Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Xavier CARUSO et David SAVITT

Poids de l'inertie modérée de certaines représentations cristallines

Tome 22, nº 1 (2010), p. 79-96.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2010__22_1_79_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **22** (2010), 79-96

Poids de l'inertie modérée de certaines représentations cristallines

par Xavier CARUSO et David SAVITT

Résumé. Le but de cette note est de donner une démonstration complète du théorème 4.1 de [5] qui a pour objet d'expliciter l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p d'une certaine famille (assez restreinte) de représentations cristallines V du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique K. Lorsque K n'est pas absolument ramifié, le calcul de cette action a déjà été accompli par Fontaine et Laffaille qui ont montré qu'elle est entièrement déterminée par les poids de Hodge-Tate de V, au moins si ceux-ci appartiennent à un même intervalle d'amplitude $p-2$. Les exemples que l'on calcule dans cet article montrent en particulier que le résultat simple de Fontaine et Laffaille ne s'étend pas au cas absolument ramifié.

Abstract. *Tame inertia weights of certain crystalline representations*

In this note we give a complete proof of Theorem 4.1 of [5], whose aim is to describe the action of tame inertia on the semi-simplification mod p of a certain (small) family of crystalline representations V of the absolute Galois group of a p-adic field K. This kind of computation was already accomplished by Fontaine and Laffaille when K is absolutely unramified; in that setting, they proved that the action of tame inertia is completely determined by the Hodge-Tate weights of V, provided that those weights all belong to an interval of length $p-2$. The examples considered in this article show in particular that the result of Fontaine-Laffaille is no longer true when K is absolutely ramified.

Introduction

Le but de cette note est de donner une démonstration complète du théorème 4.1 de [5] qui est seulement énoncé dans cette référence (voir théorème 1.1 du présent papier pour un rappel de l'énoncé). Commençons par rappeler brièvement le contexte. Soient p un nombre premier, et k un corps

Manuscrit reçu le 11 septembre 2008.

Le second auteur a été partiellement financé par le *NSF grant DMS-0600871* et lui en est reconnaissant. Cet article a été écrit alors que les auteurs étaient respectivement en visite à l'Université de Bonn et au *Max-Planck-Insitut für Mathematik*.

parfait de caractéristique p. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K_0 le corps des fractions de W et σ le Frobenius sur chacun de ces anneaux. On fixe K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e, d'anneau des entiers noté $\mathcal{O}_K$. On suppose tout au long de ce texte $er < p - 1$. On fixe également $\bar{K}$ une cloture algébrique de K, on désigne par G_K le groupe de Galois absolu de K et par I le sous-groupe d'inertie.

Dans [5], nous avons expliqué comment construire un polygone à partir des poids de l'inertie modérée de Serre[1] de la semi-simplifiée modulo p de toute représentation de G_K à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. Nous avons en outre montré que si la représentation est semi-stable et que ses poids de Hodge-Tate sont dans l'intervalle $[0, r]$, alors ce polygone, appelé *polygone de l'inertie modérée*, est situé au-dessus du polygone de Hodge avec même point d'arrivée. La question se pose alors de savoir si n'importe quelle position satisfaisant cette contrainte peut être atteinte. En réalité, Fontaine et Laffaille ont montré dans [6] que cela ne se produisait pas lorsque $e = 1$ et V est cristalline : dans ce cas, le polygone de l'inertie modérée est toujours confondu avec celui de Hodge. Hélas, comme l'ont montré Breuil et Mézard dans [3] ce résultat est mis en défaut lorsque V n'est plus cristalline et déjà dans les situations les plus simples : toujours lorsque $e = 1$, et en dimension 2, ils ont montré que n'importe quel polygone compris entre le polygone de Hodge et celui de Newton pouvait apparaître pour les représentations semi-stables non cristallines. Le théorème 4.1 de [5] doit se comprendre comme un résultat qui va dans le même sens que celui de Breuil et Mézard, à ceci près qu'il concerne les représentations cristallines avec $e > 1$.

1. Rappel de l'énoncé du théorème 4.1 de [5]

Dans la suite, nous ferons une utilisation intensive des théories de Fontaine et Breuil concernant la classification des représentations p-adiques semi-stables et de leurs réseaux. Toutefois, pour ne pas trop allonger cette note, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à [5] pour les rappels nécessaires à ce sujet, notamment en ce qui concerne les notions suivantes : (φ, N)-module filtré, admissibilité, modules filtrés sur S_{K_0}, réseaux fortement divisibles au sens de Breuil et finalement polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée. Soulignons toutefois que dans *loc. cit.*, nous avons omis de préciser, dans la définition d'un réseau fortement divisible, qu'un tel objet doit être stable par l'opérateur de monodromie N. Rappelons malgré tout ici quelques notations. La lettre π désigne une uniformisante fixée de K dont le polynôme minimal sur K_0 est notée $E(u)$. On note S l'anneau qui sert de base aux modules de la théorie de Breuil. On

1. voir par exemple *loc. cit.* pour un rappel de la définition

rappelle brièvement qu'il est défini comme le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement au noyau de la projection $s : W[u] \to \mathcal{O}_K$, $u \mapsto \pi$ (c'est l'idéal principal engendré par $E(u)$) compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. Il est en outre muni d'un morphisme continu d'anneaux $\phi : S \to S$ défini par $\phi(u) = u^p$ et $\phi(a) = \sigma(a)$ pour $a \in W$ et d'une dérivation $N : S \to S$, $P(u) \mapsto -uP'(u)$. Soit finalement $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$ et $\tilde{S}_1 = S/(pS + \mathrm{Fil}^p S) \simeq k[u]/u^{ep}$ où $\mathrm{Fil}^p S$ fait référence à la filtration à puissances divisées.

Le cas que nous souhaitons étudier est le suivant. Soient $n_1 \leqslant n_2$ des entiers positifs ou nuls tels que $e(n_1+n_2) < p-1$ (on prendra relativement rapidement $n_1 = n_2 = 1$, mais on préfère commencer avec un peu plus de généralité). On pose $r = n_1 + n_2$ et on définit pour tout $\mathcal{L} \in K$, le (φ, N)-module filtré suivant :

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}) = K_0 e_1 \oplus K_0 e_2 \\ \varphi(e_1) = p^{n_1} e_1,\ \varphi(e_2) = p^{n_2} e_2 \\ \mathrm{Fil}^1 D(\mathcal{L})_K = \cdots = \mathrm{Fil}^r D(\mathcal{L})_K = K(\mathcal{L} e_1 + e_2) \\ \mathrm{Fil}^0 D(\mathcal{L})_K = D(\mathcal{L})_K,\ \mathrm{Fil}^{r+1} D(\mathcal{L})_K = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $n_1 = n_2$, ce module est admissible si, et seulement si $\mathcal{L} \notin \mathbb{Q}_p$. Si $n_1 \neq n_2$, il est toujours admissible sauf précisément dans le cas où $n_1 > 0$ et $\mathcal{L} = 0$. On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{L}$ est choisi de façon à ce que $D(\mathcal{L})$ soit admissible. Le polygone de Hodge de $D(\mathcal{L})$ est directement visible sur la description précédente : c'est celui qui a pour pentes 0 et r. L'objet du théorème 4.1 de [5] est le calcul du polygone de l'inertie modérée de la représentation galoisienne associée à $D(\mathcal{L})$ sous l'hypothèse $n_1 = n_2 = 1$. Afin de pouvoir énoncer le résultat de façon précise, nous avons encore besoin de fixer quelques notations. Tout d'abord, écrivons $\mathcal{L} = a + p^n \mathcal{L}_0$ où $a \in \mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{L}_0$ vérifie l'une des deux hypothèses suivantes (on rappelle que $\mathcal{L}$ est supposé ne pas appartenir à $\mathbb{Q}_p$) :

