JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX
anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Lionel DORAT

Tore de l'inertie modérée

Tome 20, nº 2 (2008), p. 243-279.
<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2008__20_2_243_0>

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **20** (2008), 243-279

Tore de l'inertie modérée

par Lionel DORAT

Résumé. Nous étudions dans cet article les représentations cristallines vérifiant les conditions de Fontaine-Laffaille, en particulier l'image de l'inertie modérée. A partir de cette image, nous définissons un tore et une représentation de ce tore, dont nous montrons qu'elle est à valeurs (sous certaines conditions) dans l'adhérence de Zariski de l'image de la représentation galoisienne, et nous donnons le lien entre cette représentation du tore et le groupe à un paramètre de Hodge-Tate (tout ceci à l'aide d'une étude modulo p, grâce à des raisonnements utilisant la théorie des algèbres de Lie et des groupes algébriques).

Abstract. In this paper, for a cristalline representation verifying Fontaine-Laffaille theory, a torus and a representation of this torus are defined thanks to moderate inertia. It is shown as well how this representation is linked to the Hodge-Tate one-parameter group thanks to a study modulo p (based on Algebraic groups and Lie algebras theory), which is the key point of this article. Moreover, the image of the torus'representation is contained in the Zariski closure of the cristalline representation.

Introduction

Dans tout ce travail, p est un nombre premier impair, $\mathcal{K}$ un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié et de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique p. Nous noterons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, c'est donc l'anneau des entiers de $\mathcal{K}$. Tous trois sont munis d'une action de Frobenius, notée σ. Fixons $\overline{\mathcal{K}}$ une cloture algébrique de $\mathcal{K}$, et posons $\Gamma_{\mathcal{K}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, $\mathbb{C}$ le complété de $\overline{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{X} : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (c'est-à-dire que $g(z) = z^{\mathcal{X}(g)}$ pour tout $g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$ et pour toute racine de l'unité $z \in \overline{\mathcal{K}}$ d'ordre une puissance de p). Nous allons étudier les représentations cristallines de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$, cadre de la théorie de Fontaine-Laffaille.

Manuscrit reçu le 7 novembre 2007.

Rappelons que pour les représentations cristallines abéliennes, nous avons la description suivante : pour $s \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{Z}_{p^s}$ l'anneaux des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{F}_{p^s}$ (c'est à dire l'anneau des entiers de l'extension non ramifiée de degré s de $\mathbb{Q}_p$), T_s le tore restriction des scalaires de $\mathbb{Z}_{p^s}$ à $\mathbb{Z}_p$ appliqué à $\mathbb{G}_m$, et $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ (où les flèches du système projectif sont induites par la norme). Rappelons que $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s} = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^s}/\mathbb{F}_p)} {}^{\tau}\mathbb{G}_m$. Alors J.-P. Serre a montré dans [Ser79], en considérant les représentations associées aux groupes formels de Lubin-Tate, que la catégorie tannakienne formée des $\mathbb{Q}_p$-représentations cristallines abéliennes est la catégorie des représentations linéaires de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Le groupe à un paramètre de Hodge-Tate n'est dans le cas abélien rien d'autre que le sous-groupe à un paramètre correspondant à la limite projective des plongements

$$\mathbb{G}_m \to {}^{\mathrm{Id}}\mathbb{G}_m \subset T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s}.$$

L'action de l'inertie modérée détermine les poids de Hodge-Tate modulo $p-1$, donc en particulier, si ces derniers sont dans $[\![0, p-2]\!]$, la représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ correspondante est entièrement déterminée par l'action de l'inertie modérée. Ceci va nous permettre de généraliser cette situation au cas des modules de Fontaine-Laffaille.

Se donner une section de l'inertie modérée permet de construire une représentation de $\mathbf{T}$ (voir paragraphe 2.1). Une fois fixé la section, nous allons étudier la représentation dont les poids sont donnés par les poids de Hodge-Tate. Nous noterons, pour toute représentation cristalline U à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$, ρ^U_{mr} cette représentation de $\mathbf{T}$ dans GL_U, et dont $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ désignera l'image. Nous démontrons :

Théorème 1. *Considérons une représentation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension n, dont les poids de Hodge-Tate sont compris entre 0 et h, avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, et $p \geq 2n-1$. Alors le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est inclus dans l'adhérence de Zariski $\mathbf{G}$ de l'image de la représentation.*

De plus, le groupe à un paramètre définissant la graduation de Hodge-Tate est conjugué dans $\mathbf{G}$ au sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ correspondant à l'image de la limite projective des plongements de $\mathbb{G}_m$ dans la composante ${}^{\mathrm{Id}}\mathbb{G}_m$ de $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^{nr}$.

L'idée de ce résultat vient de ce que pour les Φ-modules filtrés, il y a un résultat analogue : J.-P. Wintenberger a construit dans [Win84] pour tout objet M de la catégorie des Φ-modules filtrés sur W une représentation $\rho^M_{\mathbf{MF}}$ de $\mathbf{T}$ (vérifiant toutes les propriétés fonctorielles voulues), qui permet, en se restreignant aux modules filtrés correpondant aux représentations abéliennes, c'est à dire les modules élémentaires, de décrire la catégorie tannakienne des modules élémentaires. De plus, dans [Win91], J.-P. Wintenberger a décrit un $\mathcal{K}$-point du torseur liant représentations cristallines abéliennes à leurs Φ-modules filtrés, à l'aide du groupe à un paramètre que nous voulons étudier.

L'étude principale faite ici sera celle du cas tué par p. Introduisons quelques définitions : soit M un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ (c'est à dire un Φ-module filtré sur k, avec une filtration concentrée en les entiers $[\![-h, 0]\!]$), supposons $p \geq \dim_k M$, et posons $V = \mathbf{V_{cris}}(M)$ la représentation galoisienne correspondante par le foncteur de Fontaine-Laffaille. Définissons $\overline{G}_M$ comme étant le groupe algébrique associé à la catégorie tannakienne engendrée par M. Nous cherchons à donner un analogue à $\overline{G}_M$ sur V ; pour cela, algébrisons l'image de Galois : pour l'image de l'inertie modérée, nous avons $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$; pour l'image de l'inertie sauvage dans GL_V, nous reprenons les idées introduites par Nori (cf. [Nor87]), et nous introduisons U_V le groupe algébrique engendré exponentiellement (cf. définition 27) par celle-ci. Alors nous pouvons définir $\overline{G}_V$ comme étant le groupe algébrique engendré par U_V et $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$, et alors :

Théorème 2. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un isomorphisme de k-espaces vectoriels $V \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to M$ qui identifie $\overline{G}_V$ à $\overline{G}_M$ et les deux représentations de $\mathbf{T}$ (c'est à dire que cet isomorphisme identifie ρ_{mr} à $\rho_{\mathbf{MF}}$).*

Notons w_V le foncteur oubli qui à la $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline V associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à V, et w_D celui qui associe le $\mathcal{K}$-espace vectoriel sous-jacent au Φ-module filtré $\mathbf{D_{cris,p}}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$. Alors les $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre $w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}$ sur le foncteur fibre w_D, $\mathbf{Isom}^{\otimes}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$, forment un torseur sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_V)_{|\mathcal{K}}$ et sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_D)$. Dans [Dor07], nous construisons un point de ce torseur qui se comporte bien sur les réseaux des représentations cristallines de Fontaine-Laffaille. C'est ce qui nous permet (voir le paragraphe 4.1) de passer d'un résultat sur k à un résultat sur W.

Table des matières

1. Rappels

1.1. Définition de A_{cris}. Soit R l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ formées d'éléments de $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{K}}}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n (cf. [Fon82], p. 535). C'est un anneau parfait de caractéristique p, muni d'une valuation ; son corps résiduel s'identifie à k. Soit $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R, et $W_n(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n (cf. [Ser68] pour plus de détails sur la notion de vecteurs de Witt). L'application $\theta : W(R) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ défini par $\theta((x_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(n)}$ est un morphisme d'anneaux surjectif, de noyau un idéal principal de $W(R)$ (cf. [Fon82], p.537). Soit $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots)$ un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$. Définissons de même pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n : W(R) \to \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n$ par

$$\theta_n((x_0, \cdots, x_{n-1})) = \sum_{m=0}^{n-1} p^m x_m^{(m)};$$

c'est un morphisme d'anneaux surjectif dont le noyau est engendré par $\lambda_{<n} = (\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$.

Notons $W_n^{PD}(R)$ l'enveloppe à puissance divisées (cf. [BO78], chapitre 3) de $W_n(R)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_n)$, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(R)$. Posons alors

$$A_{cris} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W_n^{PD}(R)$$

C'est aussi le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta)$, compatibles avec les puissances canoniques sur $pW(R)$.

L'application θ s'étend naturellement à $W_{\mathcal{K}}(R) := \mathcal{K} \otimes_W W(R)$ (par une application toujours notée θ). Notons

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W_{\mathcal{K}}(R)/\operatorname{Ker}(\theta)^n$$

le complété de $W_{\mathcal{K}}(R)$ pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique. C'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathrm{Ker}(\theta)$; la série qui définit $\log([\varepsilon])$ converge dans B_{dR}^{+} vers un élément noté t, qui est un générateur de l'idéal maximal, ce qui fait que $B_{dR} = B_{dR}^{+}[\frac{1}{t}]$ est un corps, muni d'une action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (par fonctorialité), et d'une filtration définie par $\mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^{+}$ pour $i \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$\forall g \in \Gamma_{\mathcal{K}},\ g(t) = \mathcal{X}(g)t$$

où $\mathcal{X}$ est le caractère cyclotomique.

A_{cris} se plonge naturellement dans B_{dR} (cf. [Fon94]), et alors $t \in A_{cris}$. L'application $\varphi : W(R) \to W(R)$ déduite du Frobenius $x \mapsto x^p$, $x \in R$ s'étend naturellement en une application $\varphi : A_{cris} \to A_{cris}$ semi-linéaire par rapport à σ, et qui vérifie $\varphi(t) = pt$. De plus, A_{cris} hérite alors de la filtration de B_{dR} ($\mathrm{Fil}^i(A_{cris}) = \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \cap A_{cris}$), et l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ laisse stable A_{cris}. Il en va de même pour $B_{cris} = A_{cris}[\frac{1}{t}]$ (nous noterons Φ le prolongement de φ à B_{cris}).

