end{aligned}$$

Démonstration. En effet, le produit de $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ et $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',\mathbf{t}'};\mathbf{s}')$, où ξ et ξ' sont des suites de $\mathcal{C}$, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$ des familles finies à éléments dans $\mathcal{T}$ et $\mathbf{s}$ et $\mathbf{s}'$ sont des compositions, est le produit des intégrales itérées

$\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{1,\xi,\bar{t}_{t_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi,\bar{t}_{t_r}})$ et $\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{1,\xi',\bar{t}_{t'_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi',\bar{t}_{t'_r}})$. Or,

$$\begin{aligned}&\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{1,\xi,\bar{t}_{t_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi,\bar{t}_{t_r}})\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{1,\xi',\bar{t}_{t'_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi',\bar{t}_{t'_r}})\\&\quad=\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{1,\xi,\bar{t}_{t_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi,\bar{t}_{t_r}}\sqcup\!\sqcup\, x_0^{s_1-1}x_{1,\xi',\bar{t}_{t'_1}}\ldots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi',\bar{t}_{t'_r}}),\end{aligned}$$

donc ce produit apparaît comme des sommes de termes $\alpha_0^1(x)$, avec x un mot de X, que l'on peut écrire comme une série paramétrée de Dirichlet, à l'aide de produits ou de quotients de termes de ξ et ξ', et pour paramètres des sommes de $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$. De plus, les termes de ξ et de ξ' provenant de produits de séries géométriques vérifiant la condition de la remarque 1, leur réorganisation conserve la condition de convergence. □

2.3. Quasi-mélange. On vient de voir que les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ vérifient un produit de mélange par leur expression en terme d'intégrale itérée (représentation "continue"). On peut aussi voir ces séries comme la limite de leurs sommes tronquées ("vision discrète"). Nous allons ici étudier ce point de vue, plus spécifiquement l'apport de la combinatoire de ces sommes finies.

Soit $\lambda=(\lambda_n)$ une suite de paramètres. Pour toute composition $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_r)$ et tout r-uplet $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_r)\in\mathbb{C}^r$, on pose, pour tout entier naturel $n>0$,

$$M^n_{\mathbf{s},\xi}(\lambda)=\sum_{n>n_1>\ldots>n_r>0}\prod_{i=1}^r\xi_i^{n_i}\lambda_{n_i}^{s_i}. \tag{2.11}$$

On définit aussi $M^n_{(),()}(\lambda)=1$, où $()$ désigne indifféremment la liste vide des compositions et des multi-indices complexes.

Notons que, dans le cas particulier où $\xi_1=1,\ldots,\xi_r=1$, $M^n_{\mathbf{s},\mathbf{1}}(\lambda)$ est une fonction quasi-symétrique introduite par Gessel en [16].

Définition 6. *Soient* $\mathbf{s}=(s_1,\mathbf{s}')$ *et* $\mathbf{r}=(r_1,\mathbf{r}')$ *deux compositions.*

Le quasi-mélange (ou stuffle, ou battage contractant) de $\mathbf{s}$ *et* $\mathbf{r}$ *est une application bilinéaire définie récursivement par*

$$\begin{aligned}&()\uplus\mathbf{s}=\mathbf{s}\uplus()=\mathbf{s}\qquad\textit{et}\\&\mathbf{s}\uplus\mathbf{r}=(s_1,\mathbf{s}'\uplus\mathbf{r})+(r_1,\mathbf{s}\uplus\mathbf{r}')+(s_1+r_1,\mathbf{s}'\uplus\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}(1)\uplus(3)&=(1,3)+(3,1)+(4)\qquad\textit{donc}\\(2,1)\uplus(3)&=(2,(1)\uplus(3))+(3,(2,1)\uplus\epsilon)+(5,(1)\uplus\epsilon)\\&=(2,1,3)+(2,3,1)+(2,4)+(3,2,1)+(5,1).\end{aligned}$$

Définition 7. *Soient un l-uplet $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{C}^l$ et un k-uplet $\rho = (\rho_1, \rho') \in \mathbb{C}^k$.*

Le battage multiplicatif $\dot{\sqcup}$ de ξ et ρ est une application bilinéaire définie récursivement par

$$() \mathbin{\dot{\sqcup}} \xi = \xi \mathbin{\dot{\sqcup}} () = \xi \quad \textit{et} \quad \xi \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho = (\xi_1, \xi' \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho) + (\rho_1, \xi \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho') + (\xi_1\rho_1, \xi' \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho').$$

Exemple 4.

$$(-1) \mathbin{\dot{\sqcup}} \left(\frac{2}{3}\right) = \left(-1, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}, -1\right) + \left(\frac{-2}{3}\right) \qquad \textit{donc}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}, -1\right) \mathbin{\dot{\sqcup}} \left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{2}, (-1) \mathbin{\dot{\sqcup}} \left(\frac{2}{3}\right)\right) + \left(\frac{2}{3}, \left(\frac{1}{2}, -1\right) \mathbin{\dot{\sqcup}} ()\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}, -1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -1\right) + \left(\frac{1}{3}, -1\right).\end{aligned}$$

Remarque 5. *Une récurrence immédiate donne que si ξ et ρ sont éléments de $\mathcal{E}$, $\xi \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho$ est aussi un élément de $\mathcal{E}$.*

Nous sommes maintenant en mesure de décrire la relation de mélange suivie par la famille $M^n_{\mathbf{s},\xi}$:

Proposition 3. *Soient $\mathbf{s}$ et $\mathbf{r}$ deux compositions de profondeur respective l et k, ξ un l-uplet de $\mathbb{C}^l$ et ρ un k-uplet de $\mathbb{C}^k$. Alors, pour tout entier naturel n,*

$$M^n_{\mathbf{s},\xi}(\lambda)\, M^n_{\mathbf{r},\rho}(\lambda) = M^n_{\mathbf{s} \uplus \mathbf{r}, \xi \mathbin{\dot{\sqcup}} \rho}(\lambda),$$

les deux produits de mélanges $\uplus$ et $\dot{\sqcup}$ étant développés <u>simultanément</u>.

Exemple 5. *L'utilisation des exemples 3 et 4 donne, pour tout entier n,*

$$\begin{aligned}&M^n_{(2,1),(\frac{1}{2},-1)}(\lambda)\, M^n_{(3),(\frac{2}{3})}(\lambda) \\ &= M^n_{(2,1,3),(\frac{1}{2},-1,\frac{2}{3})}(\lambda) + M^n_{(2,3,1),(\frac{1}{2},\frac{2}{3},-1)}(\lambda) + M^n_{(2,4),(\frac{1}{2},-\frac{2}{3})}(\lambda) \\ &\quad + M^n_{(3,2,1),(\frac{2}{3},\frac{1}{2},-1)}(\lambda) + M^n_{(5,1),(\frac{1}{3},-1)}(\lambda).\end{aligned}$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition 3, en posant $\mathbf{s}' = (s_2, \ldots, s_l)$, $\mathbf{r}' = (r_2, \ldots, r_k)$, $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_k)$ et $\rho' = (\rho_2, \ldots, \rho_l)$,

$$
\begin{aligned}
& M^n_{\mathbf{s},\xi}(\lambda)\, M^n_{\mathbf{r},\rho}(\lambda) \\
&= \sum_{n>n_1>\ldots>n_l>0} \prod_{i=1}^{l} \xi_i^{n_i} \lambda_{n_i}^{s_i} \sum_{n>n'_1>\ldots>n'_k>0} \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n'_i} \lambda_{n'_i}^{r_i} \\
&= \sum_{n>n_1, n>n'_1} \xi_1^{n_1} \lambda_{n_1}^{s_1}\, M^{n_1}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, \rho_1^{n'_1} \lambda_{n'_1}^{r_1}\, M^{n'_1}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&= \sum_{n>n_1>n'_1} \xi_1^{n_1} \lambda_{n_1}^{s_1}\, M^{n_1}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, \rho_1^{n'_1} \lambda_{n'_1}^{r_1}\, M^{n'_1}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{n>n'_1>n_1} \rho_1^{n'_1} \lambda_{n'_1}^{r_1} \xi_1^{n_1} \lambda_{n_1}^{s_1}\, M^{n_1}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, M^{n'_1}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{n>m} \xi_1^{m} \lambda_{m}^{s_1} \rho_1^{m_1} \lambda_{m_1}^{r_1}\, M^{m}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, M^{m}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&= \sum_{n>n_1} \xi_1^{n_1} \lambda_{n_1}^{s_1}\, M^{n_1}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, M^{n_1}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{n>n'_1} \rho_1^{n'_1} \lambda_{n'_1}^{r_1}\, M^{n'_1}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, M^{n'_1}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{n>m} (\xi_1\rho_1)^m \lambda_m^{s_1+r_1}\, M^{m}_{\mathbf{s}',\xi'}(\lambda)\, M^{m}_{\mathbf{r}',\rho'}(\lambda).
\end{aligned}
$$