(i) $v_p(\mathcal{L}_0) = 0$ et l'image de $\mathcal{L}_0$ dans le corps résiduel n'appartient pas au sous-corps premier

(ii) $0 < v_p(\mathcal{L}_0) < 1$.

où v_p désigne la valuation p-adique normalisée par $v_p(p) = 1$. Définissons à présent $L_0 \in K_0[u]$ l'unique polynôme de degré $< e$ tel que $L_0(\pi) = \mathcal{L}_0$. Comme l'on a supposé $0 \leqslant v_p(\mathcal{L}_0) < 1$, L_0 est à coefficients dans W et nous appelons λ son terme constant. Notons finalement L_0' et E' les polynômes dérivés respectifs de L_0 et E et posons $v = v_p(\frac{pL_0'(\pi)}{E'(\pi)(\phi(\lambda)-\mathcal{L}_0)})$.

Théorème 1.1 (Théorème 4.1 de [5]). *On garde les notations précédentes et on suppose* $n_1 = n_2 = 1$. *Alors les pentes du polygone de l'inertie modérée de (la semi-simplifiée modulo p de) la représentation cristalline associée à* $D(\mathcal{L})$ *sont* $1-\min(v, 1)$ *et* $1+\min(v, 1)$. *De plus, cette représentation modulo p est irréductible si* $v \geqslant 1$, *et réductible sinon.*

Comme nous le disions précédemment, un des intérêts de ce résultat est de fournir un exemple de représentations cristallines pour lequel les polygones de Hodge et de l'inertie modérée ne sont pas confondus. En effet, le polygone de Hodge de $D(\mathcal{L})$ a pour pente 0 et 2, mais si $e > 1$, on constate que tous les couples (i'_1, i'_2) d'éléments de $\frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $i'_1 \leqslant i'_2$ et $i'_1 + i'_2 = 2$ peuvent apparaître comme pentes de son polygone de l'inertie modérée : si x est n'importe quel élément de $\mathcal{O}_{K_0}^{\times}$ dont la réduction modulo p n'appartient pas au sous-corps premier, et si $0 < j < e$ est un entier, alors les paramètres $\mathcal{L} = \pi^j$, $x + \pi^j$ et x conduisent respectivement à $v = 0$, $\frac{j}{e}$ et ∞. Conformément au résultat de Fontaine et Laffaille, ce phénomène ne se produit pas lorsque $e = 1$ puisque l'on a alors toujours $\frac{pL'_0(\pi)}{E'(\pi)(\phi(\lambda)-\mathcal{L}_0)} = 0$.

Finalement, nous détaillons rapidement le plan de cet article. Les trois sections suivantes correspondent en fait aux trois grandes étapes de la preuve du théorème 1.1. Précisément, dans la section 2, on calcule le S_{K_0}-module filtré $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ associé à $D(\mathcal{L})$ par la théorie de Breuil. Il est à noter que l'on ne suppose pas encore $n_1 = n_2 = 1$, mais simplement $e(n_1 + n_2) < p - 1$. Dans la section 3, on reprend l'hypothèse $n_1 = n_2 = 1$, et on détermine un réseau fortement divisible $\mathcal{M}$ à l'intérieur de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Enfin, dans la section 4, on donne une description simple et explicite de $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_S \tilde{S}_1$ à partir de laquelle on obtient le polygone de Hodge de $\overline{\mathcal{M}}$ (proposition 4.6) et finalement le théorème 1.1.

2. Calcul du module filtré sur S_{K_0}

Par définition le S_{K_0}-module filtré associé à $D(\mathcal{L})$ est $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = S_{K_0} \otimes_{K_0} D(\mathcal{L})$ muni du Frobenius et de l'opérateur de monodromie obtenus par extension des scalaires. On a donc directement

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = S_{K_0}e_1 \oplus S_{K_0}e_2 \\ \phi(e_1) = p^{n_1}e_1,\ \phi(e_2) = p^{n_2}e_2 \\ N(e_1) = 0,\ N(e_2) = 0 \end{array}\right.$$

où, dans un léger abus de notation, on continue à noter e_1 et e_2 les éléments $1 \otimes e_1$ et $1 \otimes e_2$. Déterminer la forme de la filtration demande par contre un peu de travail. Considérons, l'application

$$\begin{array}{rcl} T_\pi : K_0[u]/E(u)^r & \longrightarrow & K^r \\ P & \mapsto & (P(\pi), P'(\pi), \dots, P^{(r-1)}(\pi)) \end{array}$$

où $P^{(i)}$ désigne la dérivée i-ième du polynôme P. Il est clair que T_π est K_0-linéaire et on vérifie facilement qu'elle est injective. Comme les espaces de départ et d'arrivée sont tous les deux de dimension er sur K_0, T_π est une bijection. Notons $\mathcal{L}_r$ l'unique polynôme de degré $< er$ dont l'image par T_π est $(\mathcal{L}, 0, \ldots, 0)$. Bien entendu $\mathcal{L}_r$ peut également être vu comme un élément de S_{K_0}.

Proposition 2.1. *On a* $\mathrm{Fil}^r \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_r e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$.

Démonstration. Après avoir vérifié quelques compatibilités, la proposition peut s'obtenir comme une application de la formule donnée dans la remarque finale de [1] (celle qui suit la preuve de la proposition A.4). Nous donnons malgré tout ci-dessous une démonstration plus directe qui n'utilise que la définition de la filtration. Précisément, nous allons prouver par récurrence sur s que $\mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_r e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$ pour tout s compris entre 0 et r. La proposition s'ensuivra directement.

L'initialisation de la récurrence est immédiate. Fixons à présent un entier $s < r$ et supposons que l'on ait réussi à montrer $\mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_r e_1 + e_2) S_{K_0} + \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$. Par définition

$$\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{D} \,/\, N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ f_\pi(x) \in \mathrm{Fil}^{s+1} D(\mathcal{L})\}.$$

La dernière condition « $f_\pi(x) \in \mathrm{Fil}^{s+1} D(\mathcal{L})$ » étant équivalente à $x \in \mathrm{Fil}^1 \mathcal{D}(\mathcal{L})$, on obtient en utilisant la décroissance de la filtration et l'inclusion $N(\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})) \subset \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$, la suite d'implications suivante :

$$\begin{aligned} (x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})) &\Rightarrow (x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})) \\ &\Rightarrow (x \in \mathrm{Fil}^1 \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})) \\ &\Rightarrow (x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})). \end{aligned}$$