1.2. Représentations cristallines. Soit V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, et $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(V)$ une représentation continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Définissons $\mathbf{D_{cris,p}}$ par

$$\mathbf{D_{cris,p}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$$

(où $\Gamma_{\mathcal{K}}$ agit sur le produit tensoriel via $g(v \otimes x) = \rho(g)(v) \otimes g(x)$). $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Définition 1. La représentation (ρ, V) est *cristalline* si $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\mathbf{cris}}(\Gamma_{\mathcal{K}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma_{\mathcal{K}})$ formée par les représentations cristallines.

Définissons $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ la catégorie des Φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$: un objet D de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni

– d'une filtration $(\mathrm{Fil}^i(D))_{i \in \mathbb{Z}}$ formée de sous-espaces vectoriels, fitration qui est décroissante, exhaustive et séparée ;
– d'une application σ-semi-linéaire bijective $\Phi : D \to D$.

Les morphismes de cette catégorie sont les applications $\mathcal{K}$-linéaires qui préservent la filtration et Φ.

$\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est alors naturellement muni d'une structure de Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$, provenant de la filtration et de l'application Φ de B_{cris}.

Définition 2. Un Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ isomorphe à un $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ pour V cristalline est dit *admissible*.

Notons $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}^{\mathbf{ad}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ formée des modules admissibles.

$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p},\mathbf{cris}}(\Gamma_\mathcal{K})$ et $\mathbf{MF}_\mathcal{K}^{\mathbf{ad}}$ sont deux catégories tannakiennes dont $\mathbf{D}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}$ induit une équivalence de $\otimes$-catégories, et dont un quasi-inverse est donné par

$$\mathbf{V}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(D) = \ \mathrm{Fil}^0(D \otimes_\mathcal{K} B_{cris})^{\Phi=1}$$

(De la filtration et de l'application Φ de D et B_{cris}, nous pouvons munir $\mathrm{Fil}^0(D \otimes_\mathcal{K} B_{cris})$ de la filtration produit tensoriel et de l'application Φ définie par $\Phi(d \otimes x) = \Phi(d) \otimes \Phi(x)$, $\mathbf{V}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(D)$ est alors l'ensemble des éléments de $\mathrm{Fil}^0(D \otimes_\mathcal{K} B_{cris})$ qui sont laissés fixes par Φ). L'application naturelle (provenant de la multiplication dans B_{cris})

$$\mathbf{V}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(D) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \to D \otimes_\mathcal{K} B_{cris} \tag{3}$$

est alors une bijection. J.-M. Fontaine a montré que c'est un point du torseur $\mathbf{Isom}^\otimes(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$ décrit dans l'introduction.

Rappelons que si X est un schéma, G un schéma en groupe qui agit sur X, dire que X est un G-torseur est essentiellement dire que le morphisme $G \times X \to X \times X$ défini par $(g, x) \mapsto (gx, x)$ est un isomorphisme (pour plus de détails, voir [BLR90] par exemple). L'exemple clé dans cet article est le suivant : si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne sur un corps K, ω_1 et ω_2 deux foncteurs fibres de $\mathcal{T}$ (à valeurs donc dans les K-espaces vectoriels de dimension finie), alors l'ensemble des $\otimes$-automorphismes du foncteur ω_1, $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_1)$, est un schéma en groupe affine, $\mathcal{T}$ est une catégorie tensorielle équivalente à la catégorie des représentations finies de $\mathbf{Aut}^\otimes(w_1)$ sur K (voir [DMOS82] pour plus de détails), et l'ensemble $\mathbf{Isom}^\otimes(\omega_1, \omega_2)$ des $\otimes$-isomorphismes du foncteur ω_1 sur ω_2 est muni naturellement d'une action de $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_1)$, et est un $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_1)$-torseur (c'est aussi un $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_2)$-torseur, où $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_2)$ est le même schéma en groupe que $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega_1)$, mais l'action est différente).

Dans [Dor07], le résultat principal est la construction d'un autre point du torseur $\mathbf{Isom}^\otimes(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$, qui "se comporte bien" vis à vis des réseaux (voir le paragraphe 2.2 pour plus de détails). C'est grâce à lui que nous allons obtenir les résultats à venir (le théorème 53 et ses conséquences), car il nous permet de montrer que les torseurs que nous construisons dans les démonstrations sont non vides.

1.3. Poids de Hodge-Tate. Rappelons que pour $\rho : \Gamma_\mathcal{K} \to GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ une représentation continue sur un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, l'action de $\Gamma_\mathcal{K}$ peut s'étendre à $V_\mathbb{C} = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}$ via $g(v \otimes x) = \rho(g)(v) \otimes g(x)$. Notons alors pour $i \in \mathbb{Z}$, $V_\mathbb{C}\{i\} = \{v \in V_\mathbb{C} | \forall g \in \Gamma_\mathcal{K},\ g(v) = \mathcal{X}(g)^i v\}$. $V_\mathbb{C}\{i\}$ est un $\mathcal{K}$-sous espace vectoriel de $V_\mathbb{C}$ tel que l'injection $V_\mathbb{C}\{i\} \to V_\mathbb{C}$ s'étend en une injection $\mathbb{C}$-linéaire

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_\mathbb{C}\{i\} \otimes_\mathcal{K} \mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$$

Définition 4. V est dit de Hodge-Tate si cette injection est une bijection. Les poids de Hodge-Tate sont alors les $i \in \mathbb{Z}$ tels que $\dim_{\mathcal{K}} V_{\mathbb{C}}\{i\} \neq 0$.

Si V est cristalline, alors elle est de Hodge-Tate, et ses poids de Hodge-Tate sont les opposés des sauts de la filtration de $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$.

1.4. Rappels sur les Φ-modules. Les résultats énoncés ici proviennent de [Win84], p.517 à p.529.

Soit $\mathbf{MG_{W,tf}}$ la catégorie des Φ-modules gradués définie par :

– un objet est un module M de type fini sur W avec une graduation $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et une application σ-semi-linéaire bijective $f_M : M \to M$ (s'il n'y a pas ambiguité, nous noterons M pour l'objet $(M, (M_i), f_M)$) ;
– les morphismes sont les applications W-linéaires commutants aux f et compatibles aux graduations.

C'est une $\otimes$-catégorie abélienne, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui possède des Hom internes.

Soit X (respectivement X_s pour $s \in \mathbb{N}^*$) le groupe additif des applications périodiques (respectivement ayant s pour période) de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $\xi \in X$, notons $|\xi|$ la période de ξ. Le Frobenius σ agit sur X par $\forall \xi \in X, \forall i \in \mathbb{Z}$, $\sigma(\xi)(i) = \xi(i+1)$, et laisse donc stable les X_s.

Notons T_s le tore sur $\mathbb{Z}_p$ dont le groupe des caractères est X_s (T_s est le tore obtenue par la restriction des scalaires de $\mathbb{Z}_{p^s}$ à $\mathbb{Z}_p$ du groupe multiplicatif), et donc si $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ (les flèches étant induites par la norme), X est le groupe des caractères de $\mathbf{T}$.

Pour tout M objet de $\mathbf{MG_{W,tf}}$, définissons, pour tout $\xi \in X$, le W-module $M\{\xi\}$ par $M\{\xi\} = \{x \in M | f_M^j(x) \in M_{\xi(j)} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 5. Un module est dit *élémentaire* si $M = \oplus_{\xi\in X} M\{\xi\}$.

Pour tout $u \in Aut_W(M)$, définissons un nouvel objet M^u de $\mathbf{MG_{W,tf}}$ de la manière suivante :

– en tant que W-module gradué, $M^u = M$;
– posons $f_{M^u} = u^{-1} \circ f_M$.

Proposition 6. *Soit M un objet de $\mathbf{MG_{W,tf}}$. Il existe au plus un $u \in Aut_W(M)$ tel que :*

(1) $(u - \mathrm{Id})(M_i) \subset \oplus_{j<i} M_j$, *ceci pour tout $i \in \mathbb{Z}$;*

(2) M^u *est élémentaire.*

Définissons la catégorie $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ dite des *bons* Φ-modules gradués de la manière suivante : c'est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MG_{W,tf}}$ dont les objets M sont tels que

– il existe un u (noté alors u_M) vérifiant les conditions de la proposition 6

– M/pM ait une suite de composition dont les quotients successifs sont des modules élémentaires.

La catégorie $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ est stable par sous-objet, objet quotient, somme directe, produit tensoriel et Hom interne.

Pour tout objet M de $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$, posons (si $u = u_M$), $M^{e\ell} := M^u$, $M_\xi := M^{e\ell}\{\xi\}$, $f^{e\ell}_M := u^{-1} f_M$ et $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} := M^{f^{e\ell}_M}$ (c'est-à-dire les éléments fixés par $f^{e\ell}_M$).

De part les définitions, $M_i = \bigoplus_{\xi(0)=i} M_\xi$. La graduation $M = \bigoplus_{\xi\in X} M_\xi$ induit une représentation $\rho^M_{\mathbf{MF}}$ (notée $\rho_{\mathbf{MF}}$ s'il n'y a pas ambiguité) de $\mathbf{T}$ sur M. Appellons $\mathcal{T}_M$ (que nous noterons aussi $\mathcal{T}$ s'il n'y a pas ambiguité) le tore image dans GL_M donné par $\rho_{\mathbf{MF}}$.

Soit $\mathbf{MF_W}$ la catégorie dite des Φ-modules filtrés sur W, dont les objets sont les W-modules N muni

– d'une filtration décroissante exhaustive et séparée formée de sous-modules $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$;
– pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'une application σ-semi-linéaire $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i(N) \to N$ telle que $\varphi^i|_{\mathrm{Fil}^{i+1}(N)} = p\varphi^{i+1}$.

Les morphismes de cette catégorie sont donnés par les applications W-linéaires compatibles aux filtrations et commutants aux φ^i.

Un exemple de module filtré serait A_{cris}, mais pour cela, il faut modifier la filtration : en posant $\varphi^i = \frac{1}{p^i}\Phi|_{\mathrm{Fil}^i(A_{cris})}$, il faut poser $\mathrm{Fil}^p(A_{cris}) = \{0\}$ (cette filtration sera appelée la *filtration tronquée* de A_{cris}).

Pour pouvoir introduire un produit tensoriel et le Hom interne, il faut restreindre la catégorie : considérons $\mathbf{MF'_W}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_W}$ formée des objets N vérifiant :

– il existe $i \in \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Fil}^i(N) = \{0\}$;
– les $\mathrm{Fil}^i(N)$ sont des facteurs directs dans N.