On conclut récursivement. □

Théorème 2. *Soient* $\mathbf{s}$ *et* $\mathbf{s}'$ *deux compositions de profondeur respective* l *et* k*, un* l*-uplet* ξ *de* $\mathcal{E}$*, un* k*-uplet* ξ' *de* $\mathcal{E}$*,* $\mathbf{t} = (t, \ldots, t)$ *un* l*-uplet et* $\mathbf{t}' = (t, \ldots, t)$ *un* k*-uplet tous deux formés diagonalement par le même paramètre* t*. Alors,*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s})\, \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',\mathbf{t}'}; \mathbf{s}') = \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi \,\sqcup\!\!\!\sqcup_{\bullet}\, \xi', (t,\ldots,t)}; \mathbf{s} \,\sqcup\!\!\!\sqcup_{+}\, \mathbf{s}'),$$

les produits de mélange $\sqcup\!\!\!\sqcup_{+}$ *et* $\sqcup\!\!\!\sqcup_{\bullet}$ *étant développés* <u>*simultanément*</u>*.*

Démonstration. Posons, pour tout entier naturel n, $\lambda_n = 1/(n-t)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n_{\mathbf{s},\xi}(\lambda) = \sum_{n>n_1>\ldots>n_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{\xi_i^{n_i}}{(n_i - t)^{s_i}}.$$

et $\lim_{n\to\infty} M^n_{\mathbf{s},\xi}(\lambda) = \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s})$.

Le passage à la limite de la proposition 3 donne donc le résultat. □

Remarque 6. *Pour tout complexe ξ et ξ' et tout entier s et s',*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,t};s)\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi',t'};s')\\
&=\sum_{n>0}\frac{\xi^n}{(n-t)^s}\sum_{n'>0}\frac{\xi'^{n'}}{(n'-t')^{s'}}\\
&=\sum_{n>n'>0}\frac{\xi^n\xi'^{n'}}{(n-t)^s(n'-t')^{s'}}+\sum_{n>0}\frac{(\xi\xi')^n}{(n-t)^s(n-t')^{s'}}\\
&\quad+\sum_{n'>n>0}\frac{\xi'^{n'}\xi^n}{(n'-t')^{s'}(n-t)^s}
\end{aligned}$$

l'hypothèse de travailler avec des uplets $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{t}'$ *formés à partir du même paramètre* t *est donc nécessaire.*

Exemple 6. *L'utilisation des exemples 3 et 4 donne, avec* $\mathbf{t}=(t,t)$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac12,-1),\mathbf{t}};(2,1))\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac23),(t)};(3))\\
&=\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac12,-1,\frac23),(t,t,t)};(2,1,3))+\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac12,\frac23,-1),(t,t,t)};(2,3,1))\\
&\quad+\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac12,-\frac23),\mathbf{t}};(2,4))+\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac23,\frac12,-1),(t,t,t)};(3,2,1))\\
&\quad+\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\frac13,-1),\mathbf{t}};(5,1)).
\end{aligned}$$

2.4. Vers des relations quasi-périodiques ? Une autre famille de relations apparait si l'on accepte d'effectuer des décalages sur les paramètres. Ce type d'égalités s'avère particulièrement intéressant si on se limite aux polyzêtas colorés car elles donnent des combinaisons linéaires sur $\mathbb{Q}(q)$ ne faisant intervenir que les polyzêtas colorés $\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{i}}}$.

Commençons donc par regarder certaines relations quasi-périodiques qui relient les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$:

Proposition 4. *Soit une composition* $\mathbf{s}$ *de profondeur* r, $\mathbf{t}$ *et* ξ *des* r*-uplets* $\mathbf{t}$ *et* ξ, *avec* $\xi\in\mathcal{E}$. *Alors, pour* $K\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})=\sum_{b_1,\dots,b_r=0}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^r\xi_i^{b_1+\dots+b_r}}{K^{s_1+\dots+s_r}}\,\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1^K,\dots,\xi_r^K);(\frac{t_1-b_1}{K},\dots,\frac{t_r-b_1-\dots-b_r}{K})};\mathbf{s}).$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})\\
&= \sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\prod_{i=1}^{r}\frac{\xi_i^{n_i}}{(n_i-t_i)^{s_i}}\\
&= \sum_{m_1,\ldots,m_r>0}\prod_{i=1}^{r}\frac{\xi_i^{m_1+\ldots+m_i}}{(m_1+\ldots+m_i-t_i)^{s_i}}\\
&= \sum_{b_1,\ldots,b_r=0}^{K-1}\sum_{m_1,\ldots,m_r>0}\prod_{i=1}^{r}\frac{\xi_i^{\sum_{j=1}^{i}m_jK+b_j}}{(m_1K+b_1+\ldots+m_iK+b_i-t_i)^{s_i}}\\
&= \sum_{b_1,\ldots,b_r=0}^{K-1}\sum_{m_1,\ldots,m_r>0}\prod_{i=1}^{r}\frac{\xi_i^{\sum_{j=1}^{i}b_j}}{K^{s_i}}\times\frac{\xi_i^{K\sum_{j=1}^{i}m_j}}{(m_1+\ldots+m_i-\frac{t_i-\sum_{j=1}^{i}b_j}{K})^{s_i}}\\
&= \sum_{b_1,\ldots,b_r=0}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^{r}\xi_i^{b_1+\ldots+b_r}}{K^{s_1+\ldots+s_r}}\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\prod_{i=1}^{r}\frac{(\xi_i^K)^{n_i}}{(n_i-\frac{t_i-\sum_{j=1}^{i}b_j}{K})^{s_i}}.
\end{aligned}
$$

□

Les séries de Dirichlet non paramétrées (cas $\mathbf{t}=(0,\ldots,0)$) s'expriment comme combinaisons linéaires de polyzêtas colorés. Cette relation a été établie dans [12] – égalité (53) – mais avec une erreur typographique sur les indices ; en voici la version corrigée :

Rappel 1 ([12])**.** *Soient $m\in\mathbb{N}^*$ et q une racine m-ème de l'unité. Pour toute composition $\mathbf{s}$ de profondeur r,*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_0;\mathbf{s})=\frac{1}{m^r}\sum_{b_1,\ldots,b_r=1}^{m}\sum_{j_1,\ldots,j_r=0}^{m-1}\frac{\prod_{l=1}^{r}f_{i_l,b_l}}{q^{\sum_{l=1}^{r}j_la_l}}\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{j}}},$$

où $a_l=b_l+\ldots+b_r$ pour tout $l\in\{1,\ldots,r\}$

En appliquant ceci à l'égalité de la remarque 2, il en découle la régle de réécriture sur les polyzêtas bicolorés :

Proposition 5. *Soit q une racine m-ème de l'unité, $\mathbf{s}$ et $\mathbf{i}$ deux compositions. Supposons de plus que $0\le i_1<\ldots<i_r\le m-1$. Alors,*

$$\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{i}}}=\frac{1}{m^r}\sum_{b_1,\ldots,b_r=1}^{m}\sum_{j_1,\ldots,j_r=0}^{m-1}\frac{q^{\sum_{l=1}^{r}(i_1+\ldots+i_l)b_l}}{q^{\sum_{l=1}^{r}(j_1+\ldots+j_l)b_l}}\zeta\binom{\mathbf{s}}{q^{\mathbf{j}}}.$$

Remarque 7. *L'égalité de la proposition 5 n'est nullement une relation linéaire entre les polyzêtas bicolorés : les relations portent en fait uniquement sur chaque coefficient.*

2.5. Une équation de translation sur la première variable. Nous allons introduire des opérateurs qui ont pour effet de translater les variables s_i de la composition $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$. Astucieusement combinés, ils permettent d'obtenir un certain nombre d'égalités entre des séries de Dirichlet de profondeurs r et $r-1$. Nous n'exposerons ici qu'une seule égalité, qui "contracte" la première variable.