Toutes ces implications sont donc des équivalences, d'où on déduit que $\mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})$ s'identifie à l'ensemble des $x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$ pour lesquels $N(x) \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Considérons maintenant $x \in \mathrm{Fil}^s \mathcal{D}(\mathcal{L})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des éléments A et B dans S_{K_0} tels que $x \equiv (A\mathcal{L}_r + BE(u)^s) e_1 + A e_2 \pmod{\mathrm{Fil}^{s+1} S_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{L})}$. Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} N(x) &\equiv (N(A)\mathcal{L}_r + AN(\mathcal{L}_r) + sBE(u)^{s-1} N(E(u))) e_1 + N(A) e_2 \\ &\equiv (N(A)\mathcal{L}_r + sBE(u)^{s-1} N(E(u))) e_1 + N(A) e_2 \\ &\qquad\qquad\qquad \pmod{\mathrm{Fil}^s S_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{L})} \end{aligned}$$

la dernière congruence s'obtenant après avoir noté que $N(\mathcal{L}_r) = -u\mathcal{L}_r'(u)$ est multiple de $E(u)^s$ étant donné que par définition toutes ses dérivées d'ordre $< r-1$ (et donc *a fortiori* d'ordre $< s$) s'annulent en π. Ainsi, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on trouve que $x \in \mathrm{Fil}^{s+1} \mathcal{D}(\mathcal{L})$ si, et seulement si $sBE(u)^{s-1} N(E(u)) \in \mathrm{Fil}^s S_{K_0}$, *i.e.* $BN(E(u)) \in \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$. Comme $S_{K_0}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} \simeq K$ est un corps et que $N(E(u))$ ne s'annule pas dans ce quotient, cela équivant encore à $B \in \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$, à partir de quoi l'hérédité s'obtient directement. □

3. Calcul d'un réseau fortement divisible

Nous cherchons maintenant à construire un réseau fortement divisible à l'intérieur de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, essayant par là-même de généraliser l'exemple 2.2.2.(4) de [2] (qui est le point de départ de tout notre calcul). En réalité, nous n'allons y parvenir, comme cela a déjà été dit, que pour $n_1 = n_2 = 1$, ce qui sera déjà suffisant pour mettre en défaut l'analogue du résultat de Fontaine-Laffaille expliqué dans l'introduction. Nous commençons toutefois par donner un outil pour construire des réseaux fortement divisibles qui s'applique à tous n_1 et n_2, et donc — nous l'espérons — pourra être utilisé fructueusement dans de futures références.

3.1. Un outil pour obtenir des réseaux fortement divisibles.

Définition 3.1. Pour tout élément $X \in S_{K_0}$, on appelle *r-ième troncation* de X et on note $\mathrm{tronc}_r(X)$ l'unique polynôme en u à coefficients dans K_0 de degré $< er$ congru à X modulo $\mathrm{Fil}^r S_{K_0}$.

Le lemme suivant réunit quelques propriétés immédiates de l'application de troncation.

Lemme 3.2. (1) *L'application* tronc_r *est K_0-linéaire.*

(2) *Pour tous X et Y dans S_{K_0}, on a l'équivalence :*

$$X \equiv Y \pmod{\mathrm{Fil}^r S_{K_0}} \iff \mathrm{tronc}_r(X) = \mathrm{tronc}_r(Y).$$

(3) *Pour tout $X \in S$, on a $\phi(X) \equiv \phi \circ \mathrm{tronc}_r(X) \pmod{p^r S}$.*

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents. Pour le dernier, il suffit de remarquer que $X - \mathrm{tronc}_r(X) \in S \cap \mathrm{Fil}^r S_{K_0} = \mathrm{Fil}^r S$ et que $\phi(\mathrm{Fil}^r S) \subset p^r S$. □

Proposition 3.3. *On suppose donnés un entier relatif n et un élément $Z \in p^{n-n_1} S$ satisfaisant $N(Z) \equiv 0 \pmod{p^n}$ et l'implication suivante :*

$$\mathbf{H}(\mathcal{L}) : (\forall A \in S), \quad A(Z - \mathcal{L}_r p^{n_2 - n_1}) \in p^n S + \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \phi(A) \in p^{n_1} S \\ \phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A) Z \pmod{p^{n+n_1} S} \end{cases}$$

Alors le S-module engendré par $Ze_1 + p^{n_2-n_1} e_2$ et $p^n e_1$ est un réseau fortement divisible dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Posons $f_1 = Ze_1 + p^{n_2-n_1} e_2$ et $f_2 = p^n e_1$. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} p^n & Z \\ 0 & p^{n_2-n_1} \end{pmatrix}$ étant manifestement une puissance de p, il est clair que le S-module $\mathcal{M} = Sf_1 + Sf_2$ est libre et qu'il vérifie

$\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} = \mathcal{D}$. Par ailleurs, la condition sur $N(Z)$ implique que $\mathcal{M}$ est stable par N. Il ne reste donc qu'à montrer que $\phi(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) \subset p^r \mathcal{M}$ où, par définition, $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$. Soit $x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$. Alors $x \in \mathcal{M}$, d'où on déduit qu'il existe A et B dans S tels que $x = Af_1 + Bf_2$. Cette dernière égalité se réécrit encore :

$$x = Ap^{n_2-n_1}(\mathcal{L}_r e_1 + e_2) + (p^n B + AZ - A\mathcal{L}_r p^{n_2-n_1})e_1$$

ce qui, combiné à l'hypothèse « $x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$ » et à la définition de $\mathrm{Fil}^r \mathcal{D}$, montre que

$$p^n B + AZ - A\mathcal{L}_r p^{n_2-n_1} \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}. \tag{3.1}$$

En particulier $A(Z - \mathcal{L}_r p^{n_2-n_1}) \in p^n S + \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ et la prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ est satisfaite. Ainsi, par hypothèse, p^{n_1} divise $\phi(A)$ et $\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A)Z \pmod{p^{n+n_1}S}$. Rappelons que nous souhaitons obtenir $\phi(x) \in p^r \mathcal{M}$. Les égalités

$$\begin{aligned}\phi(x) &= p^{n_1}\phi(AZ)e_1 + p^{2n_2-n_1}\phi(A)e_2 + p^{n+n_1}\phi(B)e_1 \\ &= p^{n_2}\phi(A)f_1 + \left[p^{n_1-n}\phi(AZ) + p^{n_1}\phi(B) - p^{n_2-n}\phi(A)Z\right]f_2\end{aligned}$$

assurent que cela équivaut à démontrer que p^r divise à la fois $p^{n_2}\phi(A)$ et $p^{n_1-n}\phi(AZ) + p^{n_1}\phi(B) - p^{n_2-n}\phi(A)Z$. Pour le premier, c'est immédiat puisque l'on sait que p^{n_1} divise $\phi(A)$. Pour le second, on remarque dans un premier temps que la condition (3.1) entraîne grâce aux sorites du lemme 3.2 :

$$p^n\, \mathrm{tronc}_r(B) + \mathrm{tronc}_r(AZ) = p^{n_2-n_1}\mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r)$$

puis :

$$p^n\phi(B) + \phi(AZ) \equiv p^{n_2-n_1}\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \pmod{p^{r+n-n_1}S}$$

(on rappelle que Z est dans $p^{n-n_1}S$ par hypothèse). On est donc ramené à prouver que $p^{n_2-n}\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv p^{n_2-n}\phi(A)Z \pmod{p^r S}$, ce qui s'obtient directement en multipliant par p^{n_2-n} la congruence $\phi \circ \mathrm{tronc}_r(A\mathcal{L}_r) \equiv \phi(A)Z \pmod{p^{n_1+n}S}$. □

3.2. Le cas $\boldsymbol{n_1 = n_2 = 1}$. *À partir de maintenant on suppose $n_1 = n_2 = 1$ (et donc $r = 2$ et $p > 2e+1$).* Le but de ce paragraphe est de construire des réseaux fortement divisibles à l'intérieur des $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. On commence par un lemme qui va nous permettre de réduire notre étude à certains $\mathcal{L}$ particuliers pour lesquels la proposition 3.3 pourra être appliquée.