Alors, pour tout objet de $\mathbf{MF'_W}$, il existe un scindage de la filtration. De plus, le produit tensoriel et le Hom existent (cf. [Win84], p.521).

A_{cris} (muni de la filtration tronquée) est un objet de $\mathbf{MF'_W}$, ce que nous garderons en mémoire pour la définition de $\mathbf{V_{cris}}$.

Considérons $\mathbf{MF_{W,tf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF'_W}$ formée des W-modules N de type fini tels que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^i(\mathrm{Fil}^i(N)) = N$. C'est une $\otimes$-catégorie abélienne, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui possède des Hom internes.

Pour tout objet N de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, il existe une structure de Φ-module gradué : si $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un scindage de $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$, posons pour $x \in N$ tel que $x = \sum_i x_i$ avec $x_i \in N_i$, $f_N(x) = \sum_i \varphi^i_N(x_i)$. Alors, $(N, (N_i), f_N)$ est bien un Φ-module gradué. Réciproquement, si M est un Φ-module gradué, en posant $\mathrm{Fil}^i(M) = \oplus_{j\geq i} M_j$ et pour $x \in \mathrm{Fil}^i(M)$ tel que $x = \sum_j x_j$ avec $x_j \in M_j$, $\varphi^i(x) = \sum_{j\geq i} p^{j-i} f(x_j)$, M est alors muni d'une structure de Φ-module filtré.

Le résultat principale démontré dans [Win84] (Théorème 3.1.2 p.529) est le théorème suivant :

Théorème 7. *La méthode qui est décrite ci-dessus permet de construire une équivalence de $\otimes$-catégories entre $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ et $\mathbf{MF_{W,tf}}$.*
Plus précisement, pour tout objet N de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, il existe un et un seul scindage de la filtration de N tel que le Φ-module gradué qu'il définit soit bon, et ce scindage vérifie les propriétés de fonctorialité attendues.

Posons enfin $\mathbf{MF^{[a,b]}_W}$ (resp. $\mathbf{MF^{[a,b]}_k}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ formée des W (resp. k)-modules libres tels que $\mathrm{Fil}^a(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^{b+1}(M) = \{0\}$. Notons $\mathbf{MF^{-h}_W} = \mathbf{MF^{[-h,0]}_W}$, $\mathbf{MF^{h}_W} = \mathbf{MF^{[0,h]}_W}$ et $\mathbf{MF^{\pm h}_W} = \mathbf{MF^{[-h,h]}_W}$ (de même en remplacant W par k).

Soit D un Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ admissible. Alors il possède des sous-réseaux fortement divisible, M, c'est-à-dire un réseau M vérifiant

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} p^{-i}\Phi(\mathrm{Fil}^i(D)\cap M) = M.$$

En posant $\mathrm{Fil}^i(M) = \mathrm{Fil}^i(D)\cap M$, $\varphi^i = p^{-i}\Phi|_{\mathrm{Fil}^i(M)}$, M devient un Φ-module filtré sur W. Posons alors $D_i := \mathcal{K}\otimes_W M_i$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $D_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{K}\otimes_W M_{\mathbb{Z}_p}$, $D^{e\ell}_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{K}\otimes_W M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$, $D_\xi := \mathcal{K}\otimes_W M_\xi$. La graduation $(D_\xi)_{\xi\in X}$ correspond à un morphisme du protore $T\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ dans $GL_{D^{el}_{\mathbb{Q}_p}}$, noté γ_D.

Ces définitions ne dépendent pas du choix de M.

Remarque 8. Si M est un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ libre sur W, en posant $D := \mathcal{K}\otimes_W M$, $\mathrm{Fil}^i(D) := \mathcal{K}\otimes_W \mathrm{Fil}^i(M)$, et pour $x_i\in\mathrm{Fil}^i(M)$, $\Phi(x_i) := p^i\varphi^i(x_i)$, l'objet D ainsi construit est un Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible (et donc en fait admissible) dont M est un réseau fortement divisible. Par contre, différents M peuvent donner le même D. Nous noterons D_M ce Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible construit à partir de M.

1.5. Foncteur de Fontaine-Laffaille.

Définition 9. Pour tout objet M de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tel que $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$, nous définissons la représentation galoisienne $\mathbf{V_{cris}}(M)$ par :

$$\mathbf{V_{cris}}(M) = \left(\mathrm{Fil}^0(M\otimes_W A_{cris})\right)^{\varphi^0=1}$$

Si M est libre comme W-module, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre (c'est un sous-réseau de $\mathbf{V_{cris,p}}(D_M)$).

En effet, rappelons que A_{cris} muni de la filtration tronquée est un objet de $\mathbf{MF'_W}$, M aussi, donc le produit tensoriel existe, et $\left(\mathrm{Fil}^0(M \otimes_W A_{cris})\right)^{\varphi^0=1}$ a donc un sens.

Remarque 10. Cette définition s'étend en la définition du foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ de la sous-catégorie pleine formée des objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tels que $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$ vers la catégorie des représentations galoisiennes (continues) sur $\mathbb{Z}_p$.

Théorème 11 (Théorème de Fontaine-Laffaille)**.** *Une fois restreint à la sous-catégorie pleine des M vérifiant $\mathrm{Fil}^{2-p}(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$, le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ ainsi défini est exact et pleinement fidèle. De plus si M est libre sur W, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un réseau de la représentation galoisienne associée à D_M (c'est-à-dire que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{V_{cris}}(M)) = \mathrm{rg}_W(M)$).*

Remarque 12. N. Wach a montré qu'un quasi-inverse de $\mathbf{V_{cris}}$ est donné par

$$\mathbf{D_{cris}}(T) = \bigcup_{\substack{\Lambda \in \mathbf{MF_W^{-h}} \\ \Lambda \subset (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}}} \Lambda$$

Pour la suite, nous aurons besoin d'introduire l'équivalent du foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ sur $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$. L'idée est alors de faire une torsion à la Tate : supposons $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, notons $W[-h]$ le Φ-module filtré dont le W-module sous-jacent est W, $\mathrm{Fil}^i(W[-h]) = \begin{cases} W \text{ si } i \leq -h \\ 0 \text{ si } i > -h \end{cases}$ et $\varphi^{-h}(x) = \sigma(x)$, et rappelons que $\mathbb{Z}_p(1)$ représente le $\mathbb{Z}_p$-modulue de rang 1 muni de l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ donné par le caractère cyclotomique, $\mathbb{Z}_p(h)$ est la représentation galoisienne $\mathbb{Z}_p(1)^{\otimes h}$ pour $h \geq 0$ (et $\mathbb{Z}_p(h) = \mathbb{Z}_p(-h)^*$ si $h \leq 0$) ; définissons alors le foncteur $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$ par $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) = \mathbf{V_{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-h)$ pour N objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$, et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(f) = \mathbf{V_{cris,p}}(f)$ restreinte à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ pour $f : N \to N'$ flèche de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$. Nous noterons $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}$ un quasi-inverse.

2. Tore de l'inertie modérée

2.1. La représentation de T_s. Notons, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, T_s le groupe algébrique sur $\mathbb{Z}_p$ tel que pour R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre, $T_s(R)$ soit le groupe $(R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s})^*$ des éléments inversibles de la R-algèbre $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s}$. Le groupe $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est donc le tore restriction des scalaires à la Weil du tore $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_{p^s}}$ de $\mathbb{Q}_{p^s}$ à $\mathbb{Q}_p$. Notons $\mathcal{X}_\gamma$ pour $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{F}_{\mathrm{p}})$ le caractère défini sur $T_s(R)$ par $\mathcal{X}_\gamma(r \otimes \lambda) = \gamma(\lambda) r$ (en considérant l'isomorphisme

$$(R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s})^* \simeq \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{F}_{\mathrm{p}})} (R^\gamma)^*$$

pour R une $\mathbb{Z}_{p^s}$-algèbre, $\mathcal{X}_\gamma$ est juste la projection canonique sur la composante γ). Notons $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ où les morphismes de transition sont induits par la norme.

Soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(U)$ une représentation continue (pour U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini), fixons-nous une section η de l'inertie modérée, ce qui nous permet de parler de l'image par la représentation de l'inertie modérée. Cette image est d'ailleurs un groupe cyclique d'ordre premier à p, et $\rho \circ \eta$ se factorise par la projection de l'inertie modérée sur un $\mathbb{F}_{p^s}^*$. A l'aide des représentants de Teichmüller, nous voyons $\mathbb{F}_{p^s}^*$ inclus dans $\mathbb{Z}_{p^s}^* = T_s(\mathbb{Z}_p)$. Puis, il ne reste plus qu'à bien choisir parmi les représentations de $\mathbf{T}$ dans $GL(U)$ qui relève la représentation de $\mathbb{F}_{p^s}^*$ induite par l'inertie modérée. Nous allons considérer celle qui a les mêmes poids que les poids de Hodge-Tate de ρ (dans le cas où ρ est de Hodge-Tate), que nous noterons ρ_1, c'est à dire, si $\mathbb{Z}_p^{nr}v$ est une droite propre pour l'action de $\mathbb{F}_{p^s}^*$ sur $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^{nr}$, et que ε (un générateur de $\mathbb{F}_{p^s}^*$) agisse par la valeur propre $\varepsilon^{\sum_{j=0}^{s-1} a_j^{(i)} p^j}$ avec les $a_j^{(i)} \in [\![0, p-1]\!]$ non tous égaux à $p-1$, alors le caractère de ρ_1 sur $\mathbb{Z}_p^{nr}v$ sera donné par $\prod_{j=0}^{s-1} \mathcal{X}_{\sigma^j}^{a_j^{(i)}}$.

Les $a_j^{(i)}$ sont, dans certains cas, congrus modulo p à des poids de Hodge-Tate de ρ. Par exemple, si les poids de Hodge-Tate sont dans $[\![0, p-2]\!]$ (pour pouvoir utiliser le foncteur de Fontaine-Laffaille), la représentation galoisienne U/p possède une suite finie de Jordan-Hölder, ce qui permet de se ramener aux représentations simples, et l'action du groupe de Galois est alors décrit à l'aide des sauts de la filtration du module associé par le foncteur de Fontaine-Laffaille (donc à l'aide des opposés des poids de Hodge-Tate de U), cf. théorème 5.3 page 570 de [FL82] (faire attention que le foncteur utilisé dans l'article de Fontaine et Laffaille est le "dual" de celui utilisé ici). Le théorème 64 de notre article donne un résultat plus fort.