Définition 8. *On note $s_j^\star$ et $s_j^{\star\star} \equiv \Gamma(s_j)^{-1}\, s_j^\star\, \Gamma(s_j)$ les opérateurs linéaires d'action :*

$$\begin{aligned} s_j^\star \;\; \varphi(\dots, s_j, \dots) &= \varphi(\dots, 1+s_j, \dots) \\ s_j^{\star\star} \;\; \varphi(\dots, s_j, \dots) &= s_j\, \varphi(\dots, 1+s_j, \dots). \end{aligned}$$

Pour toute fonction φ,

$$\begin{aligned} s_j^{\star\star}\, s_j^{\star\star} \;\; \varphi(\dots, s_j, \dots) &= s_1^{\star\star}\Big(s_j \varphi(\dots, s_j+1, \dots)\Big) \\ &= s_j(s_j+1)\varphi(\dots, s_j+2, \dots). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $k > 1$,

$$(s_j^{\star\star})^k \;\; \varphi(\dots, s_j, \dots) = s_j \dots (s_j+k-1)\varphi(\dots, s_j+k, \dots). \tag{2.13}$$

Notons de plus que $s_j^{\star\star}$ admet pour fonction inverse $(s_j^{\star\star})^{-1}$ définie par :

$$(s_j^{\star\star})^{-1} \;\; \varphi(\dots, s_j, \dots) = \frac{\varphi(\dots, s_j-1, \dots)}{s_j - 1}. \tag{2.14}$$

Lemme 1. *Si n et t ne dépendent pas de s,*

$$e^{-ts^{\star\star}} \;\; (n-t)^{-s} = n^{-s}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^{-ts^{\star\star}} \;\; (n-t)^{-s} &= \sum_{k\geq 0} \frac{s \dots (s+k-1)}{k!}(-t)^k (n-t)^{-s-k} \\ &= (n-t)^{-s} \sum_{k\geq 0} \frac{s \dots (s+k-1)}{k!}\left(1 - \frac{n}{t}\right)^{-k} \\ &= (n-t)^{-s} \;\; \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1-\frac{n}{t}}\right)^s}. \end{aligned}$$

Comme

$$\left(1 - \frac{1}{1-\frac{n}{t}}\right)^s = \left(1 - \frac{t}{t-n}\right)^s = \left(\frac{n}{n-t}\right)^s,$$

$$e^{-ts^{\star\star}} \;\; (n-t)^{-s} = (n-t)^{-s}\left(\frac{n-t}{n}\right)^s = n^{-s}.$$

□

Nous pouvons maintenant exposer une relation entre des séries de profondeurs r et $r-1$, qui nous sera utile dans la seconde partie pour calculer les résidus du prolongement.

Proposition 6 (sur s_1 en profondeur $r \geq 2$)**.** *Pour toute composition* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ *telle que* $s_1 > 1$*, pour tout* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_r) \in]-\infty; 1[^r$ *et tout* $\xi \in \mathcal{E}$*,*

$$e^{-t_2 s_2^{\star\star}} \circ e^{-t_1 s_1^{\star\star}} \circ (e^{s_1^{\star\star}} - \xi_1) \quad \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s}) = \xi_1 \ \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1 \times \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)}; (s_1 + s_2, s_3, \ldots, s_r)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& e^{s_1^{\star\star}} \quad \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s}) \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{s_1 \ldots (s_1 + k - 1)}{k!} \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{\xi_1^{n_1} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_1 - t_1)^{s_1 + k} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{\xi_1^{n_1} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_1 - t_1)^{s_1} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \\
&\qquad \sum_{k \geq 0} \frac{s_1 \ldots (s_1 + k - 1)}{k!} (n_1 - t_1)^{-k} \\
&= \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{\xi_1^{n_1} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_1 - t_1)^{s_1} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \left(1 - \frac{1}{(n_1 - t_1)}\right)^{-s_1} \\
&= \xi_1 \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{\xi_1^{n_1 - 1} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_1 - 1 - t_1)^{s_1} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \\
&= \xi_1 \ \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s}) + \xi_1 \sum_{n_2 > \ldots > n_r > 0} \frac{(\xi_1 \xi_2)^{n_2} \xi_3^{n_3} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_2 - t_1)^{s_1} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}},
\end{aligned}$$

ceci étant valable car $r \geq 2$ donc $n_1 \geq 2$ et $n_1 - t_1 > 1$. Mais,

$$\begin{aligned}
& e^{-t_1 s_1^{\star\star}} \sum_{n_2 > \ldots > n_r > 0} (n_2 - t_1)^{-s_1} \frac{(\xi_1 \xi_2)^{n_2} \xi_3^{n_3} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \\
&= \sum_{n_2 > \ldots > n_r > 0} \frac{(\xi_1 \xi_2)^{n_2} \xi_3^{n_3} \ldots \xi_r^{n_r}}{(n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}} \ e^{-t_1 s_1^{\star\star}} \ (n_2 - t_1)^{-s_1} \\
&= \sum_{n_2 > \ldots > n_r > 0} \frac{(\xi_1 \xi_2)^{n_2} \xi_3^{n_3} \ldots \xi_r^{n_r}}{n_2^{s_1} (n_2 - t_2)^{s_2} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}}
\end{aligned}$$

par le lemme 1. Par suite, en utilisant toujours le lemme 1,

$$\begin{aligned}
&e^{-t_2 s_2^{\star\star}} \circ e^{-t_1 s_1^{\star\star}} \sum_{n_2>\ldots>n_r>0} (n_2-t_1)^{-s_1} \frac{(\xi_1\xi_2)^{n_2}\xi_3^{n_3}\ldots\xi_r^{n_r}}{(n_2-t_1)^{s_1}(n_2-t_2)^{s_2}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}\\
&= \sum_{n_2>\ldots>n_r>0} \frac{(\xi_1\xi_2)^{n_2}\xi_3^{n_3}\ldots\xi_r^{n_r}}{n_2^{s_1}(n_3-t_3)^{s_3}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}} \; e^{-t_2 s_2^{\star\star}} \; (n_2-t_2)^{-s_2}\\
&= \sum_{n_2>\ldots>n_r>0} \frac{(\xi_1\xi_2)^{n_2}\xi_3^{n_3}\ldots\xi_r^{n_r}}{n_2^{s_1+s_2}(n_3-t_3)^{s_3}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}\\
&= \mathrm{Di}(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)}; (s_1+s_2, s_3, \ldots, s_r)).
\end{aligned}$$

□

3. Prolongement méromorphe

L'objectif de cette section est de donner un sens aux séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ pour $\mathbf{s}$ composés de nombres complexes, les nombres ξ et les paramètres $\mathbf{t}$ restant fixes.

Remarque 8. *Dans toute la suite de cet article, pour des raisons de définition et de convergence, les paramètres $\overline{t}_i$ seront pris à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;1[$. Ainsi si $\mathbf{t}$ est de longueur r, $\overline{\mathbf{t}} \in]-\infty;1[^r$.*

3.1. Représentation intégrale. Afin d'obtenir une représentation intégrale des séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$, nous allons utiliser leurs formes en tant qu'intégrales itérées. En effet, certaines de ces dernières peuvent s'écrire sous forme d'une intégrale :

Proposition 7. *Soient I un ensemble d'indice et X un alphabet indicé par I tel que chaque lettre x_i, $i \in I$, soit associée à une 1-forme différentielle $\omega_i(z) = F_i(z)dz$ de primitive φ_i.*

Pour toute famille d'indices $(i_1, j_1, \ldots, i_r, j_r) \in I^{2r}$ telle que $i_k \neq j_k$ pour tout k, et pour tout entier naturel $n_1, \ldots, n_r$,

$$\begin{aligned}
&\alpha_{z_0}^{z}(x_{i_1}^{n_1}x_{j_1}\ldots x_{i_r}^{n_r}x_{j_r})\\
&= \int_{[0,1]^r} \prod_{k=1}^{r} \frac{\left(\varphi_{i_k}(z\prod_{l=0}^{k-1}u_l) - \varphi_{i_k}(z\prod_{l=1}^{k}u_l)\right)^{n_k}}{n_k!} F_{j_k}(z\prod_{l=1}^{k}u_l)\; z\prod_{l=0}^{k-1}u_l\,du_k
\end{aligned}$$

en posant $u_0 = 1$.

Démonstration. En utilisant le théorème de convolution par itérations successives,

$$\begin{aligned}
&\alpha_{z_0}^{z}(x_{i_1}^{n_1}x_{j_1}\dots x_{i_r}^{n_r}x_{j_r})\\
&=\int_{z_0}^{z}\frac{(\varphi_{i_1}(z)-\varphi_{i_1}(z_1))^{n_1}}{n_1!}\,F_{j_1}(z_1)\alpha_{z_0}^{z_1}(x_{i_2}^{n_2}x_{j_2}\dots x_{i_r}^{n_r}x_{j_r})\,dz_1\\
&=\int_{z_0}^{z}\frac{(\varphi_{i_1}(z)-\varphi_{i_1}(z_1))^{n_1}}{n_1!}\,F_{j_1}(z_1)dz_1\int_{z_0}^{z_1}\frac{(\varphi_{i_2}(z_1)-\varphi_{i_2}(z_2))^{n_2}}{n_2!}\,F_{j_2}(z_2)\\
&dz_2\int_{z_0}^{z_2}\dots F_{j_{r-1}}(z_{r-1})dz_{r-1}\int_{z_0}^{z_{r-1}}\frac{(\varphi_{i_r}(z_{r-1})-\varphi_{i_r}(z_r))^{n_r}}{n_r!}\,F_{j_r}(z_r)dz_r.
\end{aligned}$$

Le changement de variable

$$u_1=\frac{z_1}{z},\quad u_2=\frac{z_2}{z_1},\quad \dots,\quad u_r=\frac{z_r}{z_{r-1}}$$

donne le résultat. □

On en déduit une première représentation intégrale des séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$.