Lemme 3.4. *Pour tous $\mathcal{L} \in K$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les S_{K_0}-modules filtrés $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{L} + a)$ sont isomorphes.*

Pour tous $\mathcal{L} \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$, les S_{K_0}-modules filtrés $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $\mathcal{D}(p^n\mathcal{L})$ sont isomorphes.

Démonstration. Pour la première assertion, l'isomorphisme est donné par $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto ae_1 + e_2$. Pour la seconde assertion, il est donné par $e_1 \mapsto p^n e_1$, $e_2 \mapsto e_2$. $\square$

Ainsi, pour le calcul que l'on souhaite faire, on peut sans perte de généralité supposer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Rappelons que l'on est alors dans l'une des deux situations suivantes :

(i) $v_p(\mathcal{L}) = 0$ et l'image de $\mathcal{L}$ dans le corps résiduel n'appartient pas au sous-corps premier

(ii) $0 < v_p(\mathcal{L}) < 1$.

On rappelle également que L_0 est l'unique polynôme de degré $< e$ à coefficients dans W tel que $L_0(\pi) = \mathcal{L}$. Son terme constant λ est inversible dans le cas (i) et multiple de p dans le cas (ii). En outre, dans le cas (i), l'hypothèse indique que $\mu = \phi(\lambda) - \lambda$ est aussi inversible dans W. Dans le cas (ii), évidemment μ est multiple de p. En utilisant la définition de $\mathcal{L}_2$, on montre qu'il s'écrit :

$$\mathcal{L}_2 = L_0 + \frac{1}{p} L_1 E(u)$$

où L_1 est l'unique polynôme de degré $< e$ à coefficients dans K_0 tel que $L_1(\pi) = \frac{pL_0'(\pi)}{E'(\pi)}$. Comme $E(u)$ est un polynôme d'Eisenstein de degré $e < p$, la valuation de $E'(\pi)$ est $1 - \frac{1}{e}$. Ainsi $L_1(\pi)$ est divisible par π, d'où on déduit $L_1 \in uS + pS$.

Lemme 3.5. *Il existe un élément $t \in S$ tel que :*

- $(\phi(\lambda) - L_0)t \equiv L_1 \pmod{\mathrm{Fil}^1 S}$ *;*
- $1 + c\phi(t)$ *est inversible dans S (on rappelle que $c = \frac{\phi(E(u))}{p}$) ;*
- *dans le cas (i), $t \in uS + pS$.*

Démonstration. On traite séparément les deux cas. Dans le cas (i), on note que le terme constant de $\phi(\lambda) - L_0$ est $\phi(\lambda) - \lambda = \mu$, inversible dans W. Ainsi $\phi(\lambda) - L_0$ est lui-même inversible dans S, et on pose $t = \frac{L_1}{\phi(\lambda) - L_0}$. Il vérifie à l'évidence la première et la troisième condition. La seconde, quant à elle, résulte directement de la troisième.

Passons maintenant au cas (ii). On choisit pout t le polynôme à coefficients dans K_0 de degré $< e$ tel que $t(\pi) = \frac{L_1(\pi)}{\phi(\lambda) - L_0(\pi)}$. Il s'agit donc de montrer d'une part que t a ses coefficients dans W, et d'autre part la deuxième condition du lemme (la première étant immédiate par construction). Posons pour cela $j = ev_p(\mathcal{L})$. C'est un entier strictement compris entre 0 et e et L_0 s'écrit :

$$L_0(u) = \ell_0 + \ell_1 u + \cdots + \ell_{e-1} u^{e-1}$$

où les ℓ_i sont des éléments de W tels que p divise $\ell_0, \ldots, \ell_{j-1}$ tandis que ℓ_j est inversible. À partir de cela, on obtient facilement les congruences

$L_0(\pi) \equiv \ell_j \pi^j \pmod{\pi^{j+1}}$ et $L_0'(\pi) \equiv j\ell_j\pi^{j-1} \pmod{\pi^j}$. En faisant des manipulations analogues avec le polynôme $E(u)$, il en ressort que $E'(\pi) \equiv e\pi^{e-1} \pmod{\pi^e}$ et $p \equiv -\frac{\pi^e}{c_0} \pmod{\pi^{e+1}}$ si pc_0 est le coefficient constant de $E(u)$. Ainsi trouve-t-on :

$$t(\pi) = \frac{L_1(\pi)}{\phi(\lambda) - L_0(\pi)} = \frac{-pL_0'(\pi)}{E'(\pi)(\phi(\lambda) - L_0(\pi))} \equiv -\frac{j}{ec_0} \pmod{\pi}$$

d'où il résulte que t est à coefficients dans W et que son coefficient constant est congru à $-\frac{j}{ec_0}$ modulo p. Par suite, le coefficient constant de $1 + c\phi(t)$ est congru à $1 - \frac{j}{e}$ modulo p et donc, en particulier, inversible dans W (car $0 < j < e$). Il s'ensuit que $1 + c\phi(t)$ est inversible dans S comme annoncé. □

On fixe maintenant un élément $t \in S$ satisfaisant les conditions du lemme précédent et on pose

$$Z = \frac{\phi(L_0) + c\phi(t\phi(\lambda))}{1 + c\phi(t)} \in S. \tag{3.2}$$

Lemme 3.6. *On a $Z - \phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$.*

Démonstration. Un calcul donne

$$Z - \phi(\lambda) = \frac{\phi(L_0 - \lambda) + c\phi(t\mu)}{1 + c\phi(t)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\phi(L_0 - \lambda) + c\phi(t\mu) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Comme, par définition, λ est le terme constant de L_0, on a $L_0 - \lambda$ multiple de u et donc $\phi(L_0 - \lambda)$ est divisible par u^p. Or $u^p = u^{p-2e}u^{2e} \equiv u^{p-2e}E(u)^2 \pmod{pS}$, d'où $u^p \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Il en résulte que $\phi(L_0 - \lambda)$ est toujours dans $pS + \mathrm{Fil}^2 S$. Ainsi, pour terminer la preuve, il suffit de justifier que $\phi(t\mu)$ est lui aussi dans $pS + \mathrm{Fil}^2 S$. C'est clair si on est dans le cas (ii) puisqu'alors μ est multiple de p. Si, au contraire, on est dans le cas (i), le lemme 3.5 nous dit que $t \in uS + pS$ et on conclut comme précédemment. □

Notre but désormais est de montrer que le couple $(1, Z)$ satisfait l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathcal{L})$. Si on y parvient, par application de la proposition 3.3, on aura bien réussi à construire un réseau fortement divisible dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Comme tous les puissances de u qui apparaissent dans Z sont divisibles par p, on trouve que $N(Z)$ est divisible par p. On considère un élément $A \in S$ satisfaisant la prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ (et on souhaite bien évidemment montrer la conclusion). On observe qu'ajouter à A un élément de $\mathrm{Fil}^2 S$ ne modifie pas la véracité de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$. Ainsi, on peut supposer que $A = \mathrm{tronc}_2(A)$ et par suite qu'il s'écrit sous la forme $A = pA_0 + A_1 E(u)$ où A_0 (resp. A_1) est un polynôme à coefficients dans $\frac{1}{p}W$ (resp. W) de degré $< e$.

Lemme 3.7. *Avec les notations précédentes, A_0 est à coefficients dans W.*

Démonstration. Encore une fois, on traite séparément les cas (i) et (ii).