Définition 13. Supposons que les poids de Hodge-Tate de U soient dans $[\![0, p-2]\!]$. Notons Inv : $z \in GL(U) \mapsto z^{-1} \in GL(U)$. Nous appelerons ρ_{mr}^U la représentation de $\mathbf{T}$ donnée par $\rho_{mr}^U = \mathrm{Inv} \circ \rho_1$, et $(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})_U$ son image.

Remarque 14. Le fait de ne pas prendre ρ_1, mais son inverse permet de prendre en compte le fait que les poids de Hodge-Tate sont les opposés des sauts de la filtration du Φ-module filtré correspondant.

Remarque 15. Dans le cas d'une représentation cristalline abélienne V sur $\mathbb{Q}_p$, la représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ caractérisant V est donnée par la même formule que ci-dessus, à la différence que les $a_j^{(i)}$ qui interviennent sont les poids de Hodge-Tate (donc non nécessairement dans $[\![0, p-2]\!]$), et seuls leurs réductions modulo p peuvent s'interpréter à l'aide de l'image de l'inertie modérée.

Pour la suite, si U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![a, p-2+a]\!]$, nous définirons ρ_{mr}^U à l'aide d'une torsion à la Tate, c'est à dire $\rho_{mr}^U = \rho_{mr}^{U\otimes\mathbb{Z}_p(-a)} \otimes \rho_{mr}^{\mathbb{Z}_p(a)}$.

2.2. Lien entre $\boldsymbol{\rho_{mr}}$ et $\boldsymbol{\rho_{\mathbf{MF}}}$. Dans [Dor07], nous construisons un isomorphisme de foncteur f tel que pour N objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$), f_N est un isomorphisme

$$\mathsf{f}_N : \mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \to N \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$$

pour une certaine $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ plate sur $\mathbb{Z}_p$ (pour plus de détails sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, cf. [Fon90] p. 257, ou bien les rappels de [Dor07]). Le théorème 49 de [Dor07] nous donne en particulier que $\mathsf{f}[\frac{1}{p}] \in \mathbf{Isom}^{\otimes}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[\frac{1}{p}])$.

Proposition 16. *Soit $0 \leq h \leq p-2$, et N un objet élémentaire de $\mathbf{MF_W^h}$, alors pour tout $x \in \mathbf{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$, l'égalité $\rho_{\mathbf{MF}}^N(x) = \mathsf{f}_N \circ \rho_{mr}^{\mathbf{V_{cris}}(N)}(x) \circ \mathsf{f}_N^{-1}$ est vérifiée.*

Démonstration. Comme f_N est un isomorphisme de $\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ sur $N \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbf{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[\frac{1}{p}])$ nous avons l'égalité $\rho_{\mathbf{MF}}(x) = \mathsf{f}_{N\otimes_W\mathcal{K}} \circ \rho_{mr}(x) \circ \mathsf{f}_{N\otimes_W\mathcal{K}}^{-1}$ (c'est à dire une fois p rendu inversible).

$N \otimes_W \mathcal{K}$ est alors un module élémentaire sur $\mathcal{K}$, or la catégorie des modules élémentaires sur $\mathcal{K}$ est une catégorie tannakienne, et le foncteur oubli est un foncteur fibre à valeurs dans les $\mathcal{K}$-espaces vectoriels. Le groupe pro-algébrique correspondant est alors justement $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$, et si D est un module élémentaire sur $\mathcal{K}$, la représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$ associée est donné par $\rho_{\mathbf{MF}} \times_W K$ (un résultat plus général, analogue à la proposition 18 de cet article, est montré dans [Win84] partie 4).

De plus, en notant ϖ_D le foncteur oubli qui a un module élémentaire D sur $\mathcal{K}$ associe le $\mathcal{K}$-espace vectoriel sous-jacent, et ϖ_V le foncteur de Fontaine, qui à D associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à $\mathbf{V_{cris,p}}(D)$, alors les $\otimes$-isomorphismes entre ces deux foncteurs, $\mathbf{Isom}^{\otimes}(\varpi_V \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, \varpi_D)$, forment un torseur pour le schéma en groupe $\mathbf{Aut}^{\otimes}(\varpi_D)$ (qui n'est autre que $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$) des $\otimes$-automorphismes du foncteur ϖ_D.

Dans [Win91], J.-P. Wintenberger a construit un $\mathcal{K}$-point g de ce torseur. Si D est un module élémentaire sur $\mathcal{K}$ dont les sauts de la filtration sont dans l'intervalle $[\![-(p-2), 0]\!]$, alors $g_D^{-1} \circ \rho_{\mathbf{MF}} \circ g_D$ est une représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$ qui se trouve être celle décrite au paragraphe précédent, c'est à dire $\rho_{mr} = g_D^{-1} \circ \rho_{\mathbf{MF}} \circ g_D$ (c'est une retraduction de la construction explicite de g).

Le théorème 49 de [Dor07] donne $\mathsf{f}[\frac{1}{p}] \in \mathbf{Isom}^{\otimes}(\varpi_V \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, \varpi_D)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}[\frac{1}{p}])$, donc $\mathsf{f}[\frac{1}{p}]$ et g diffèrent d'un élément de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}[\frac{1}{p}])$ (puisque ce sont deux éléments du $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$-torseur $\mathbf{Isom}^{\otimes}(\varpi_V \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, \varpi_D)$, qui sont définis sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}[\frac{1}{p}]$), autrement dit, il existe un élément $t \in \mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}[\frac{1}{p}])$ tel que $\rho_{\mathbf{MF}}(t) \circ g = \mathsf{f}[\frac{1}{p}]$, et comme $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$ est abélien, nous aurons bien que pour tout $x \in \mathbf{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}[\frac{1}{p}])$,

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_D^{-1}[\frac{1}{p}] \circ \rho_{\mathbf{MF}}(x) \circ \mathsf{f}_D[\frac{1}{p}] &= g_D^{-1} \circ \rho_{\mathbf{MF}}(t)^{-1} \circ \rho_{\mathbf{MF}}(x) \circ \rho_{\mathbf{MF}}(t) \circ g_D \\ &= g_D^{-1} \circ \rho_{\mathbf{MF}}(x) \circ g_D = \rho_{mr}(x) \end{aligned}$$

$\square$

Ce qui nous intéressera, pour la suite, c'est le résultat que nous venons de montrer, modulo p. Pour plus de clarté, nous allons donner une autre démonstration, plus directe, qui fait apparaître la construction de la représentation ρ_{mr} (la démonstration qui suit pourrait d'ailleurs s'adapter sans problème à la situation précédente) :

Démonstration. Soit N un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ (en particulier, c'est un k-espace vectoriel de dimension finie) élémentaire avec $0 \leq h \leq p-2$, et montrons que pour tout $x \in \mathbf{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}/p)$, $\rho_{\mathbf{MF}}(x) = \mathsf{f}_N \circ \rho_{mr}(x) \circ \mathsf{f}_N^{-1}$.

Comme N est élémentaire, c'est une somme directe de modules simples, donc il suffit de prouver le résultat pour N simple, c'est à dire lorsqu'il existe $\xi \in X$ tel que $N = \bigoplus_{i=0}^{n-1} N_{\sigma^i(\xi)}$ si $n = |\xi|$ est la période de ξ (cf. paragraphe 1.4) et $\dim_k(N_{\sigma^i(\xi)}) = 1$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Nous pouvons alors trouver pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $e_i \in N_{\sigma^i(\xi)}$ non nul, tels que $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ soit une base de N sur k, et $\forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $e_i \in \mathrm{Fil}^{\xi(\mathrm{i})}(N)$ et $\varphi^{\xi(i)}(e_i) = e_{i+1}$ (voir par exemple [FL82] partie 4).

Notons $\Omega_n \in A_{cris}$ "la" période associée à la représentation de Lubin-Tate de hauteur n pour l'uniformisante p, c'est à dire que $\Omega_n \in \mathrm{Fil}^1(A_{cris}) \setminus \mathrm{Fil}^2(A_{cris})$, $\varphi^n(\Omega_n) = p\Omega_n$ et $\forall \gamma \in \Gamma_{\mathcal{K}}$, $\gamma(\Omega_n) = \mathcal{X}_n(\gamma)\Omega_n$ où $\mathcal{X}_n : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_{p^n}^*$ est le caractère donnant l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur le groupe de Lubin-Tate de hauteur n (cf. [Col93] et [Col92] pour plus de détails sur ces périodes). Posons alors pour $\eta \in X_n$ quelconque, $x(\eta) = \Omega_n^{-\eta(0)} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\varphi^j(\Omega_n)}{p}\right]^{-\eta(n-j)}$, et pour tout i, posons $v_i = x(\sigma^i(\xi))e_i$; $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est alors une base du k-espace vectoriel $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$, et l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ est donnée par :

$$\forall \gamma \in \Gamma_{\mathcal{K}},\ \gamma(v_i) = \mathcal{X}_n(\gamma)^{-\xi(i)} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\sigma^j(\mathcal{X}_n(\gamma))\right]^{-\xi(n+i-j)} v_i.$$

En particulier, l'image est abélienne, et $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est une base de vecteurs propres. De plus, si γ est un générateur de l'inertie modérée, $\mathcal{X}_n(\gamma)=\varepsilon$ est un générateur de $\mathbb{F}_{p^n}^*$, et alors γ agit sur v_i par multiplication par $\lambda_i=\varepsilon^{-\xi(i)}\prod_{j=1}^{n-1}\varepsilon^{-p^j\xi(n+i-j)}=\varepsilon^{\sum_{j=0}^{n-1}-p^j\xi(n+i-j)}$ (car $\sigma(\varepsilon)=\varepsilon^p$). Nous avons donc les coefficients $a_j^{(i)}$ pour construire la représentation ρ_{mr}. Pour obtenir la proposition, il suffit donc de montrer que $\mathsf{f}_N^{-1}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p.e_i)=\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p.v_i$, ou plus simplement, que $\mathsf{f}_N^{-1}(e_i)\in\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p.v_i$ pour $i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (car f_N est bijectif).