Lemme 2. *Pour toute famille (F_ξ) vérifiant les conditions de convergence de la remarque 1*

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})=\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{\xi_i^{r+1-i}}{\Gamma(s_i)}\right)\int_{\mathbb{R}_+^r}\prod_{i=1}^{r}\frac{e^{-(1-\bar{t}_i)\sum_{l=1}^{i}u_l}}{1-(\prod_{l=1}^{i}\xi_l)e^{-\sum_{l=1}^{i}u_l}}\frac{du_i}{u_i^{1-s_i}}.$$

Démonstration. En utilisant la proposition 7 avec le mot

$$w=x_0^{s_1-1}x_{1,\xi,\overline{t_1}}\dots x_0^{s_r-1}x_{r,\xi,\overline{t_r}},$$

on obtient, toujours avec $u_0=1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_0^z(w)&=\int_{[0,1]^r}\prod_{k=1}^{r}\frac{\log^{s_k-1}(1/u_k)}{\Gamma(s_k)}\frac{\prod_{l=1}^{k}\xi_k}{1-(\prod_{l=1}^{k}\xi_k)z\prod_{l=1}^{k}u_l}\frac{(z\prod_{l=0}^{k-1}u_l)du_k}{(z\prod_{l=1}^{k}u_l)^{\bar{t}_k}}\\
&=\left(\prod_{k=1}^{r}\frac{\xi_i^{r+1-k}}{\Gamma(s_k)}\right)\int_{[0,1]^r}\prod_{k=1}^{r}\log^{s_k-1}(1/u_k)\frac{(z\prod_{l=0}^{k-1}u_l)^{1-\bar{t}_k}}{1-(\prod_{l=1}^{k}\xi_k)z\prod_{l=1}^{k}u_l}\frac{du_k}{u_k^{\bar{t}_k}}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $v_k=\log\left(\frac{1}{u_k}\right)$ pour tout $k\in\{0,\dots,r\}$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\alpha_0^z(w)&=\left(\prod_{k=1}^{r}\frac{\xi_i^{r+1-k}}{\Gamma(s_k)}\right)\int_{\mathbb{R}^r}\prod_{k=1}^{r}v_k^{s_k-1}\,\frac{(ze^{-\sum_{l=0}^{k-1}v_k})^{1-\bar{t}_k}}{1-(\prod_{l=1}^{k}\xi_k)ze^{-\sum_{l=1}^{k}v_k}}\frac{dv_k}{e^{-(\bar{t}_k-1)v_k}}\\
&=\left(\prod_{k=1}^{r}\frac{\xi_i^{r+1-k}}{\Gamma(s_k)}\right)\int_{\mathbb{R}^r}\prod_{k=1}^{r}\frac{z^{1-\bar{t}_k}e^{-(1-\bar{t}_k)\sum_{l=1}^{k}v_k}}{1-(\prod_{l=1}^{k}\xi_k)ze^{-\sum_{l=1}^{k}v_k}}\frac{dv_k}{v_k^{1-s_k}}
\end{aligned}$$

car $v_0=\log 1=0$. Le corollaire 1 permet de conclure. □

Effectuons la substitution suivante :

$$u_1 = x_1 \dots x_r,\ u_2 = (1-x_1)x_2 \dots x_r,\ \dots,\ u_r = (1-x_{r-1})x_r. \tag{3.1}$$

Notons qu'alors $\sum_{j=1}^{i} u_j = \prod_{j=i}^{r} x_j$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$. Le Jacobien $\mathcal{J}_r = \partial(u_1,\dots,u_r)/\partial(x_1,\dots,x_r)$vaut $\prod_{i=1}^{r} x_i^{i-1}$. Le changement de variables est donc admissible de $[0,+\infty[^r$ dans $\mathcal{D}_r = [0,1]^{r-1} \times [0,+\infty[$ et son application donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) &= \Big(\prod_{i=1}^{r} \frac{\xi_i^{r+1-i}}{\Gamma(s_i)}\Big) \int_{\mathcal{D}_r} \Big(\prod_{i=1}^{r} \frac{e^{-(1-\bar{t}_i)\prod_{l=i}^{r} x_l}}{1-\prod_{k=1}^{i}\xi_k e^{-\prod_{l=i}^{r} x_l}}\Big) \times \prod_{i=1}^{r} x_i^{i-1} \\
&\quad \times \Big(\frac{dx_1}{(x_1\dots x_r)^{1-s_1}} \times \frac{dx_2}{((1-x_1)x_2\dots x_r)^{1-s_2}} \times \dots \\
&\quad \dots \times \frac{dx_r}{((1-x_{r-1})x_r)^{1-s_r}}\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{r} \frac{\xi_i^{r+1-i}}{\Gamma(s_i)}\Big) \int_{\mathcal{D}_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{e^{-(1-\bar{t}_i)\prod_{l=i}^{r} x_l}}{1-\prod_{k=1}^{i}\xi_k e^{-\prod_{l=i}^{r} x_l}} \\
&\quad \times \frac{dx_1}{x_1^{1-s_1}(1-x_1)^{1-s_2}} \times \frac{dx_2}{x_2^{1-s_1-s_2}(1-x_2)^{1-s_3}} \times \dots \\
&\quad \dots \times \frac{dx_{r-1}}{x_{r-1}^{1-s_1-\dots-s_{r-1}}(1-x_{r-1})^{1-s_r}} \times \frac{dx_r}{x_r^{1-s_1-\dots-s_r}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

On arrive ainsi à la représentation suivante :

Théorème 3.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{r} \xi_i^{r+1-i}\Big) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1-\bar{t}_r)x_r}}{1-(\prod_{k=1}^{r}\xi_k)e^{-x_r}} \frac{x_r^{\sum_{j=1}^{r} s_j - 1}}{\Gamma(s_r)} dx_r \\
&\quad \int_{[0,1]^{r-1}} \prod_{i=1}^{r-1} \frac{e^{-(1-\bar{t}_i)\prod_{l=i}^{r} x_l}}{1-(\prod_{k=1}^{i}\xi_k)e^{-\prod_{l=i}^{r} x_l}} \frac{x_i^{\sum_{j=1}^{i} s_j - 1}(1-x_i)^{s_{i+1}-1}}{\Gamma(s_i)} dx_i
\end{aligned}$$

pour toute composition $\mathbf{s}$, *tout* $\mathbf{t}$ *tel que* $\bar{\mathbf{t}} \in]-\infty,1[^r$ *et pour tout* $\xi \in \mathcal{E}$.

Remarque 9. *L'expression intégrale de* $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ *permet déjà un prolongement : dans le cas où, pour tout* $i \in \{1,\dots,r\}$, $\prod_{j=1}^{i}\xi_j \neq 1$, *on obtient ainsi un prolongement pour* $\Re(s_1) > 0,\dots,\Re(s_r) > 0$. *Dans l'autre cas extrême où pour tout* $i \in \{1,\dots,r\}$, $\xi_i = 1$, *le prolongement est obtenu pour* $\Re(s_1) > 0$, *et* $\Re(s_i) > 0$, $\Re(\sum_{j=1}^{i} s_j) > i$ *pour tout* $i \in \{2,\dots,r\}$.

3.2. Régularisée en 0 et en 1. Pour dépasser les limites du domaine de convergence de la forme intégrale, une idée est d'utiliser une distribution : la régularisée. Sur cette notion, nous nous contenterons de rappeler une série de résultats établis en [12].

Notation 2. *On note* $f_{x_1^{k_1}\dots x_r^{k_r}}$ *la dérivée partielle* $\partial^{k_1+\dots+k_r}/\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_r}^{k_r}f$*, et* $\mathbb{Z}_{<0}$ *l'ensemble des entiers strictement négatifs.*

Définition 9. *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *contenant* 0*, de classe* C^∞ *en* 0*. Pour tout* $s = s_r + \mathrm{i}s_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$*,*

$$\mathcal{R}_\rho[f](s) = \int_0^\rho x^s[f(x) - \sum_{k=0}^{n_s} f_{x^k}(0)\frac{x^k}{k!}]dx \ + \sum_{k=0}^{n_s}\frac{f_{x^k}(0)}{k!}\frac{\rho^{k+s+1}}{k+s+1}$$

est défini pour tout réel positif $\rho \in I$ *indépendamment de l'entier* $n_s > -s_r - 2$*.*

En particulier, si $s_r > -1$*,*

$$\mathcal{R}_\rho[f](s) = \int_0^\rho x^s f(x)dx.$$

La définition de régularisée en zéro se trouve par exemple dans [15].