Dans le cas (i), on remarque que $A(\mathcal{L}_2 - Z)$ appartient simultanément à $pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ et $\frac{1}{p}S$ (puisque $\mathcal{L}_2 \in \frac{1}{p}S$). Ainsi $A(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS + \frac{1}{p}\mathrm{Fil}^2 S$ et en appliquant ϕ on obtient $\phi(A)\phi(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS$. Or, en utilisant le lemme 3.6, on vérifie facilement que $\phi(\mathcal{L}_2 - Z) = \phi(L_0) + c\phi(L_1) - \phi(Z)$ a un terme constant congru à $-\phi(\mu)$ modulo p, et donc qu'il est inversible dans W. Ainsi $\phi(\mathcal{L}_2 - Z)$ est inversible dans S et, de $\phi(A)\phi(\mathcal{L}_2 - Z) \in pS$, on déduit $\phi(A) \in pS$. Comme $\phi(A) = p\phi(A_0) + pc\phi(A_1)$, il suit $\phi(A_0) \in S$ à partir de quoi le lemme s'obtient facilement.

Dans le cas (ii), on a $AZ \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ et donc la prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$ s'écrit ici $A\mathcal{L}_2 \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$. Soit X le polynôme à coefficients dans W de degré $< e$ tel que $X(\pi) = \frac{p}{\mathcal{L}} \in W$. Alors $\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1$ s'annule en π, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1 \equiv \frac{Y}{p} E(u) \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}} \tag{3.3}$$

pour un certain polynôme Y à coefficients dans K_0, uniquement déterminé si on impose en outre $\deg Y < e$ (ce que nous ferons par la suite). En dérivant (3.3) et en évaluant en π, on obtient $Y(\pi) = \frac{pX'(\pi)}{X(\pi)E'(\pi)}$. Un argument analogue à celui conduit lors de la preuve du lemme 3.5 permet d'accéder à la valuation de $Y(\pi)$: on trouve $v_p(Y(\pi)) = 0$. Ainsi Y est à coefficients dans W et son terme constant est inversible dans cet anneau. On en déduit que Y est inversible dans S. Par ailleurs, on a

$$A_0 Y E(u) \equiv A\left(\frac{\mathcal{L}_2 X}{p} - 1\right) = \frac{A\mathcal{L}_2}{p} X - A \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}}$$

d'où on trouve $A_0 Y E(u) \in S + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}$ puis $A_0 Y \in S + \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$. De l'inversibilité de Y, on déduit enfin $A_0 \in S + \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$ à partir de quoi la conclusion est immédiate. □

En combinant les lemmes 3.2 et 3.7, il vient

$$\phi(A) \equiv \phi \circ \mathrm{tronc}_2(A) = p\phi(A_0) + pc\phi(A_1) \pmod{p^2 S}. \tag{3.4}$$

En particulier $\phi(A) \in pS$ (ce qui avait déjà été vu dans la preuve du lemme 3.7 dans le cas (i)). Il ne reste donc plus qu'à démontrer que p^2 divise

$$\Delta = \phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) - \phi(A)Z. \tag{3.5}$$

En appliquant $\phi \circ \mathrm{tronc}_2$ à la congruence

$$A\mathcal{L}_2 \equiv pA_0L_0 + (A_0L_1 + A_1L_0)E(u) \pmod{\mathrm{Fil}^2 S_{K_0}} \tag{3.6}$$

et en utilisant à nouveau le lemme 3.2, on déduit :

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) \equiv p\phi(A_0L_0) + pc\phi(A_0L_1 + A_1L_0) \pmod{p^2 S}. \tag{3.7}$$

En remplaçant dans (3.5) $\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2)$, $\phi(A)$ et Z par les expressions données respectivement par les équations (3.7), (3.4) et (3.2), on obtient après un calcul un peu laborieux :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{p} \equiv \frac{c\phi(A_0)}{1+c\phi(t)}\,\phi(L_1 + L_0 t - \phi(\lambda)t) \\ + \frac{c^2\phi(t)}{1+c\phi(t)}\,\phi(A_0L_1 + A_1L_0 - \phi(\lambda)A_1) \pmod{pS}.\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est divisible par p étant donné que, par la première condition du lemme 3.5, $L_1 + L_0 t - \phi(\lambda)t \in \mathrm{Fil}^1 S$. Il ne reste donc plus qu'à prouver qu'il en est de même du second terme. Pour cela, on remarque que le lemme 3.6 et la congruence (3.6) entraînent ensemble

$$(3.8)\quad A(\mathcal{L}_2 - Z) \equiv E(u)\big(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)\big) \pmod{pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}}.$$

Ainsi, en utilisant la prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$, il vient $E(u)(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$ puis $A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$. En appliquant ϕ, on obtient finalement $\phi(A_0L_1 + A_1L_0 - A_1\phi(\lambda)) \in pS$ comme souhaité.

4. Réduction modulo p et poids de l'inertie modérée

On conserve les hypothèses et les notations de la partie précédente : notamment, on continue de supposer que $\mathcal{L}$ relève soit du cas (i), soit du cas (ii) (on rappelle que, grâce au lemme 3.4, on peut toujours se ramener à l'un de ces deux cas), et en particulier donc que $0 \leqslant v_p(\mathcal{L}) < 1$. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{L})$ le réseau fortement divisible de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ qui est donné par la proposition 3.3, et soit $T = T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ le $\mathbb{Z}_p$-réseau de $V(\mathcal{L})$ correspondant. Posons $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_S \tilde{S}_1$ et, pour tout $m \in \mathcal{M}$, notons $\overline{m}$ son image dans $\overline{\mathcal{M}}$. De même, si s est un élément de S, définissons $\overline{s}$ comme l'image de s dans $\tilde{S}_1 = k[u]/u^{ep}$.

Introduisons à ce niveau quelques notations supplémentaires. Soient U et V les uniques polynômes à coefficients dans W de degré $< e$ tels que $U(L_0 - \phi(\lambda)) = p + VE(u)$. Dans le cas (i), on remarque que U et p sont associés modulo $\mathrm{Fil}^1 S$ (*i.e.* ils définissent le même idéal principal de $S/\mathrm{Fil}^1 S$), alors que dans le cas (ii), on observe qu'étant donné que les termes constants de U et $L_0 - \phi(\lambda)$ sont tous deux divisibles par p, le terme constant de V est, lui, congru à $-c_0^{-1}$ modulo p. Finalement, remarquons que si t satisfait les conditions du lemme 3.5, il en est de même de $\mathrm{tronc}_1(t)$ et qu'en outre modifier t en $\mathrm{tronc}_1(t)$ ne change pas la valeur de v. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que $t = \mathrm{tronc}_1(t)$; c'est ce que nous faisons à partir de maintenant.

Soit $\mathcal{A} \subset S$ l'idéal formé des éléments A qui satisfont la prémisse de $\mathbf{H}(\mathcal{L})$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A} = \{A \in S \,/\, A(Z - \mathcal{L}_2) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S_{K_0}\}.$$

Lemme 4.1. *L'idéal $\mathcal{A}$ est engendré par $p + tE(u)$, $UE(u)$ et $\mathrm{Fil}^2 S$.*

Démonstration. Bien entendu, on a $\mathrm{Fil}^2 S \subset \mathcal{A}$. En outre, la formule (3.8) combinée à la première condition du lemme 3.5 montre que $p + tE(u) \in \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ un élément arbitraire. Quitte à ajouter à A un élément de $\mathrm{Fil}^2 S$, on peut supposer que $A = \mathrm{tronc}_2(A)$. Par le lemme 3.7, on peut alors écrire $A = pA_0 + A_1 E(u)$ avec $A_0, A_1 \in W[u]$. Quitte à soustraire maintenant le multiple adéquat de $p + tE(u)$, on peut supposer que $A_0 = 0$, et donc que $A = A_1 E(u)$. On est finalement ramené à déterminer les polynômes $A_1 \in W[u]$ pour lesquels $A_1 E(u) \in \mathcal{A}$. Par une nouvelle application de la formule (3.8), c'est le cas si et seulement si $A_1(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$.