Soit γ un générateur de l'inertie modérée, considérons alors

$$g:=\rho(\gamma):\mathbf{V_{cris}}(N)\to\mathbf{V_{cris}}(N)$$

l'endomorphisme égal à l'image de γ par la représentation $\rho:\Gamma_{\mathcal{K}}\to GL_{\mathbf{V_{cris}}(N)}$. C'est un endomorphisme de $\mathbf{V_{cris}}(N)$ qui commute à l'action du groupe de Galois, car la représentation est abélienne, donc f étant un isomorphisme entre le foncteur de Fontaine $N\mapsto\mathbf{V_{cris}}(N)$ et le foncteur oubli $N\mapsto N$, nous avons (après extension des scalaires) $\mathsf{f}_N\circ g\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathrm{Id}\circ\mathsf{f}_N^{-1}=\mathbf{D_{cris}}(g)\otimes_k\mathrm{Id}$. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre $v_i=x(\sigma^i(\xi))e_i$ de l'endomorphisme g. Alors $g(v_i)=\lambda_i v_i$, et par un calcul direct, $\mathbf{D_{cris}}(g)(e_i)=\lambda_i e_i$, donc $\mathsf{f}_N^{-1}(e_i)$ est un vecteur propre de $g\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathrm{Id}_k$ associé à la valeur propre λ_i. Comme l'espace propre associé est de dimension 1, engendré par v_i, nous avons bien $\mathsf{f}_N^{-1}(e_i)\in\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p.v_i$. $\square$

Nous aurons besoin de ce résultat dans le cas où N est un objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ (avec $0\le h\le\dfrac{p-2}{2}$), ce qui revient juste à faire une torsion à la Tate. Le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ se transforme en $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$, et pour f, il nous faut alors considérer $\tilde{\mathsf{f}}_N=\mathsf{f}_{N\otimes W[-h]}\otimes{}^t\mathsf{f}^{-1}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[-h]}$ (dont les propriétés sont décrites dans le théorème 54 de [Dor07]). Nous obtenons alors la proposition :

Proposition 17. *Soit $0\le h\le\dfrac{p-2}{2}$, et N un objet élémentaire de $\mathbf{MF_k^{\pm h}}$, alors pour tout $x\in\mathbf{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ nous avons l'égalité*

$$\rho_{\mathbf{MF}}(x)=\tilde{\mathsf{f}}_N\circ\rho_{mr}(x)\circ\tilde{\mathsf{f}}_N^{-1}.$$

3. Etude sur k

3.1. Les groupes $\overline{G}_M$, $\overline{G}'_M$ et $\overline{G}_V$, $\overline{G}'_V$. Considérons M un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tué par p (donc, un k-espace vectoriel). Prenons $(M[i])$ une suite de Jordan-Hölder, et soit r l'entier qui vérifie $M[r]=M$ et $M[r-1]\neq M$. Comme $M[i]/M[i-1]$ est un objet simple, il est en particulier élémentaire.

Soit $\overline{G}_M$ le schéma en groupes affine associé à la catégorie tannakienne engendrée par M (notée $\mathbf{Tan}(M)$) dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ et au foncteur fibre qui a M associe $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} = M^{f^{e\ell}_M}$ (cf. paragraphe 1.4 pour ces notations). Le groupe $\overline{G}_M$ s'identifie aux éléments de GL_M qui induisent sur tout objet de $\mathbf{Tan}(M)$ un isomorphisme défini sur $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$, qui laissent stable sous-objet, objet quotient, produit tensoriel, dual, et qui commutent aux morphismes de $\mathbf{Tan}(M)$.

Proposition 18. *$\overline{G}_M$ est le plus petit sous-schéma en groupes affine de $GL_{M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}}$ qui soit défini sur $\mathbb{F}_p$ et qui, après extension des scalaires à k, contienne u_M et $\mathcal{T}$.*

Démonstration. En effet, nous devons prouver que si H est un sous-schéma en groupes de $\overline{G}_M$ qui est défini sur $\mathbb{F}_p$ et est tel que $H \times_{\mathbb{F}_p} k$ contienne u_M et $\mathcal{T}$, alors $H = \overline{G}_M$. Il suffit pour cela de prouver que le morphisme de H dans $\overline{G}_M$ est fidèlement plat, et donc (cf. [DMOS82], prop. 2.21.a) que le foncteur naturel de $\mathbf{Tan}(M)$ dans la catégorie des représentations linéaires de H est pleinement fidèle, et que son image est stable par sous-objet.

Si N et N' sont deux objets de $\mathbf{Tan}(M)$, une application $\mathbb{F}_p$-linéaire de $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $(N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ commutant à u et à $\mathcal{T}$ après extension des scalaires est un morphisme dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ (donc dans $\mathbf{Tan}(M)$) : en effet, cela résulte directement de ce que $N = N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ et si N_ξ est l'espace propre associé au caractère ξ de $\mathcal{T}$, alors $\mathrm{Fil}^i(N) = \bigoplus_{\xi(0)=i} N_\xi$, $f_N = u_N \circ f^{e\ell}_N$ et $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} = N^{f^{e\ell}_N}$ (idem pour N'). Cela prouve la pleine fidélité.

Prouvons la stabilité par sous-objet. Si N est un objet de $\mathbf{Tan}(M)$, et si $(N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ est un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ tel que $N' = (N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ est stable par $\mathcal{T}$ et u_N, de même qu'avant, nous avons que N' est un sous-objet de N dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, qui est donc dans $\mathbf{Tan}(M)$. □

Corollaire 19. *Le groupe $\overline{G}_M$ est réduit (donc lisse) et connexe.*

Démonstration. En effet, $\overline{G}^{red}_M$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}_p$, inclus dans $\overline{G}_M$, et qui a les mêmes points sur k. Donc u_M et $\mathcal{T}$ sont dans $\overline{G}^{red}_M$, et par la proposition précédente, nous avons donc bien $\overline{G}_M = \overline{G}^{red}_M$.

Le groupe $\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k$ contient $\mathcal{T}$, donc contient le groupe à un paramètre h_M associé à la graduation $M = \oplus M_i$. Ce groupe est l'image de $\mathbb{G}_m$ par un morphisme de groupes algébriques, donc est connexe et contient l'identité, donc est inclus dans la composante connexe de l'identité, $(\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k)^0$. Si $\overline{G}_M$ n'est pas connexe, la composante connexe de l'identité $\overline{G}^0_M$ est un sous-groupe distingué, donc il existe une représentation $\overline{G}_M \to GL_N$ (donc N est un Φ-module filtré dans la catégorie tannakienne engendrée par M)

dont le noyau est exactement $\overline{G}_M^0$(cf. Théorème 5.6 de [Bor91]), et donc le Φ-module filtré N est non trivial (car le groupe de la catégorie tannakienne engendrée par N est isomorphe à $\overline{G}_M/\overline{G}_M^0$). De plus, $\overline{G}_M^0 \times_{\mathbb{F}_p} k$ contient $(\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k)^0$, donc le groupe a un paramètre h_M agit trivialement sur N. Or la graduation est fonctorielle, donc h_N est égal à l'image de h_M, donc agit trivialement, donc $N = N_0$, donc N est trivial, ce qui contredit le fait que la catégorie tannakienne qu'il engendre ait un groupe non-trivial. $\square$

Proposition 20. *Soit U_M le sous-schéma en groupes affine de $\overline{G}_M$ formé des éléments unipotents, alors U_M est un sous-groupe distingué de $\overline{G}_M$ et $\overline{G}_M = U_M \ltimes \mathcal{T}$.*

Démonstration. Cela vient du fait que M est extension d'élémentaires, et pour N élémentaire, $\overline{G}_N = \mathcal{T}_N$. Puis, la matrice d'un élément de $\overline{G}_M$ écrite dans une base adaptée pour la filtration $(M[i])$ de M appartient au groupe $\mathcal{H}_M$ dont les éléments s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} X_0 & * & \cdots & * \\ 0 & X_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & X_r \end{pmatrix}$$

où pour $0 \leq s \leq r$, X_s correspond à la matrice agissant sur $M[s]/M[s-1]$ (qui est un module élémentaire) et est donc une matrice diagonale correspondant à $\mathcal{T}_{M[s]/M[s-1]}(t)$ pour un certain t (avec t ne dépendant pas de s). De plus, les unipotents de $\mathcal{H}_M$ forment un sous-groupe distingué noté $\mathcal{U}_M$, et $\mathcal{H}_M$ est le produit semi-direct de $\mathcal{T}_M$ (qui est un tore maximal) et de $\mathcal{U}_M$, d'où le résultat. $\square$

Définition 21. Notons $\overline{G}'_M = \{g \in GL_M | g$ induit sur M et $\mathrm{End}(M)$ une application qui commute aux morphismes, qui laisse stable sous-objet (de M ou $\mathrm{End}(M)$) et qui agit comme un élément de $\mathcal{T}$ sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets (de M ou $\mathrm{End}(M))\}$, et U'_M ses unipotents. $\overline{G}'_M$ est un sous-schéma en groupes affine de GL_M qui contient $\overline{G}_M$.

Proposition 22. *U'_M est un sous-groupe distingué de $\overline{G}'_M$, et $\overline{G}'_M = U'_M \ltimes \mathcal{T}$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{T}$ soit inclus dans $\overline{G}'_M$ provient de la fonctorialité de $\mathcal{T}$. Les conditions "laisse stable sous-objet" et "qui agit sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets comme un élément de $\mathcal{T}$" donnent que $\overline{G}'_M$ est inclus dans $\mathcal{H}_M$. $\square$

Remarque 23. Nous allons prouver que G_M et G'_M sont presque égaux : le théorème principal de cette section (le théorème 45) nous donne qu'ils ont même groupe dérivé, et un corollaire nous donne qu'ils ont même éléments semi-simples.

Nous venons de construire deux schémas en groupes affines pour M. Faisons de même du côté galoisien : soit $V = \mathbf{V_{cris}}(M)$, $\Gamma_{\mathcal{K}}$ agit naturellement dessus, et l'image est finie (puisque V est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension fini). Si N est élémentaire, l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $\mathbf{V_{cris}}(N)$ se factorise par l'inertie modérée (en effet, l'inertie sauvage agit trivialement modulo p sur les périodes des Lubin Tate). Donc, suite à la filtration $(M[i])$ de M, un élément de l'inertie sauvage agit via la matrice

$$\begin{pmatrix} I_0 & * & \cdots & * \\ 0 & I_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I_r \end{pmatrix}$$

où I_s correspond à la matrice identité sur $\mathbf{V_{cris}}(M[s])/\,\mathbf{V_{cris}}(M[s-1])$.