Remarque 10. *L'expression de la définition 9 sur tout ouvert* $\Re(s) > -n_s$ *montre que* $s \mapsto \mathcal{R}_\rho[f](s)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$ *et que ses pôles sont simples.*

Proposition 8. *Soit* J *un intervalle réel. Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$*, de classe* C^∞ *en* 0 *et en* 1*. Alors, l'expression*

$$\mathcal{R}_{\rho_1}[f(x)(1-x)^b](a) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)x^a(1-x)^b dx + \mathcal{R}_{1-\rho_2}[f(1-x)(1-x)^a](b)$$

est définie pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}\right)^2$ *indépendamment des réels* ρ_1 *et* ρ_2 *dans* $]0,1[$*.*

Le problème de la forme intégrale du théorème 3 est la possibilité d'avoir deux singularités en x_i : l'une en 0, l'autre en 1. On construit donc à partir de la régularisée en 0 une régularisée en 0 et en 1 qui traite simultanément ces deux points singuliers.

Définition 10. *Pour* ρ_1 *et* ρ_2 *dans* $]0,1[$*, on note* $\mathcal{R}_0^1[f](a,b)$ *l'expression*

$$\mathcal{R}_{\rho_1}[f(x)(1-x)^b](a) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)x^a(1-x)^b dx + \mathcal{R}_{1-\rho_2}[f(1-x)(1-x)^a](b).$$

Remarque 11. *La remarque 10 permet d'établir que la fonction* $(a,b) \mapsto \mathcal{R}_0^1[f](a,b]$ *est méromorphe sur* $\mathbb{C}^2$*, l'ensemble de ses hyperpôles étant* $\mathbb{Z}_{<0}\times\mathbb{Z}_{<0}$*, et que ses hyperpôles sont tous simples.*

La régularisée en 0 et 1 se comporte sans difficulté vis à vis de la dérivabilité :

Proposition 9. *Soit $f \in C^\infty([0,1]\times J)$. Alors, pour tout couple (a,b) dans $\left(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}\right)^2$, la fonction $y \mapsto \mathcal{R}_0^1[f(x,y)](a,b)$ est de classe C^∞ sur J, avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$\frac{\partial}{\partial y^k}\mathcal{R}_0^1[f(x,y)](a,b) = \mathcal{R}_0^1[\frac{\partial}{\partial y^k}f(x,y)](a,b).$$

Corollaire 2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\in C^\infty([0,1]\times U)$. Si la fonction $f(x,.)$ est holomorphe sur U pour tout $x\in[0,1]$, alors, pour tout (a,b) dans $\left(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}\right)^2$, la fonction $s\mapsto \mathcal{R}_0^1[f(x,s)](a,b)$ est holomorphe sur U.*

Notons enfin qu'effectuer une série de régularisées définit le même objet quel que soit l'ordre choisi :

Proposition 10. *Toute fonction f de $\mathbb{C}^\infty([0,1]^2)$ vérifie l'égalité suivante de fonctions méromorphes en (a_1,b_1,a_2,b_2) sur $\mathbb{C}^4$:*

$$\mathcal{R}_0^1[\mathcal{R}_0^1[f(x,y)](a_1,b_1)](a_2,b_2) = \mathcal{R}_0^1[\mathcal{R}_0^1[f(x,y)](a_2,b_2)](a_1,b_1).$$

3.3. Prolongement méromorphe des $\mathbf{Di}(\boldsymbol{F_{\xi,\mathbf{t}}},\mathbf{s})$. Le prolongement analytique de $\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t})$ a été traité en [12], avec notamment le résultat :

Théorème 4. *Pour tout $\bar{\mathbf{t}}\in]-\infty,1[^r$, la fonction $\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t})$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$, l'ensemble de ses multipôles étant inclus dans les ensembles $s_1=1$, $\sum_{j=1}^i s_j\in i-\mathbb{N}$ pour tout $i\in\{2,\ldots,r\}$. De plus tous ses multipôles sont simples.*

Nous travaillerons désormais dans cette section sous la condition :

$$\forall i\in\{1,\ldots,r\},\quad \prod_{k=1}^{i}\xi_k \notin]1;+\infty[. \tag{3.3}$$

Définissons la fonction h sur $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\setminus]1;+\infty[$ par

$$h(x,t,\xi) = \frac{e^{-(1-t)x}}{1-\xi\; e^{-x}} \qquad \text{si } \xi\neq 1, \tag{3.4}$$

$$h(x,t,1) = x\,\frac{e^{-(1-t)x}}{1-e^{-x}},$$

et posons, pour tout $i\in\{1,\ldots,r\}$,

$$h_i(x) = h(x,\bar{t}_i,\prod_{k=1}^{i}\xi_k). \tag{3.5}$$

Afin de séparer les cas $\xi=1$ et $\xi\neq 1$, posons

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \prod_{k=1}^i \xi_k \notin [1;+\infty[,\\ 1 & \text{si } \prod_{k=1}^i \xi_k = 1.\end{cases} \tag{3.6}$$

Soit enfin N_i le nombre de produits $\prod_{k=1}^{j} \xi_k$ égaux à 1 lorsque j varie de 1 à i, autrement dit

$$N_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i. \tag{3.7}$$

Ainsi, $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s})$ s'exprime à l'aide des “noyaux” h_i :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s}) &= \left(\prod_{i=1}^{r} \xi_i^{r+1-i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{h_r(x_r)}{x_r^{\varepsilon_r}} \frac{x_r^{\sum_{j=1}^{r} s_j - 1}}{\Gamma(s_r)} dx_r \\
&\int_{[0,1]^{r-1}} \prod_{i=1}^{r-1} \frac{h_i(x_i \ldots x_r)}{(x_i \ldots x_r)^{\varepsilon_i}} \frac{x_i^{\sum_{j=1}^{i} s_j - 1}(1-x_i)^{s_{i+1}-1}}{\Gamma(s_i)} dx_i \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} \xi_i^{r+1-i}\right) \int_0^{+\infty} h_r(x_r) \frac{x_r^{\sum_{j=1}^{r} (s_j+\varepsilon_j) - 1}}{\Gamma(s_r)} dx_r \\
&\int_{[0,1]^{r-1}} \prod_{i=1}^{r-1} h_i(x_i \ldots x_r) \frac{x_i^{\sum_{j=1}^{i} (s_j+\varepsilon_j) - 1}(1-x_i)^{s_{i+1}-1}}{\Gamma(s_i)} dx_i.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce que l'on décompose, à l'aide des fonctions

$$\Phi_1(\mathbf{s}; \mathbf{t}; \xi) = \int_{[0,1]^r} \prod_{i=1}^{r} h_i(\prod_{l=i}^{r} x_l)\, x_i^{\sum_{j=1}^{i} s_j + N_i - 1} (1-x_i)^{s_{i+1}-1} dx_i \tag{3.9}$$

avec $s_{r+1} = 1$, et

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\mathbf{s}; \mathbf{t}; \xi) &= \int_1^{+\infty} h_r(x_r)\, x_r^{\sum_{j=1}^{r} s_j + N_r - 1} dx_r \\
&\int_{[0,1]^{r-1}} \prod_{i=1}^{r-1} h_i(\prod_{l=i}^{r} x_l)\, x_i^{\sum_{j=1}^{i} s_j + N_i - 1} (1-x_i)^{s_{i+1}-1} dx_i
\end{aligned} \tag{3.10}$$

en deux parties :

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}}; \mathbf{s}) = \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\xi_i^{r+1-i}}{\Gamma(s_i)}\right) (\Phi_1(\mathbf{s}; \mathbf{t}; \xi) + \Phi_2(\mathbf{s}; \mathbf{t}; \xi)). \tag{3.11}$$

Lemme 3. *La fonction $\Phi_1(.; \mathbf{t})$ définie par l'égalité (3.9) admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$. L'ensemble de ses multipôles est la réunion, i décrivant $\{1, \ldots, r\}$, de $s_i \in -\mathbb{N}$ et de $\sum_{j=1}^{i} s_j \in N_i - \mathbb{N}$. Toutes ces multi-pôles sont simples.*

Démonstration. Notons que pour $\Re(s_i) > 0$ et $\Re(\sum_{j=1}^{i} s_j) > -N_i$, $i \in \{1,\dots,r\}$,

$$\begin{aligned}(3.12)\quad &\Phi_1(\mathbf{s};\mathbf{t})\\ &= \mathcal{R}_0^1[h_r(x_r)\mathcal{R}_0^1[h_{r-1}(x_r x_{r-1})\mathcal{R}_0^1[\dots\mathcal{R}_0^1[h_2(x_r\dots x_2)\\ &\quad \mathcal{R}_0^1[h_1(x_r\dots x_1)](s_1+N_1-1,s_2-1)](s_1+s_2+N_2-1,s_3-1)\\ &\quad \dots](s_1+\dots+s_{r-1}+N_{r-1}-1,s_r-1)\\ &\quad](s_1+\dots+s_r+N_r-1,0)\end{aligned}$$