Dans le cas (i), $L_0 - \phi(\lambda)$ est inversible, d'où on obtient l'équivalence entre $A_1(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ et $A_1 E(u) \in pE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$. Comme $UE(u)$ et $pE(u)$ sont associés modulo $\mathrm{Fil}^2 S$, la condition est encore équivalente à $A_1 E(u) \in UE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$, et le lemme est démontré.

Dans le cas (ii), on note que p divise $A_1(\pi)(L_0(\pi) - \phi(\lambda))$. On en déduit qu'il existe $U' \in S$ tel que $A_1 - U'U \in \mathrm{Fil}^1 S$, puis que $A_1 E(u) \in UE(u)S + \mathrm{Fil}^2 S$ comme annoncé. Réciproquement $U(L_0 - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ par construction de U, d'où $UE(u) \in \mathcal{A}$. □

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, définissons

$$m(A) = A \cdot f_1 + \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z)) \cdot f_2\,.$$

À partir de la congruence (3.1) et du lemme 4.1, on démontre rapidement le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $m(A)$ est un élément de $\mathrm{Fil}^2 \mathcal{M}$. De plus, $\mathrm{Fil}^2 \mathcal{M}$ est engendré par $m(p + tE(u))$, $m(UE(u))$ et $(\mathrm{Fil}^2 S)\mathcal{M}$.*

Dans la suite, nous écrirons $\overline{m}(A)$ à la place de $\overline{m(A)}$. On cherche à présent à construire *deux* éléments qui engendrent $\mathrm{Fil}^2 \overline{\mathcal{M}}$ et à calculer leur image par ϕ_2. Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 4.3. *Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\phi_2(\overline{m}(A)) = \overline{(\phi(A)/p) f_1} + \overline{C f_2}$$

où

$$C = \frac{\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) - \phi(A)Z + \phi(\phi(\lambda))\phi(A - \mathrm{tronc}_2(A))}{p^2} \in S.$$

Démonstration. Le lemme suivra de la preuve de la proposition 3.3 une fois que l'on aura montré que C et $\frac{1}{p^2}(p\phi(B) + \phi(AZ) - \phi(A)Z)$ sont congrus modulo p, où $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$.

Puisque $A \in pS + \mathrm{Fil}^1 S$ et $Z - \phi(\lambda) \in pS + \mathrm{Fil}^2 S$, on a $A(Z - \phi(\lambda)) \in pS + \mathrm{Fil}^3 S$. Ainsi

$$\mathrm{tronc}_2(A(Z - \phi(\lambda))) - A(Z - \phi(\lambda)) \in p\mathrm{Fil}^2 S + \mathrm{Fil}^3 S$$

puis, en appliquant ϕ :

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A(Z - \phi(\lambda))) - \phi(A(Z - \phi(\lambda))) \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Après un petit calcul :

$$p^2 C \equiv p\phi(B) + \phi(AZ) - \phi(A)Z \pmod{p^3}$$

ce qui est exactement ce que l'on voulait. □

Proposition 4.4. (1) *Dans le cas (i),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par* $\overline{m}(p + tE(u))$ *et* $\overline{E(u)^2 f_1}$.

(2) *Dans le cas (ii),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par* $\overline{m}(p+tE(u))$ *et* $\overline{m}(UE(u))$.

Démonstration. Il suffit, dans chacun des cas, de montrer que les images par ϕ_2 des deux éléments qui apparaissent dans l'énoncé du lemme engendrent $\overline{\mathcal{M}}$ comme $\widetilde{S}_1$-module.

On commence avec $A = p + tE(u)$. Alors $\phi(A)/p = 1 + c\phi(t)$ et $\overline{(\phi(A)/p)}$ est une unité dans $\widetilde{S}_1$ grâce à la seconde condition du lemme 3.5. On calcule maintenant l'élément C du lemme 4.3. Comme $A\mathcal{L}_2 \equiv pL_0 + (tL_0 + L_1)E$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^2 S_{K_0})$, le premier terme du numérateur de C est

$$\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = p\phi(L_0) + pc \cdot \phi \circ \mathrm{tronc}_1(tL_0 + L_1)\,.$$

Le second terme, quant à lui, est $\phi(A)Z = p\phi(L_0) + pc\phi(t\phi(\lambda))$. Comme $\mathrm{tronc}_2(A) = A$, le troisième terme s'annule et, après s'être rappelé que l'on a supposé $t = \mathrm{tronc}_1(t)$, on obtient

$$p^2 C = pc \cdot \phi \circ \mathrm{tronc}_1(tL_0 + L_1 - t\phi(\lambda))\,.$$

La première condition du lemme 3.5 montre que la quantité précédente s'annule, et donc que $C = 0$. Au final

$$\phi_2(\overline{m}(p + tE(u))) = \overline{(1 + c\phi(t))f_1}.$$

On retiendra en particulier que le coefficient devant $\overline{f_1}$ dans le membre de droite est inversible.

Intéressons-nous à l'autre générateur, c'est-à-dire $m = \overline{E(u)^2 f_1}$ dans le cas (i) et $m = \overline{m}(UE(u))$ dans le cas (ii). Dans le cas (i), on remarque que puisque $\mathrm{tronc}_2(E(u)^2(\mathcal{L}_2 - Z)) = 0$, on a $m = \overline{m}(A)$ avec $A = E(u)^2$. Ainsi on peut appliquer le lemme 4.3 pour calculer $\phi_2(f)$. Comme $\phi(A) = p^2c^2$, on a $\overline{\phi(A)/p} = 0$. Par ailleurs, après avoir remarqué que $\phi \circ \mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = 0$, on trouve facilement

$$C = \frac{c^2\phi(\phi(\lambda) - L_0)}{1 + c\phi(t)}.$$

Ainsi $\phi_2(m) = \overline{Cf_2}$ et le fait qu'il engendre tout $\overline{\mathcal{M}}$ avec $\phi_2(\overline{m}(p + tE(u)))$ résulte de l'inversibilité de C satisfaite puisque $\phi(\lambda) - L_0$ est une unité dans ce cas.