Quel schéma en groupes affine pouvons-nous alors associer à V ? Pour l'image de l'inertie modérée, nous avons le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Pour l'image de l'inertie sauvage, nous venons de voir que c'est un groupe unipotent. Elle a en plus la particularité que pour $g_1, \cdots, g_r$ des éléments quelconques de cette image, $(g_1 - Id) \circ \cdots \circ (g_r - Id) = 0$. Nous pouvons donc essayer les méthodes exposées dans [Nor87], quitte à imposer des conditions sur p : si $p \geq r+1$, alors tout élément de ce groupe est d'ordre p, donc nous pouvons définir U_V comme le sous-groupe algébrique de GL_V engendré par les groupes à un paramètres $t \mapsto x^t$ (où $x^t = \exp(t \ln(x))$) avec x élément de l'image de l'inertie modérée. Appellons $\overline{G}_V$ le groupe de GL_V engendré par $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ et U_V. Nous avons aussi $\overline{G}_V = U_V \ltimes \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$.

Définissons alors $\overline{G}'_V$ de la même façon que $\overline{G}'_M$: $\overline{G}'_V = \{g \in GL_V | g$ induit sur V et $\mathrm{End}(V)$ une application qui commute aux morphismes, qui laisse stable sous-objet (de V ou $\mathrm{End}(V)$) et qui agit sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets (de V ou $\mathrm{End}(V)$) comme un élément de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}\}$. Alors, de même que pour $\overline{G}'_M$, $\overline{G}'_V$ est un groupe contenant $\overline{G}_V$, et si U'_V est l'ensemble des unipotents de $\overline{G}'_V$, alors U'_V est un sous-groupe distingué tel que $\overline{G}'_V = U'_V \ltimes \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$.

3.2. Groupes engendrés exponentiellement.

3.2.1. ***Etude de certains groupes de matrices.*** Pour ce paragraphe, soit K un corps de caractéristique p, n et r deux entiers tels que $n \geq r+1$, $(n_0, \cdots, n_r)$ un $r+1$-uplet d'entiers strictement positifs tel que $\sum n_i = n$, et notons $\mathcal{U}$ (en toute rigueur, $\mathcal{U}(n_0, \cdots, n_r)$) le sous-goupe de $GL_n(K)$

formé des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{n_0} & * & \cdots & * \\ 0 & I_{n_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n_r} \end{pmatrix}$$

avec I_{n_i} la matrice identité de taille $n_i \times n_i$ (le groupe $\mathcal{U}_M(k)$ rentre donc dans ce cadre), et $\mathcal{N}$ la K-sous-algèbre de Lie de $M_n(K)$ formée des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le i-ème 0 sur la diagonale est un bloc carré de taille n_i.

Lemme 24. *Si $p \geq r+1$, alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, nous pouvons définir* $\ln(x)$ *à l'aide de la série entière définissant* $\ln(1+x)$*. De plus,* $\ln$ *restreint à $\mathcal{U}$ est un polynôme, et induit une bijection (dont la réciproque est juste* $\exp$*, qui restreinte à* $\ln(\mathcal{U})$ *est aussi un polynôme) de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{N}$.*

En outre, la formule de Campbell-Hausdorff est valable sur $\mathcal{U}$. Plus exactement, $\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2$, si $X := \ln(x)$ et $Y := \ln(y)$, alors

$$\ln(xy) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \sum_{i=3}^{p-1} C_i(X,Y)$$

avec $C_i(X,Y)$ appartenant à la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Lie L engendrée par X et Y (en fait, nous avons même que $C_i(X,Y)$ appartient à $[L,L]$).

Démonstration. La première partie provient juste de ce que pour $x \in \mathcal{U}$, $(x-1)^{r+1} = 0$, et donc $(x-1)^p = 0$ car $p \geq r+1$. Par conséquent, la série $\ln(1+t) = \sum\limits_{i \geq 1} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i} t^i$ peut être évalué en $t = x-1$, et donne $\ln(x) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$.

Pour la formule de Campbell-Hausdorff, il suffit de remarquer quelques points : elle est vrai sur les matrices de la même forme à coefficients réels, ce qui donne une égalité formelle entre polynômes ; puis les coefficients intervenants sont des rationnels dont le dénominateur est premier à p (car nous avons la formule de récurrence

$$C_{s+1}(X,Y) = \frac{[X-Y, C_s(X,Y)]}{2(s+1)} + \sum_{1 \le t \le \frac{s}{2}} \frac{B_{2t}}{s+1} \sum [C_{k_1}(X,Y), [...[C_{k_{2t}}(X,Y), X+Y]...]$$

où la seconde somme porte sur les $k_i > 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_{2t} = s$, et où les B_{2t} sont les nombres de Bernouilli, donc avec dénominateur premier à p si $s+1 < p$) ; enfin, pour pouvoir appliquer ceci, il suffit de remarquer que si $(x_i) \in \mathcal{U}^{r+1}$, alors le produit des $\ln(x_i)$ est nul (ceci quelque soit l'ordre du produit). $\square$

Proposition 25. *Si $p \geq r+1$ et si U_1 est un sous-groupe de $\mathcal{U}$, alors* $\ln(U_1)$ *(c'est-à-dire $\{\ln(u)$ pour $u \in U_1\}$) est une $\mathbb{F}_p$-algèbre de Lie.*

Réciproquement, si L est une $\mathbb{F}_p$-sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$, alors $\exp(L)$ *(qui est par définition $\{\exp(\ell), \ell \in L\}$) est un sous-groupe de $\mathcal{U}$.*

Remarque 26. Ceci s'appliquera en particulier à $U_1 = U_M(K)$ ou bien $U_1 = U'_M(K)$ et $K = k$.

Démonstration. U_1 est un groupe, donc si $u \in U_1$, $u^i \in U_1$ pour tout i et $u^p = \mathrm{Id}$, donc $\ln(U_1)$ est stable par multiplication par un scalaire dans $\mathbb{F}_p$. Pour dire que c'est un espace vectoriel, il reste à voir qu'il est stable par addition, et cela va provenir de la formule de Campbell-Hausdorff.

Montrons par récurrence qu'il existe des polynômes $(P_j^{(i)})_{i \le j \le p-1}$ de $K[X,Y]$ (nous considérons ici les polynômes généralisés, c'est-à-dire que $XY \neq YX$) homogènes de degré j, tels que si $\exp(x)$ et $\exp(y)$ sont dans U_1, alors $z_i := \exp(x + y + \sum_{j=i}^{p-1} P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$.

Pour $i = 2$, c'est la formule de Campbell-Hausdorff. Pour $i = p$, nous obtenons $\exp(x+y) \in U_1$, ce qui est le résultat cherché. Supposons la formule vraie pour i et pour tout x et y dans $\ln(U_1)$. Alors, comme $\ln(U_1)$ est stable par multiplication par un scalaire, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p$, nous pouvons remplacer x par λx et y par λy, et donc nous obtenons que $z_{i,\lambda} = \exp(\lambda x + \lambda y + \sum_{j=i}^{p-1} \lambda^j P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$ (car les polynômes $P_j^{(i)}$ sont supposés homogènes). De plus, pour tout $\mu \in \mathbb{F}_p$, nous avons aussi que $z_i^{-\mu} = \exp(-\mu x - \mu y + \sum_{j=i}^{p-1} (-\mu) P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$, donc en faisant le produit, nous obtenons $z_i^{-\mu} z_{i,\lambda} \in U_1$. Or, en applicant la formule de Campbell-Hausdorff, nous obtenons

$$z_i^{-\mu} z_{i,\lambda} = \exp((\lambda-\mu)x + (\lambda-\mu)y + (\lambda^i - \mu)P_i^{(i)}(x,y) + \sum_{j=i+1}^{p-1} Q_j^{(i+1)}(x,y))$$

avec $Q_j^{(i+1)}$ polynôme homogène de degré j (car $[-\mu(x+y), \lambda(x+y)] = 0$). Il suffit alors de prendre $\lambda^i = \mu$ avec $\lambda \neq \mu$ (ce qui est possible, car $i \leq p-1$). D'où, en itérant, nous obtenons bien (si $i = p$) que $\exp(x+y) \in U_1$.

La formule de Campbell-Hausdorff nous donne aussi que si $\exp(x)$ et $\exp(y)$ sont dans U_1, alors

$$\exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y) = \exp([x,y] + \sum_{j=3}^{p-1} R_j(x,y))$$

où $R_j(x,y))$ est un polynôme homogène de degré j. Puis une récurrence semblable à celle ci-dessus nous donnera que $\exp([x,y]) \in U_1$.

La réciproque est une application directe de la formule de Campbell-Hausdorff. $\square$

Introduisons la définition suivante (nous nous plaçons en fait dans un cadre plus restreint que Nori dans cf. [Nor87], et nous obtiendrons des résultats plus précis)

Définition 27. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{U}$, il est dit engendré exponentiellement s'il existe $S \subset \mathcal{N}$ tel que H est le groupe engendré par les groupes à un-paramètre $t \in K \mapsto \exp(tx) \in \mathcal{U}$ où $x \in S$.

Proposition 28. *Supposons $p \geq r+1$. Soit $L \subset \mathcal{N}$ une K-sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$, alors $\exp(L)$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement.*

Réciproquement, si H est le sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement par S, alors $\ln(H)$ est la K-algèbre de Lie engendrée par S.

Démonstration. La première affirmation est une conséquence immédiate de la définition et de la proposition précédente.

Soit donc H un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement par S, et notons L la K-algèbre de Lie engendrée par S. Comme $S \subset L$, nous avons $H \subset \exp(L)$ (car si $x \in S$, pour tout t de K, $tx \in L$), et en repassant au logarithme (qui est une bijection) nous obtenons $\ln(H) \subset L$. Mais par définition, $\ln(H)$ contient Kx pour tout x dans S, donc comme $\ln(H)$ est stable par addition et crochet de Lie, il contient l'algèbre de Lie engendrée par $\{Kx\}_{x \in S}$, qui est bien L, donc $L = \ln(H)$. $\square$

Proposition 29. *Soit $p \geq r+1$. Soit U_1 un sous-groupe de $\mathcal{U}$, alors U_1 est engendré exponentiellement si et seulement si pour tout $u \in U_1$ et pour tout*

$t \in K$, $x^t = \exp(t\ln(u)) \in U_1$. Donc U_1 est engendré exponentiellement si et seulement si $\ln(U_1)$ *est une K-algèbre de Lie.*

Démonstration. C'est une retraduction des propositions précédentes. □

Proposition 30. *Si U_1 est un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement, alors il est algébrique.*

De plus, si K est algébriquement clos, en notant $\widetilde{U_1}$ le groupe algébrique réduit associé à U_1 (c'est-à-dire $\widetilde{U_1}(K) = U_1$), l'application ln *induit un isomorphisme de variété algébrique de $\widetilde{U_1}$ sur l'espace affine de dimension* $\dim_K(\ln(U_1))$. *Par conséquent, si U_1 est engendré exponentiellement par des éléments de $M_n(K_1)$ (où K_1 est un sous-corps), $\widetilde{U_1}(K_1)$ est engendré exponentiellement sur K_1 par les mêmes éléments, et* $\ln(U_1) = \ln(\widetilde{U_1}(K_1)) \otimes_{K_1} K$.