La fonction $(x_1,x) \mapsto h_1(x_1x)$ appartient à $C^\infty([0,1]\times\mathbb{R})$, donc, par la proposition 9, $x \mapsto \mathcal{R}_0^1[h_1(x_1x)](a_1,b_1)$ existe et est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout couple $(a_1,b_1) \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0})^2$. Donc

$$(x_2,x) \mapsto h_2(x_2x)\mathcal{R}_0^1[h_1(x_1x_2x)](a_1,b_1) \in C^\infty([0,1]\times\mathbb{R})$$

et, encore par la proposition 9,

$$x \mapsto \mathcal{R}_0^1[h_2(x_2x)\mathcal{R}_0^1[h_1(x_1x_2x)](a_1,b_1)](a_2,b_2)$$

existe et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par itération, on monte ainsi que l'expression (3.12) est définie (donnant par l'occasion un prolongement de Φ_1) pour s_1+N_1-1, s_2-1, $s_1+s_2+N_2-1$, s_3-1, …, s_r-1, $s_1+\dots+s_r+N_r-1$ à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$. Par la remarque 10 et le corollaire 2, ce prolongement est holomorphe sur ce domaine. De plus, en plaçant, par la remarque 12, la série de variables étudiées en première régularisation puis en appliquant la remarque 11, il en découle que chaque multipôle est simple. □

Lemme 4. *La fonction $\Phi_2(.;\mathbf{t})$ définie par l'égalité (3.10) admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$. L'ensemble de ses multipôles est la réunion de $s_i \in -\mathbb{N}$, $i \in \{1,\dots,r\}$ et de $\sum_{j=1}^{i} s_j \in N_i - \mathbb{N}$, $i \in \{1,\dots,r-1\}$. Tous ces multipôles sont simples.*

Démonstration. Posons $g(x_1,\dots,x_r) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} h_i(x_r\dots x_i)$.

Pour $\Re(s_i) > 0$, $i \in \{1,\dots,r\}$ et $\Re(\sum_{j=1}^{i} s_j) > -N_i$, $i \in \{1,\dots,r-1\}$, on peut alors écrire Φ_2 sous la forme :

$$\begin{aligned}&\Phi_2(\mathbf{s};\mathbf{t};\xi) = \mathcal{R}_0^1[\dots\mathcal{R}_0^1[\int_1^{+\infty} g(x_1,\dots,x_r)dx_r](s_1+N_1-1,s_2-1)\\ (3.13)\qquad &\qquad\qquad \dots][s_1+\dots+s_{r-1}+N_{r-1}-1,s_r-1).\end{aligned}$$

La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^r$, et, pour tout compact, chaque dérivée partielle $g_{y_1^{k_1}\dots y_{r-1}^{k_{r-1}}}$ est majorée absolument sur $\mathbb{R}_+^r$ par $Me^{-\alpha y_r}$, avec $M \in \mathbb{R}_+$. Donc la fonction

$$(y_1,\dots,y_{r-1}) \mapsto \int_1^{+\infty} g(y_1,\dots,y_r)dy_r,$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^{r-1}$. Par itération de la proposition 9, il découle donc que Φ_2 peut être prolongée par l'égalité (3.13) pour s_1+N_1-1, s_2-1, $s_1+s_2+N_2-1$, $s_3-1,\dots,\sum_{j=1}^{r-1}s_j+N_{r-1}-1$, s_r-1 dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$. De plus, la remarque 10 et le corollaire 2 montrent que ce prolongement est holomorphe sur ce domaine, et, comme précédemment, les remarques 12 et 11 donnent la simplicité des multipôles. □

Remarque 12. *En utilisant la fonction g introduite ci-dessus, on peut réécrire l'égalité (3.12) en*

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathbf{s};\mathbf{t}) &= \mathcal{R}_0^1[\mathcal{R}_0^1[\dots\mathcal{R}_0^1[g(x_1,\dots,x_r)](s_1+N_1-1,s_2-1)\\ &\dots](\sum_{j=1}^{r-1}s_j+N_{r-1}-1,s_r-1)](\sum_{j=1}^{r}s_j+N_r-1,0).\end{aligned}\tag{3.14}$$

De par la proposition 10, l'opérateur

$$f\longmapsto\mathcal{R}_0^1[\dots\mathcal{R}_0^1[f(y_1,\dots,u_r)](a_{\sigma(1)},b_{\sigma(1)})\dots](a_{\sigma(r)},b_{\sigma(r)})$$

est identique pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_r$. Les expressions (3.13) et (3.14) sont donc indépendantes de l'ordre des régularisées $\mathcal{R}_0^1$.

L'étude de Φ_1 et Φ_2 permet de conclure sur le prolongement méromorphe des séries $\mathrm{Di}(F_{\mathbf{t},\xi};\mathbf{s})$

Théorème 5. *Soient $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_r)$ tel que $t_r<\dots<t_1$ et $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_r)$ un élément de $\mathbb{C}^r$ tel que, pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, $\left|\prod_{k=1}^i\xi_k\right|\le 1$.*

Pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, on note N_i le nombre de produits $\prod_{k=1}^j\xi_k$ égaux à 1 lorsque j varie de 1 à i. Alors, $\mathbf{s}\mapsto\mathrm{Di}(F_{\mathbf{t},\xi};\mathbf{s})$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^r$, dont les multipôles sont simples et inclus dans la réunion des $\sum_{j=1}^i s_j\in N_i-\mathbb{N}$, $i\in\{1,\dots,r\}$.

Démonstration. L'égalité

$$\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})=\left(\prod_{i=1}^r\xi_i^{r+1-i}\right)\left(\frac{\Phi_1(\mathbf{s};\mathbf{t};\xi)}{\prod_{i=1}^r\Gamma(s_i)}+\frac{\Phi_2(\mathbf{s};\mathbf{t};\xi)}{\prod_{i=1}^r\Gamma(s_i)}\right)$$

et les lemmes 3 et 4 donnent le résultat. □

Remarque 13. *Il découle de l'utilisation de la définition 9 dans les égalités (3.12) et (3.13) que les singularités se présentent comme des combinaisons de termes*

$$\frac{1}{(s_1-p_1)(s_1+s_2-p_2)\dots(s_1+\dots+s_r-p_r)},$$

$p_1,\dots,p_r$ étant les multipôles.

3.4. Multi-résidus. On peut effectuer un développement des diverses régularisées de Φ_1 et Φ_2 pour obtenir la structure des multipôles des $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\mathbf{t},\xi};\mathbf{s})$ comme cela a été fait dans [12] pour le cas des polyzêtas de Hurwitz. Cependant, les “multi-résidus” apparaissent comme des combinaisons linéaires de régularisées développées avec des constantes ρ un peu arbitraires, et de régularisées peu exprimables de fonctions $\mathbb{C}^\infty$. Afin de connaitre explicitement ces multi-résidus, on décrit ici un algorithme récursif permettant de les calculer. Cet algorithme est une généralisation d’une idée proposée par Jean Ecalle pour établir le prolongement des polyzêtas colorés [10].

3.4.1. *Cas $\xi_1 = 1$.* On se place ici dans le cas où $\xi_1 = 1$. L’idée générale est de construire un opérateur convergent qui permet d’inverser l’équation de la sous-section 2.5.

Notation 3. *Pour tout réel $t < 1$, posons $\mathcal{J}^{\sigma;t} = \dfrac{e^{-(1-t)\sigma}}{1-e^{-\sigma}}$, défini pour $\sigma \notin 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.*

La fonction $z \mapsto \dfrac{ze^{-(1-t)z}}{1-e^{-z}}$ est développable en série entière sur la boule ouverte de rayon 2π avec $\dfrac{ze^{-(1-t)z}}{1-e^{-z}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(t)}{k!} z^k$, les $B_k(t)$ étant les polynômes de Bernoulli.

Notation 4. *Posons, pour tout entier relatif $n \geq -1$, $j_{n,t} = \dfrac{B_{n+1}(t)}{(n+1)!}$; ainsi pour tout nombre complexe σ tel que $|\sigma| < 2\pi$, $\mathcal{J}^{\sigma;t} = \displaystyle\sum_{n\geq -1} j_{n,t}\,\sigma^n$.*

L’opérateur $\mathcal{J}^{s_1^{\star\star};t_1}$ est l’inverse de $e^{-t_1 s_1^{\star\star}} \circ (e^{s_1^{\star\star}} - 1)$ présent dans l’égalité de la proposition 6 ; malheureusement il n’est pas développable sur tout $\mathbb{C}$. Nous allons donc utiliser une inversion partielle :

Notation 5. *Pour tout entier k, on pose :*

$$\mathcal{J}_k^{\sigma;t} = \sum_{n=-1}^{k-1} j_{n,t}\,\sigma^n \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_k^{\sigma;t} = 1 - \mathcal{J}_k^{\sigma;t} \times (1-e^{-\sigma}) \times e^{(1-t)\sigma}.$$

Remarque 14.

(i) Sur la boule ouverte de rayon de 2π, $\mathcal{J}_k^{\sigma;t}$ désigne la série $\mathcal{J}^{\sigma;t}$ tronquée à l’ordre k.