Dans le cas (ii), on a clairement $m = \overline{m}(A)$ avec $A = UE(u)$. On peut donc appliquer à nouveau le lemme 4.3. On a d'abord clairement $\overline{\phi(A)/p} = \overline{c\phi(U)}$. Par ailleurs, après un assez long calcul qui utilise $\mathrm{tronc}_2(A) = A$, $\mathrm{tronc}_1(\phi(\lambda)U) = \phi(\lambda)U$ et $\mathrm{tronc}_2(A\mathcal{L}_2) = \mathrm{tronc}_1(UL_0)E(u) = (p + \phi(\lambda)U)E(u)$ ainsi que la définition de U et V, on trouve

$$C = \frac{c^2\phi(t - V)}{1 + c\phi(t)}\,.$$

Donc

$$\phi_2(\overline{m}(UE(u))) = \overline{c\phi(U)f_1} + \overline{Cf_2}.$$

Pour conclure, il suffit donc encore une fois de justifier que C est inversible dans S. Or nous avons déjà évalué les termes constants de t et V, et trouvé qu'ils sont respectivement congrus à $-\frac{j}{ec_0}$ et $-\frac{1}{c_0}$ modulo p. Ainsi, ils ne sont pas congrus entre eux, et la proposition s'ensuit. $\square$

Définissons $g_1 = \overline{m}(p + tE(u))$ et $g_2 = \overline{E(u)^2 f_1}$ (resp. $g_2 = \overline{m}(UE(u))$) dans le cas (i) (resp. le cas (ii)). Posons également

$$B_1 = (L_0 - \phi(\lambda)) + \mathrm{tronc}_1\left(\frac{t(\phi(\lambda) - Z)}{p}\right)u^e$$

et dans le cas (ii) seulement

$$B_2 = \left(1 + \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_1(U(\phi(\lambda) - Z))\right)u^e\,.$$

On remarque tout de suite que par le lemme 3.6, B_1 et B_2 sont tous les deux des éléments de S. La structure de $\overline{\mathcal{M}}$ est alors résumée dans la proposition suivante.

Proposition 4.5. (1) *Dans le cas (i),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par*

$$g_1 = u^e\overline{tf_1} + \overline{B_1 f_2}$$
$$g_2 = u^{2e}\overline{f_1}$$

avec

$$\phi_2(g_1) = \overline{(1 + c\phi(t))f_1}$$
$$\phi_2(g_2) = \overline{\frac{c^2\phi(\phi(\lambda) - L_0)}{1 + c\phi(t)}f_2}$$

où les deux coefficients dans les deux dernières équations sont des unités.

(2) *Dans le cas (ii),* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *est engendré par*

$$g_1 = u^e\overline{tf_1} + \overline{B_1f_2}$$
$$g_2 = u^e\overline{Uf_1} + \overline{B_2f_2}$$

avec

$$\phi_2(g_1) = \overline{(1+c\phi(t))f_1}$$
$$\phi_2(g_2) = \overline{c\phi(U)f_1} + \overline{\frac{c^2\phi(t-V)}{1+c\phi(t)}f_2}$$

et les coefficients de $\overline{f_1}$ *dans* $\phi_2(g_1)$ *et* $\overline{f_2}$ *dans* $\phi_2(g_2)$ *sont des unités.*

Démonstration. À la lumière de la proposition 4.4 et de sa preuve, il ne reste qu'à montrer que nos formules pour B_1 et B_2 sont correctes.

Pour le premier, il s'agit de montrer que si $A = p + tE(u)$ et $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$, alors $B \equiv B_1 \pmod p$. Or, le lemme 3.6 donne $pZ \equiv p\phi(\lambda) \pmod{p^2S + \mathrm{Fil}^2S}$, à partir de quoi un calcul direct utilisant la première condition du lemme 3.5 entraîne

$$A(\mathcal{L}_2 - Z) \equiv p(L_0 - \phi(\lambda)) + tE(u)(\phi(\lambda) - Z) \pmod{p^2S + \mathrm{Fil}^2S_{K_0}}$$

puis la conclusion.

Pour le second, il s'agit de même de montrer que si $A = UE(u)$ et $B = \frac{1}{p}\mathrm{tronc}_2(A(\mathcal{L}_2 - Z))$, alors $B \equiv B_2 \pmod p$. Mais c'est immédiat par le lemme 3.6 et la définition de U. □

Proposition 4.6. *Le polygone de Hodge de* $\overline{\mathcal{M}}$ *a pour pentes* $v_p(\mathcal{L})$ *et* $2 - v_p(\mathcal{L})$.

Remarque. Bien entendu, dans le cas où l'on n'a pas commencé par se ramener à $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, il faut modifier la proposition précédente en disant que les pentes du polygone de Hodge sont $v_p(\mathcal{L}_0)$ et $2 - v_p(\mathcal{L}_0)$.

Démonstration. Dans le cas (i), on observe que $\overline{B_1}$ est inversible. Pour ce qui suit, nous retiendrons également que si $v < 1$ avec $v = \frac{j}{e}$, alors $\overline{t}$ est le produit de u^j par une unité, alors que dans le cas où $v \geqslant 1$, on a $\overline{t} = 0$. Dans le cas (ii), par contre, $\overline{B_1}$ (resp. $\overline{U}$, resp. $\overline{B_2}$) est le produit d'une unité par u^j (resp. u^{e-j}, resp. u^e), alors que $\overline{t}$ est, quant à lui, inversible (c'est-à-dire $v = 0$). De plus, on vérifie que le coefficient en u^e dans $\overline{tB_2} - \overline{B_1U}$ n'est autre que le terme constant de $\overline{t} - \overline{V}$, dont on sait qu'il ne s'annule pas. La proposition résulte facilement de ces considérations. □

On se penche désormais sur la démonstration du théorème 1.1.

Proposition 4.7. *Soit* $\overline{\mathcal{M}}$ *un objet de* $\mathrm{Mod}_{\widetilde{S}_1}^{\phi,N}$ *(en reprenant les notations de* [5]*) de rang* 2 *admettant pour base* (e_1, e_2). *Dans la suite de la proposition, toutes les lettres grecques font référence à des éléments inversibles de* $\widetilde{S}_1$.

(0) *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* e_2 *et* $u^{2e}e_1$ *et que*

$$\phi_2(e_2) = \mu e_1 , \qquad \phi_2(u^{2e}e_1) = \rho e_2 .$$

Alors $T_{\mathrm{st}}(\overline{\mathcal{M}})$ *est irréductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont* 0 *et* 2.

(1) *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* $\alpha u^{e+j}e_1 + e_2$ *et* $u^{2e}e_1$ *et que*

$$\phi_2(\alpha u^{e+j}e_1 + e_2) = \mu e_1 , \qquad \phi_2(u^{2e}e_1) = \rho e_2 .$$

Si $j \geqslant e$, *alors* $T_{\mathrm{st}}(\overline{\mathcal{M}})$ *est irréductible et les pentes de son polygone de l'inertie modérée sont* 0 *et* 2. *Au contraire, si* $j < e$, *alors* $\overline{\mathcal{M}}$ *admet un sous-objet* $\overline{\mathcal{M}}'$ *de rang* 1 *tel que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}' = u^{e-j}\overline{\mathcal{M}}'$.

(2) *Supposons que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ *soit engendré par* $\alpha u^e e_1 + \beta u^j e_2$ *et* $\gamma u^{2e-j}e_1 + \delta u^e e_2$ *avec* $j < e$ *et* $\alpha\delta - \beta\gamma \in \widetilde{S}_1^\times$. *Supposons également que*

$$\phi_2(\alpha u^e e_1 + \beta u^j e_2) = \mu e_1 , \qquad \phi_2(\gamma u^{2e-j}e_1 + \delta u^e e_2) = \sigma u^{p(e-j)}e_1 + \rho e_2 .$$

Alors $\overline{\mathcal{M}}$ *admet un sous-objet* $\overline{\mathcal{M}}'$ *de rang* 1 *tel que* $\mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}' = u^e\overline{\mathcal{M}}'$.

Démonstration. L'alinéa (0) est immédiat par le théorème 5.2.2 de [4].