Démonstration. U_1 est algébrique car $x \in U_1$ si et seulement si $\ln(x) \in \ln(U_1)$, or ln restreint à $\mathcal{U}$ est un polynôme et $\ln(U_1)$ est un K-espace vectoriel. L'assertion suivante provient juste de ce que $\ln(U_1)$ est un K-espace vectoriel et K un corps algébriquement clos. □

Remarque 31. Tout sous-groupe de $\mathcal{U}$ n'est pas nécessairement engendré exponentiellement si $K \neq \mathbb{F}_p$. Donnons deux contre-exemples : le premier est le groupe de matrices $\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{F}_p\}$; le deuxième est $\{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in K\}$ (si K est algébriquement clos, c'est les points dans K d'un groupe algébrique isomorphe à $\mathbb{G}_a$, donc connexe).

3.2.2. *Exemples de groupes engendrés exponentiellement.* Gardons la situation et les notations introduites précédemment.

Proposition 32. *Supposons $p \geq 2r+1$. Alors $U'_M(K)$ est engendré exponentiellement.*

Démonstration. Rappelons le lemme suivant (cf. [Nor87], lemma 1.4) :

Lemme 33. *Soit M un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit S un ensemble de $GL_M(K)$ formé de matrices nilpotentes d'ordre p. Soient $W_1 \subset W_2 \subset M$ des sous-espaces vectoriels. Alors il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(1) *$s(W_2) \subset W_1$ pour tout $s \in S$*

(2) *W_1 et W_2 sont stables sous l'action de $< \exp S >$ (le sous-groupe engendré par les* $\exp(s)$, *pour $s \in S$) et l'action de ce groupe sur W_2/W_1 est triviale.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de ce que exp et ln sont dans ces cas-là des polynômes à terme constant égal à 1 et 0 respectivement. □

Nous cherchons à montrer que si $u \in U'_M(K)$, alors pour tout $t \in K$, $u^t \in U'_M(K)$, ce qui concluera. Or, $\ln(u)$ est d'ordre $r+1$, et comme nous avons $p \geq r+1$, nous pouvons appliquer le lemme précédent. Par conséquent, si V est un sous-espace vectoriel de M, $u \in GL_M$ laisse stable V si et seulement si $\ln(u)$ laisse stable V (il suffit de prendre $W_1 = W_2 = V$ dans le lemme 33). Or $t\ln(u)$ laisse stable V, pour $t \in K$, donc $\exp(t\ln(u))$ laisse stable V. Donc u laisse stable V si et seulement si u^t laisse stable V pour tout $t \in K$.

De plus, comme u est unipotent, s'il agit sur un espace quotient de deux sous-objets de M qui est un élémentaire, il doit agir comme l'identité (c'est la condition qu'un élément de $\overline{G}'_M$ agit sur un élémentaire comme un élément de $\mathcal{T}$ (dont le seul unipotent est l'identité)). Dans ce cas, le lemme nous donne que u^t agit sur cet élémentaire aussi comme l'identité.

Pour l'action sur $\mathrm{End}(M)$, le lemme 1.5 de [Nor87] va nous donner pour $\mathrm{End}(M)$ l'équivalent du lemme 33 pour M. Mais comme notre cadre est un peu plus précis, nous pouvons affaiblir (un peu) les hypothèses du lemme (au lieu d'avoir $p \geq 2\dim_k(M) - 1$, nous aurons $p \geq 2r+1$) et nous utiliserons le lemme 35.

En prenant $\mathcal{U}_M(K)$ pour le $\mathcal{U}$ du paragraphe précédent, nous obtenons que si $p \geq r+1$, le logarithme d'un élément de $\mathcal{U}_M(K)$ est bien défini et $L = \ln(\mathcal{U}_M(K))$ est une K-algèbre de Lie vérifiant :

$$\forall (x_0, \cdots, x_r) \in L^r,\ x_0 x_1 \cdots x_r = 0$$

Rappelons en outre le lemme suivant :

Lemme 34. *Soit $x \in L$, alors $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent d'ordre p. Si $p \geq 2r+1$, nous avons en plus que $\exp(\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Ad}(\exp(x))$.*

Démonstration du lemme. Il suffit de faire la même démonstration que celle du lemme 1.2 de [Nor87]. Nous utilisons juste que $x^{r+1} = 0$ au lieu de $x^p = 0$ pour dire que $L_x^i R_x^{p-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq p-1$. □

Nous pouvons maintenant énoncer :

Lemme 35 (lemme 1.5 de [Nor87])**.** *Soit $W_1 \subset W_2 \subset \mathrm{End}(M)$ des sous-espaces vectoriels, et $S \subset L$. Si $p \geq 2r+1$, alors il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(1) $\forall s \in S$, $\mathrm{ad}(x)(W_2) \subset W_1$

(2) *W_1 et W_2 sont stables par l'action adjointe de $< \exp S >$ et l'action induite sur W_2/W_1 est triviale*

Démonstration du lemme. En effet, soit $\overline{S} \subset \mathrm{End}(M)$ le sous-ensemble défini par $\overline{S} = \{\mathrm{ad}(s) | s \in S\}$. Par le lemme précédent, le groupe engendré par $\overline{S}$ s'écrit $< \exp \overline{S} >= \{\mathrm{Ad}(h) | h \in < \exp S >\}$, et il suffit alors d'appliquer le lemme 33. $\square$

Revenons alors à la démonstration de la proposition :

Si $W_1 \subset \mathrm{End}(M)$, et $\mathrm{Ad}(u)$ laisse stable W_1, alors $\mathrm{ad}(\ln(u))$ laisse stable W_1 (application du lemme 35). Donc, pour tout $t \in K$, $\mathrm{ad}(t \ln(u))$ laisse stable W_1 (car W_1 est un K-espace vectoriel). Donc, par la réciproque du lemme 35, $\mathrm{Ad}(\exp(t \ln(u)))$ laisse stable W_1.

Si de plus, $\mathrm{Ad}(u)$ laisse stable W_2 et $W_1 \subset W_2$ tel que $\mathrm{Ad}(u)$ agisse sur W_2/W_1 trivialement (ce qui est le cas si W_2/W_1 est élémentaire), alors une application semblable du lemme 35, nous donne que $\mathrm{Ad}(\exp(t \ln(u)))$ agit trivialement sur W_2/W_1.

Par conséquent, nous venons de montrer que pour tout $u \in U'_M(K)$, u^t est un élément de $U'_M(K)$. Donc par le lemme 29, $U'_M(K)$ est engendré exponentiellement. $\square$

Proposition 36. *Supposons que K est algébriquement clos. Soit T un sous-tore de $GL_M(K)$ scindé sur K (donc T est isomorphe à $(K^*)^s$, une fois choisie une base des caractères) ; ses poids sont dans $\mathbb{Z}^s$, et nous supposerons qu'ils sont en réalité dans $[\![-\frac{p-2}{2}, 0]\!]^s$ ou dans $[\![-\frac{p-2}{4}, \frac{p-2}{4}]\!]^s$. Soit U_1 le sous-groupe de $\mathcal{U}_M(K)$ normalisé par T, qui est le plus petit groupe normalisé par T et contenant certains unipotents (u_j). Supposons en outre que pour tout j, il existe un groupe à un-paramètre associé à T, $M = \oplus M_i^{(j)}$, tel que $(u_j - \mathrm{Id})(M_i^{(j)}) \subset \oplus_{k<i} M_k^{(j)}$. Alors U_1 est engendré exponentiellement.*

Démonstration. Le tore T agit sur End_M par conjugaison, notons $(\mathrm{End}_M)_\xi$ les espaces propres associés (donc ξ parcourt les caractères de T pour l'action adjointe sur End_M, qui s'identifie à une partie de $[\![-\frac{p-2}{2}, \frac{p-2}{2}]\!]^s$ par hypothèse (et ξ sera alors identifié à $(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{s-1}) \in [\![-\frac{p-2}{2}, \frac{p-2}{2}]\!]^s$)). Montrons le lemme suivant :

Lemme 37. *Sous les hypothèses et notations précédentes, pour tout $u \in U_1$, si $\ln(u) = \sum_\xi \ln(u)_\xi$ avec $\ln(u)_\xi \in (\mathrm{End}_M)_\xi$ est la décomposition de $\ln(u)$ suivant les espaces propres de l'action adjointe de T sur End_M, nous avons $\ln(u)_\xi \in \ln(U_1)$, ceci pour tout ξ caractère de T. De plus, si $\xi \neq 0$, pour tout $t \in K$, nous avons $t \ln(u)_\xi \in \ln(U_1)$.*

Démonstration. La dernière affirmation provient juste de ce que l'image par un caractère d'un tore est un sous-tore de K^*, donc soit K^*, soit $\{1\}$ (car K est algébriquement clos).

Nous pouvons supposer que T est isomorphe à K^* (T étant scindé, cela revient à montrer que $\ln(u)_i = \sum_{\xi|\xi_0=i} \ln(u)_\xi$ appartient à $\ln(U_1)$ et à itérer le processus suivant les autres facteurs de $T = (K^*)^s$).

Notons $L = \ln(U_1)$. Comme U_1 est normalisé par T, L est laissé stable par l'action adjointe de T sur End_M. Nous avons donc que pour tout $t \in K^*$, si $\sum_i v_i \in L$ avec $v_i \in \mathrm{End}(M)_i$, alors $\sum_i t^i v_i \in L$, donc $t \ln(u) = \sum_i t^i \ln(u)_i \in L$ (ici, il faut comprendre $t\ln(u)$ comme étant t dans le tore, agissant sur l'élément $\ln(u)$). Donc, L étant un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, $v = t\ln(u) - \ln(u) = \sum_{i\neq 0} \alpha_i \ln(u)_i \in L$ avec $\alpha_i = t^i - 1 \neq 0$ pour tout i non nul (pour t bien choisi dans K). Nous allons ensuite faire plusieurs récurrences à partir de l'élément $v = \sum_{i\neq 0} v_i \in L$.