(ii) $\mathcal{L}_k^{\sigma;t}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ (par produit).

(iii) Pour $\sigma \notin 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, $\mathcal{L}_k^{\sigma;t} = 1 - \dfrac{\mathcal{J}_k^{\sigma;t}}{\mathcal{J}^{\sigma;t}}$. La série $\mathcal{L}_k^{\sigma;t}$ est donc en $O(\sigma^{k+1})$: au voisinage de 0, avec $\sigma \neq 0$, $\mathcal{L}_k^{\sigma;t} = \dfrac{j_{k,t}\,\sigma^k + j_{k+1,t}\,\sigma^{k+1} + \dots}{j_{-1,t}\,\sigma^{-1} + j_{0,t} + \dots}$.

Notation 6. *On peut développer $\mathcal{L}_k$ sur $\mathbb{C}$ en* $\mathcal{L}_k^{\sigma;t} = \sum_{n>k} l_{k,n,t}\,\sigma^n$.

Avec une profondeur $r \geq 2$ et $q \in \mathbb{N}$, puisque $\frac{1}{\mathcal{J}^{\sigma;t}} = e^{-t\sigma}(e^\sigma - 1)$, la proposition 6 peut s'écrire :

$$(3.15)\quad e^{-t_2 s_2^{\star\star}} \circ \frac{1}{\mathcal{J}^{s_1^{\star\star};t_1}} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})) \\ = \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r))$$

Mais, pour tout entier k, $\mathcal{L}_k^{\sigma;t} = 1 - \frac{\mathcal{J}_k^{\sigma;t}}{\mathcal{J}^{\sigma;t}}$ donc $\frac{1-\mathcal{L}_k^{\sigma;t}}{\mathcal{J}_k^{\sigma;t}} = \frac{1}{\mathcal{J}^{\sigma;t}}$ et

$$(3.16)\quad (1-\mathcal{L}_k^{s_1^{\star\star};t_1}) \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) \\ = \mathcal{J}_k^{s_1^{\star\star};t_1} \circ e^{t_2 s_2^{\star\star}} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)).$$

Ainsi

(3.17)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) \\
&= \mathcal{L}_k^{s_1^{\star\star};t_1} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) \\
&\quad + \mathcal{J}_k^{s_1^{\star\star};t_1} \circ e^{t_2 s_2^{\star\star}} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)) \\
&= \sum_{n>k} l_{k,n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) \\
&\quad + \sum_{n=-1}^{k-1} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)).
\end{aligned}$$

Mais, par le théorème 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(3.18)\quad (s_1^{\star\star})^n \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) = s_1\ldots(s_1+n-1)\,\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};(s_1+n,s_2,\ldots,s_r))$$

est holomorphe pour $\Re(s_1+n) > N_1,\ldots,\Re(s_1+n+s_2+\ldots+s_r) > N_r$, c'est-à-dire sur l'ouvert $\mathcal{U}_n$ réunion des ensembles $\Re(\sum_{q=1}^i s_q) > N_i - n$ lorsque i varie de 1 à r. Par la remarque 14(ii), il en découle que la série

$$(3.19)\qquad \sum_{n<k} l_{k,n,t_1}(s_1^{\star\star})^n \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$$

est holomorphe sur $\mathcal{U}_k$. Sur $\mathcal{U}_k$ la structure des pôles de $\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ est donc donnée par la somme finie

(3.20)

$$\sum_{n=-1}^{k-1} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}} \quad \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)).$$

Le recouvrement $\mathbb{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_k$ permet donc de décrire la partie polaire de $\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$:

Proposition 11. *Pour $\xi_1 = 1$ et $r \geq 2$, la structure des pôles de $\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$, $q \in \mathbb{N}$, est donnée par la série* **formelle**

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_2,\xi 3,\dots,\xi_r),(0,t_3,\dots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\dots,s_r)).$$

Notation 7. *On pose, pour $s \in \mathbb{C}$, $(s)_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$(s)_k = \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} = \frac{\Gamma(s+k)}{k!\,\Gamma(s)}.$$

Application 1 (Polyzêtas de Hurwitz)**.** *En particulier, pour une profondeur $r \geq 2$ et avec $\xi_1 = \dots = \xi_r = 1$, on obtient la structure des pôles du polyzêta de Hurwitz*

$$\zeta(\mathbf{s};\mathbf{t}) = \sum_{n_1>\dots>n_r>0} \frac{1}{(n_1-t_1)^{s_1}\dots(n_r-t_r)^{s_r}}$$

par la série formelle

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \zeta((s_1+s_2,s_3,\dots,s_r);(0,t_3,\dots,t_r)), \tag{3.21}$$

ce qui donne par itération le développement complet, comme fait dans les deux cas suivants.

Cas $r = 2$ *: La structure de pôle de $\zeta(s_1,s_2;t_1,t_2)$ est donnée par la série formelle*

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \zeta(s_1+s_2;0). \tag{3.22}$$

Or,

$$\begin{aligned} e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \zeta(s_1+s_2;0) &= \sum_{k\geq 0} \frac{t_2^k}{k!}\ (s_2^{\star\star})^k\ \ \zeta(s_1+s_2;0) \\ &= \sum_{k\geq 0} (s_2)_k\ t_2^k\ \zeta(s_1+s_2+k;0). \end{aligned} \tag{3.23}$$

La structure de pôle de $\zeta(s_1, s_2; t_1, t_2)$ est donc donnée par la série formelle

$$
\begin{aligned}
(3.24)\quad & \sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n \sum_{k\geq 0} (s_2)_k\ t_2^k\ \zeta(s_1+s_2+k;0) \\
&= \frac{j_{-1}}{s_1-1} \sum_{k\geq 0} (s_2)_k\ t_2^k\ \zeta(s_1+s_2+k-1;0) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k\geq 0} j_{n,t_1}\ s_1 \ldots (s_1+n-1)\ (s_2)_k\ t_2^k\ \zeta(s_1+s_2+k+n;0).
\end{aligned}
$$

Or, la fonction zêta de Riemman $\zeta(s;0)$ a pour développement singulier $(s-1)^{-1}$. Ce qui précise celui de $\zeta(s_1, s_2; t_1, t_2)$:

$$
\begin{aligned}
(3.25)\quad & \sum_{k\geq 0} \frac{B_0(t_1)\ t_2^k}{k!}\ \frac{\Gamma(s_2+k)}{\Gamma(s_2)}\ \frac{1}{(s_1-1)(s_1+s_2+k-2)} \\
&+ \sum_{n,k\geq 0} \frac{B_{n+1}(t_1)\ t_2^k}{(n+1)!\ k!}\ \frac{\Gamma(s_1+n)\Gamma(s_2+k)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}\ \frac{1}{s_1+s_2+k+n-1}.
\end{aligned}
$$

Cas $r = 3$ *: La structure des pôles de $\zeta(s_1, s_2, s_3; t_1, t_2, t_3)$ est donnée par la série formelle*

$$
\begin{aligned}
(3.26)\quad & \sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \zeta(s_1+s_2, s_3; 0, t_3) \\
&= \sum_{n=-1}^{+\infty} j_{n,t_1}\ (s_1^{\star\star})^n \sum_{k\geq 0} (s_2)_k\ t_2^k\ \zeta(s_1+s_2+k, s_3; 0, t_3) \\
&= \sum_{k\geq 0} j_{-1;t_1}\ t_2^k\ (s_2)_k\ \frac{\zeta(s_1+s_2+k-1, s_3; 0, t_3)}{(s_1-1)} \\
&\quad + \sum_{n,k\geq 0} j_{n,t_1}\ t_2^k\ \frac{\Gamma(s_1+n)}{\Gamma(s_1)}\ (s_2)_k\ \zeta(s_1+s_2+k+n, s_3; 0, t_3).
\end{aligned}
$$

En utilisant le développement singulier établi pour la profondeur 2, il en découle celui de $\zeta(s_1, s_2, s_3; t_1, t_2, t_3)$:

(3.27)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l\geq 0} j_{-1;t_1}\, t_2^k\, j_{-1;0}\, t_3^l\ \ (s_2)_k\ (s_3)_k \\
&\qquad \times \frac{1}{(s_1-1)(s_1+s_2+k-3)(s_1+s_2+s_3+k+l-3)} \\
&+ \sum_{k,l,m\geq 0} j_{-1;t_1}\, t_2^k\, j_{m;0}\, t_3^l\ \ (s_2)_k\ \frac{\Gamma(s_1+s_2+k+m-1)}{\Gamma(s_1+s_2+k-1)}\ (s_3)_l \\
&\qquad \times \frac{1}{(s_1-1)(s_1+s_2+s_3+k+l-3)} \\
&+ \sum_{n,k,l\geq 0} j_{n,t_1}\, t_2^k\, j_{-1;0}\, t_3^l\ \frac{\Gamma(s_1+n)}{\Gamma(s_1)}\ (s_2)_k\ \frac{\Gamma(s_3+l)}{\Gamma(s_3)} \\
&\qquad \times \frac{1}{(s_1+s_2+k+n-1)(s_1+s_2+s_3+k+n+l-2)} \\
&+ \sum_{n,k,m,l\geq 0} j_{n,t_1}\, t_2^k\, j_{m;0}\, t_3^l\ \frac{\Gamma(s_1+n)}{\Gamma(s_1)}\ (s_2)_k\ \frac{\Gamma(s_1+s_2+k+n+m)}{\Gamma(s_1+s_2+k+n)}\ (s_3)_l \\
&\qquad \times \frac{1}{s_1+s_2+s_3+k+n+l+m-1}.
\end{aligned}$$