Passons à (1). Si $j \geqslant e$, posons $e_1' = \phi_2(e_2) = \mu e_1 - \phi(\alpha)u^{p(j-e)}e_2$. À partir de $e_2 \in \mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ et $\phi(u^{2e}) = 0$, on obtient $\phi(u^{2e}e_1') = \phi(\mu)\rho e_2$. Comme (e_1', e_2) est encore une base de $\overline{\mathcal{M}}$, le résultat suit de (0).

Supposons désormais $j < e$. On cherche $\overline{\mathcal{M}}'$ engendré par un vecteur $m \in \overline{\mathcal{M}}$ de la forme $m = e_2 + Xu^{p(e-j)}e_1$ où X est inversible dans $\widetilde{S}_1$. On calcule

$$\phi_2(u^{e-j}e_2) = -\rho\phi(\alpha)e_2 + \mu u^{p(e-j)}e_1 .$$

puis, en utilisant $2e < (p+1)(e-j)$:

$$\phi_2(u^{e-j}m) = \rho(-\phi(\alpha) + \phi(X)u^{p((p+1)(e-j)-2e)})e_2 + \mu u^{p(e-j)}e_1.$$

Ainsi, si X est une solution

$$\rho X(-\phi(\alpha) + \phi(X)u^{p((p+1)(e-j)-2e)}) = \mu \tag{4.1}$$

on a terminé. Mais on montre facilement que (4.1) admet une unique solution en résolvant l'équation coefficient par coefficient. En outre, le coefficient constant de X est celui de $-\frac{\mu}{\rho\phi(\alpha)}$, d'où on déduit l'inversibilité souhaitée de X. Il faut encore vérifier que $\overline{\mathcal{M}}'$ est stable par N, mais cela ne pose pas de problème car la relation de commutation à ϕ_2 implique $N(\bar{c}\rho e_2) = 0$, à partir de quoi on déduit que $N(e_2) = -\frac{N(\rho)}{\rho}e_2$. Par suite, un calcul simple montre que $N(u^{e-j}m) \equiv u^{e-j}ae_2 \pmod{\mathrm{Fil}2\tilde{S}_1\,\overline{\mathcal{M}}}$ pour un certain $a \in \tilde{S}_1$. Ainsi $N(u^{e-j}m) \in \mathrm{Fil}2\overline{\mathcal{M}}$ et $N \circ \phi_2(u^{e-j}m) = \phi_2(u^e N(u^{e-j}m)) = 0$. Il en résulte la stabilité souhaitée étant donné que $\phi_2(u^{e-j}m)$ est un générateur de $\overline{\mathcal{M}}'$.

Finalement, on traite (2). On cherche à nouveau $\overline{\mathcal{M}}'$ engendré par un vecteur $m \in \overline{\mathcal{M}}$ de la forme $m = e_2 + Xu^{p(e-j)}e_1$, toutefois sans imposer à X cette fois-ci d'être inversible. En posant $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, on calcule

$$\phi_2(\Delta u^e e_2) = \rho\phi(\alpha)e_2 + (\phi(\alpha)\sigma - \phi(\gamma)\mu)u^{p(e-j)}e_1\,.$$

On a $u^{p(e-j)}e_1 \in \mathrm{Fil}^2\overline{\mathcal{M}}$ car $p(e-j) > 2e$, d'où il suit $\phi_2(u^e \cdot u^{p(e-j)}e_1) = 0$. Ainsi

$$\phi_2(u^e m) = \phi_2(u^e e_2) = \frac{\rho\phi(\alpha)}{\phi(\Delta)}\left(e_2 + \frac{\phi(\alpha)\sigma - \phi(\gamma)\mu}{\rho\phi(\alpha)}u^{p(e-j)}e_1\right)$$

et, puisque $\frac{\rho\phi(\alpha)}{\phi(\Delta)}$ est inversible, on peut prendre $X = \frac{\phi(\alpha)\sigma-\phi(\gamma)\mu}{\rho\phi(\alpha)}$. De même que dans le cas précédent, on vérifie pour finir que $\overline{\mathcal{M}}'$ est stable par N. $\square$

Il est maintenant aisé de conclure : au vu des propositions 4.5 et 4.7 et des descriptions obtenues dans la preuve de la proposition 4.6, le théorème 1.1 est une conséquence immédiate du théorème 5.2.2 de [4].

A. Appendice : erratum à [5]

Nous remercions Hui June Zhu de nous avoir signaler une petite erreur (sans conséquence) dans un commentaire que nous avons fait dans [5]. Nous profitons de ce papier pour la corriger. L'erreur se trouve vers le début de la sous-section 2.1 lorsque nous rappelons la définition du polygone de Newton. En effet, nous disons alors : « *Le polygone de Newton de D quant à lui est le polygone associé aux pentes de l'action de Frobenius ; c'est aussi le polygone de Newton (usuel) du polynôme caractéristique de la matrice de φ dans une base quelconque de D sur K_0.* ». Or, si la première partie est bien correcte, il n'est malheureusement pas vrai que ce polygone s'identifie au polygone de Newton (usuel) du polynôme caractéristique de la matrice du Frobenius dans une base quelconque de D sur K_0.

Nous rappelons, pour mémoire, un contre-exemple dû à Katz [7, p. 124]. Soient p un nombre premier congru à 3 modulo 4, et $K_0 = \mathbb{Q}_p(i)$ où i est une racine carrée de -1 : c'est une extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle le Frobenius est l'unique morphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire qui envoie i sur $-i$. Soit maintenant $D = K_0e_1 \oplus K_0e_2$ muni du Frobenius défini par $\phi(e_1) = 2e_1$ et $\phi(e_2) = 2pe_2$. Il est bien sûr possible de faire de D un module filtré faiblement admissible en posant $\mathrm{Fil}^0D = D$, $\mathrm{Fil}^1D = K_0e_2$ et $\mathrm{Fil}^2D = 0$: on est donc bien dans la situation souhaitée. Par ailleurs, il est clair que les valeurs propres de ϕ ont pour valuation 0 et 1. Le polygone de Newton de D a donc pour pentes 0 et 1. Posons $f_1 = e_1 - ie_2$ et $f_2 = e_2 - ie_1$.

La famille (f_1, f_2) forme une base de D sur K_0 dans laquelle la matrice de ϕ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1-p & i(1+p) \\ i(1+p) & p-1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 4p$ et les pentes de son polygone de Newton sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; elles diffèrent donc de celles du polygone de Newton de D.

Comme nous l'avons déjà signalé, cette erreur est sans conséquence sur les résultats de [5] : la caractérisation fausse du polygone de Newton que nous avons donnée n'est, à vrai dire, jamais utilisée. Il suffit donc pour rendre l'article correct de supprimer purement et simplement l'assertion incriminée.

Bibliographie

[1] C. Breuil, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths.* Math. Annalen **307** (1997), 191–224.

[2] C. Breuil, *Integral p-adic Hodge theory.* Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80.

[3] C. Breuil, A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en $\ell = p$. Duke math. J. **115** (2002), 205–310.

[4] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$.* J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92.

[5] X. Caruso, D. Savitt, *Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables.* À paraître dans Math. Ann.

[6] J. M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 547–608.

[7] N. Katz, *Slope filtration of F-crystals.* Astérisque **63** (1979), 113–164.

Xavier Caruso
IRMAR
Université Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
E-mail: `xavier.caruso@normalesup.org`

David Savitt
Department of Mathematics
University of Arizona
617 N. Santa Rita Ave
Tucson, AZ 85721, USA
E-mail: `savitt@math.arizona.edu`