3.4.2. ***Cas*** $\boldsymbol{\xi_1 \neq 1}$**.** Cette fois-ci l'opérateur à inverser est le suivant :

Notation 8. *Pour tout réel $t < 1$ et tout complexe $\xi \neq 1$, posons la fonction $\mathcal{J}^{\sigma;t;\xi} = \dfrac{e^{-(1-t)\sigma}}{1-\xi\, e^{-\sigma}}$, définie et développable en série entière au voisinage de 0. On note $\mathcal{J}^{\sigma;t;\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} j_{n,t,\xi}\sigma^n$ ce développement.*

Comme dans le cas $\xi_1 = 1$, pour "inverser" l'opérateur $\mathcal{J}^{s_1^{\star\star};t_1;\xi_1}$ en évitant les problèmes de convergence, on pose :

Notation 9. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]-\infty; 1[$ et $\xi \in \mathbb{C}$,*

$$\mathcal{J}_k^{\sigma;t;\xi} = \sum_{n=0}^{k-1} j_{n,t,\xi}\,\sigma^n \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{L}_k^{\sigma;t;\xi} = 1 - \mathcal{J}_k^{\sigma;t;\xi} \times (1-\xi e^{-\sigma}) \times e^{(1-t)\sigma}.$$

$\mathcal{L}_k^{\sigma;t;\xi}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et est en $O(\sigma^k)$: on note les coefficients de son developpement par $\mathcal{L}_k^{\sigma;t;\xi} = \sum_{n\geq k} l_{k,n,t,\xi}\sigma^n$.

Le même calcul donne

$$(1-\mathcal{L}_k^{s_1^{\star\star};t_1;\xi_1})\ \ \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) = \mathcal{J}_k^{s_1^{\star\star};t_1;\xi_1} \circ e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \xi_1 \tag{3.28}$$
$$\times\, \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r))$$

et,

$$\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s}) = \sum_{n\geq k} l_{k,n,t_1,\xi_1}\ (s_1^{\star\star})^n\ \ \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$$
$$+\sum_{n=0}^{k-1} j_{n,t_1,\xi_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \xi_1 \tag{3.29}$$
$$\times\, \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)).$$

Proposition 12. *Pour $\xi_1 \neq 1$ et $r \geq 2$, la structure des pôles de $\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$, $q\in\mathbb{N}$, est donnée par la série* **formelle**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_{n,t_1,\xi_1}\ (s_1^{\star\star})^n e^{t_2 s_2^{\star\star}}\ \ \xi_1\ \ \mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{(\xi_1\xi_2,\xi 3,\ldots,\xi_r),(0,t_3,\ldots,t_r)};(s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r)).$$

Démonstration. Le raisonnement est identique au cas $\xi_1 = 1$. □

Remarque 15. *En combinant les deux cas, on peut donc par itération retrouver le développement asymptotique de $\mathrm{Di}_q(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$.*

4. Conclusion

Nous avons pu prolonger de manière méromorphe les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$ par rapport à $\mathbf{s}$, en laissant fixe la famille de paramètres $\mathbf{t}$ et les complexes $\xi_1,\ldots,\xi_r$. L'expression intégrale trouvée en sous-section 3.1 donne directement un prolongement holomorphe au minimum sur l'ouvert délimité par $\Re(s_1)>0$, $\Re(s_i)>0$ et $\Re\left(\sum_{j=1}^{i} s_j\right)>0$ pour tout $i\geq 2$. Plus généralement le prolongement méromorphe obtenu sur $\mathbb{C}^r$ donne le prolongement holomorphe sur tout ouvert ne contenant pas un multi-pôle.

La technique des régularisées donne le prolongement, mais nous n'avons pu obtenir le calcul explicite des multi-résidus qu'en utilisant une équation de translation. Ces résultats peuvent se généraliser à l'ensemble des fonctions génératrices de Dirichlet.

Cependant l'algorithme fournissant les multi-résidus est récursif, et s'avère très coûteux à implanter. Il serait donc intéressant de chercher à l'accélérer en utilisant les relations, deux familles de relations de mélange (régularisées ou non [22]) et une famille de relations liées à la distribution des singularités, suivies par les séries $\mathrm{Di}(\mathbf{F}_{\xi,\mathbf{t}};\mathbf{s})$. Pour cela, une étude plus poussée de ces trois familles de relations s'impose : tout d'abord, donner une description complète de l'idéal des relations.

Remerciements. Nous remercions tout particulièrement Jean Ecalle de nous avoir fourni ses notes sur le calcul des multi-résidus des polyzêtas colorés.

Bibliographie

[1] J. Blümlein, *Algebraic Relations Between Harmonic Sums and Associated Quantities.* Disponible à `http ://arxiv.org/abs/hep-ph/0311046`

[2] D.J. Broadhurst & D. Kreimer, *Knots and Numbers in ϕ^4 Theory to 7 Loops and beyond.* IJMP C6, **519** (1995).

[3] D.J. Broadhurst & D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops.* À paraître.

[4] K.T. Chen, *Iterated path integrals.* Bull. Amer. Math. Soc., vol **83** (1977), 831–879.

[5] C. Costermans, J.Y. Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, *Algorithmic and combinatoric aspects of multiple harmonic sums*, In the proceeding of AofA, Barcelon, 6-10 June, (2005).

[6] C. Costermans, Hoang Ngoc Minh, *Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability.* J. Symb. Comput. **44** (7) (2009), 801–817.

[7] J.L. Dupont, *On polylogarithms.* Nagoya Math. J., vol **114** (1989), 1–20.

[8] F.J. Dyson, *The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman.* Phys. Rev. **75** (1949), 486–502.

[9] J. Ecalle, communication privée.

[10] J. Ecalle, *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **15**, n°2 (2003), 711–478.

[11] J. Ecalle, *Multizetas, perinomal numbers, arithmetical dimorphy, and ARI/GARI.* Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 6 Vol. **13** no. 4 (2004), 683–708.

[12] J-Y. Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, *Analytic and combinatoric aspexts of Hurwitz polyzêtas.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **19**, n°3 (2007), 595–640.

[13] P. Flajolet, B. Vallée, *Continued Fractions, Comparison Algorithms, and Fine Structure Constants.* CMS Conf. Proc., **27**, 53–82, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[14] Fliess M., *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives.* Bull. SMF, N°**109** (1981), 3–40.

[15] I.M. Gelfand & G.E. Shilov, *Generalized function*, Vol. **1**., Properties and operations. Academic Press, New York-London, 1964 [1977].

[16] I Gessel, *Multipartite p-partitions and inner products of skew schur functions.* Combinatorics and Algebra, Contemp. Math **34** (1984), 289–301.

[17] C. Hespel, *Une étude des séries formelles non commutatives pour l'Approximation et l'Identification des systèmes dynamiques.* Thèse de docteur d'état, Lille, 1998.

[18] Hoang Ngoc Minh, Jacob G., N.E. Oussous, *Input/Output behaviour of nonlinear analytic systems : rational approximations, nilpotent structural approximations.* Analysis of controlled dynamical systems, 255–262, Birkhaüser, Boston, 1991.

[19] Hoang Ngoc Minh, *Fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t.* Discrete Math., **180** (1998), 221–241.

[20] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, *Symbolic integration of meromorphic differential systems via Dirichlet functions.* Discrete Mathematics **210** (2000), 87–116.

[21] Hoang Ngoc Minh, G Jacob, N.E. Oussous, M. Petitot, *De l'algèbre des ζ de Riemann multivariées à l'algèbre des ζ de Hurwitz multivariées.* Journal electronique du Séminaire Lotharingien de Combinatoire **44** (2000), Art. B44i.

[22] Hoang Ngoc Minh, *Algebraic Combinatoric Aspects of Asymptotic Analysis of Nonlinear Dynamical System with Singular Input.* Acta Academiae Aboensis, Ser. B, Vol. **67**, no. 2 (2007), 117–126.

Jean-Yves Enjalbert
Lycée Jules Verne,
49 rue d'Arpajon,
91470 Limours en Hurepoix, France
E-mail: jean-yves.enjalbert@univ-lille2.fr

Hoang Ngoc Minh
Université Lille II,
1 place Déliot,
59024 Lille, France
E-mail: hoang@univ-lille2.fr