Tout d'abord, par hypothèses sur les poids de T, si h est la partie entière de $\frac{p-2}{2}$, alors $v = \sum_{i\neq 0,\, -h\leq i\leq h} v_i$. Montrons par récurrence que $v^{(j)} = \sum_{i\neq 0,\, -h+j\leq i\leq h-j} k(i,j)v_i \in L$ pour certains $k(i,j) \in K^*$. Si $j = 0$, nous prenons $v^{(0)} = v$. Puis, nous posons $v^{(j+1)} = tv^{(j)} - v^{(j)}$ avec t une racine primitive $(h-j)^{\text{ème}}$ de l'unité (qui existe, car $0 \leq h-j \leq p-1$), ce qui donnera bien $k(i,j+1) = (t^i-1)k(i,j)$ non nul si $-h+j+1 \leq i \leq h-j-1$.

Puis, si $j = h-1$, nous obtenons $k(1,h-1)v_1 + k(-1,h-1)v_{-1} \in L$. Si $t \in \mathbb{F}_p$, nous pouvons soit utiliser la structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel pour dire que $tk(1,h-1)v_1 + tk(-1,h-1)v_{-1} \in L$, soit utiliser l'action de T pour dire que $tk(1,h-1)v_1 + t^{-1}k(-1,h-1)v_{-1} \in L$, ce qui donne en faisant la soustraction, $(t-t^{-1})k(-1,h-1)v_{-1} \in L$. Nous pouvons trouver $t \in \mathbb{F}_p$ tel que $t - t^{-1} \neq 0$ (rappelons que $p > 2$), donc en utilisant la dernière affirmation de la proposition (qui a été justifiée au tout début de la démonstration), nous obtenons $v_{-1} \in L$, et de même $v_1 \in L$.

A partir de là, comme $v^{(h-2)} \in L$, $v_{-1} \in L$, et $v_1 \in L$, nous obtenons $k(2,h-2)v_2 + k(-2,h-2)v_{-2} \in L$. Nous itérons le processus ... De manière générale, à l'étape i quand nous avons $k(i,h-i)v_i + k(-i,h-i)v_{-i} \in L$, pour en déduire que $v_i \in L$ et $v_{-i} \in L$, nous faisons de même que ci-dessus, c'est-à-dire qu'il faut trouver $t \in \mathbb{F}_p$ tel que $t^i - t^{-i} \neq 0$, ce qui est possible car $0 \leq i \leq h \leq \frac{p-2}{2}$.

En appliquant ceci à $v = \sum_{i\neq 0} \alpha_i \ln(u)_i$, nous obtenons $\ln(u)_i \in L$ pour tout i non nul, mais comme $\ln(u) = \sum_i \ln(u)_i \in L$, en faisant la soustraction, nous obtenons aussi $\ln(u)_0 \in L$, ce qui donne le lemme. $\square$

Remarque 38. Ce lemme nous explique que le groupe des unipotents d'un Borel n'est pas loin d'être engendré exponentiellement : il suffit de savoir que la partie $\ln(U_1)_0$ est un K-espace vectoriel.

Revenons à la démonstration de la proposition : appliquons le lemme à $u = u_j$, l'un des unipotents U_1. Par hypothèse, $(u_j - \mathrm{Id})(M_i^{(j)}) \subset \oplus_{k<i} M_k^{(j)}$, donc $\ln(u_j)_0 = 0$. Par conséquent, le lemme nous permet d'affirmer que pour tout ξ, pour tout $t \in K$, $t \ln(u_j)_\xi \in L$. Donc le groupe engendré exponentiellement par les $\ln(u_j)_\xi$ est inclus dans U_1. Notons le U_2. Il contient par définition les u_j. Il est normalisé par T, car si $t \in T$, $t \exp(\ln(u_j)_\xi) t^{-1} = \exp(\xi(t) \ln(u_j)) \in U_2$ par définition. Donc c'est bien U_1, par l'hypothèse de minimalité dans la définition de U_1. □

Corollaire 39. *Le groupe $U_M(k)$ est engendré exponentiellement si M est un objet de $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ ou un objet de $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$.*

Démonstration. Nous prenons $T = \mathcal{T}(k)$, qui aura les poids dans le bon domaine par hypothèse sur h. Pour les u_j, il suffit de prendre $\exp(\ln(u_M)_\xi)$ et leurs conjugués par $f_M^{e\ell}$ (puisque G_M est le plus petit groupe défini sur $M^{f_M^{e\ell}}$ contenant u_M et le tore $\mathcal{T}$). Puisque, si $M = \oplus M_i$ est la graduation donnée par [Win84], nous avons (par définition de u_M) $(u_M - \mathrm{Id})(M_i) \subset \oplus_{j<i} M_j$, donc $\ln(u_M)_0$ (et donc, c'est pareil pour ses conjugués par $f_M^{e\ell\ell}$), et nous concluons comme dans la proposition précédente. □

3.2.3. ***Groupes algébriques engendrés exponentiellement.*** Le théorème des zéros de Hilbert nous donne qu'un groupe algébrique réduit inclus dans un GL_M est caractérisé par ses points sur un corps algébriquement clos. Nous pouvons donc étendre le travail précédent aux groupes algébriques réduits sur k (car k est algébriquement clos) :

Définition 40. Soit U_1 un sous-groupe algébrique réduit de $\mathcal{U}_M$. U_1 est dit engendré exponentiellement si $U_1(k)$ l'est (pour la définition précédente). Cela revient à dire que ln définit un isomorphisme de variété algébrique de U_1 sur l'espace affine de dimension $\dim_k(\ln(U_1(k)))$, ou bien que si $U_1(k)$ est engendré exponentiellement par S, alors U_1 est le groupe algébrique engendré par les groupes à un-paramètre $(\exp(ts))_t$ pour $s \in S$.

Remarque 41. C'est une définition moins générale que celle qu'étudie Nori dans [Nor87] (puisque nous ne considérons que des sous-groupes de $\mathcal{U}_M$), mais nous avons ainsi des résultats plus précis.

Proposition 42. *Avec cette définition, sous l'hypothèse $p \geq 2r + 1$, U_M et $(U'_M)^{red}$ (le groupe algébrique réduit associé à U'_M) sont engendrés exponentiellement.*

Démonstration. C'est une application directe des propositions 36 et 32 □

Deux remarques utiles sur les groupes engendrés exponentiellement :

Lemme 43. *Soit U_1 un groupe engendré exponentiellement, alors U_1 est connexe.*

Démonstration. En effet, $t \mapsto \exp(tx)$ a une image connexe, et il suffit d'appliquer la proposition 2.2 de [Bor91]. □

Proposition 44. *Si $p \geq r+1$ et U_1 est engendré exponentiellement, alors l'algèbre de Lie sur k, notée $Lie(U_1)$, associée à U_1 est $Lie(U_1) = \ln(U_1(k))$.*

Démonstration. Nous savons déjà que sous ces conditions $\ln(U_1(k))$ est une k-algèbre de Lie, et comme U_1 est de dimension $\dim_k \ln(U_1(k))$, il suffit de montrer une inclusion pour avoir l'égalité. Or pour tout $x \in \ln(U_1(k))$, le groupe à un-paramètre $t \mapsto \exp(tx)$ est inclus dans U_1 (c'est une application du lemme 29 et du fait qu'un groupe algébrique réduit est caractérisé par ses points sur un corps k algébriquement clos). Donc $Lie((\exp(tx))_t) \subset Lie(U_1)$, donc $x \in Lie(U_1)$. □

3.3. Etude de $\overline{G}_M$ et $\overline{G}'_M$.

Théorème 45. *Notons (G, G) le groupe dérivé d'un groupe G quelconque. Supposons que M est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ ou un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$. Alors, si $p \geq 2r+1$, nous avons*

$$(\overline{G}_M, \overline{G}_M) = ((\overline{G}'_M)^{red}, (\overline{G}'_M)^{red}),$$

et c'est un groupe connexe.

Démonstration. Notons durant cette démonstration, $G := \overline{G}_M(k)$, $U := U_M(k)$, $G' := (\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}(k) = \overline{G}'_M(k)$ et $U' := (U'_M)^{\mathrm{red}}(k) = U'_M(k)$. Montrons ce théorème à l'aide de deux lemmes :

Lemme 46. *L'égalité pour les algèbres de Lie est vraie : $[Lie(G), Lie(G)] = [Lie(G'), Lie(G')]$*

Remarque 47. Nous avons $Lie(U') = \ln(U')$ car U' est engendré exponentiellement (cf. prop. 44), et (pour des raisons de dimensions), $Lie(G) = Lie(U) \oplus Lie(\mathcal{T})$, $Lie(G') = Lie(U') \oplus Lie(\mathcal{T})$.

Démonstration du lemme 46. Par définition, $G \subset G'$, ce qui se traduit pour les algèbres de Lie par $[Lie(G), Lie(G)] \subset [Lie(G'), Lie(G')]$.

Comme U est engendré exponentiellement et $U \subset \mathcal{U}_M$, nous avons, par la proposition 44, $Lie(U) = \ln(U)$. Or, en notant $W_1 := [Lie(G), Lie(G)]$, nous avons $[Lie(U), Lie(G)] \subset W_1$, donc $\mathrm{ad}(\ln(u))(Lie(G)) \subset W_1$ pour tout $u \in U$. Donc (cf. lemme 35) $Lie(G)$ et W_1 sont stables par $\mathrm{Ad}(U)$, et l'action sur $Lie(G)/W_1$ est triviale.

De plus, les caractères du tore $\mathcal{T}$ sur M sont donnés par les $\xi \in X$ qui interviennent dans la décomposition $M = \oplus M_\xi$. Rappelons que ξ est une application périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas où M est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, nous avons pour tout i, $0 \geq \xi(i) \geq -h$. Alors, les caractères de $\mathcal{T}$ agissant par conjugaison sur $\mathrm{End}(M)$ sont donnés par les éléments $\xi - \eta$. Donc les caractères de $Lie(\mathcal{T})$ étant donnés par les $\xi - \eta$ modulo p, ils définissent les mêmes espaces propres que ceux de $\mathcal{T}$, car $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$. Il se passe la même chose pour M objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$. Donc, comme $\mathrm{ad}(Lie(\mathcal{T}))(Lie(G)) \subset W_1$, nous en déduisons que $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})(Lie(G)) \subset Lie(G)$ et $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})(W_1) \subset W_1$, donc $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})$ agit sur $Lie(G)/W_1$.

Donc, en reliant les deux affirmations, nous obtenons que G agit sur $Lie(G)/W_1$ (et G stabilise $Lie(G)$ et W) et U agit trivialement (donc $Lie(G)/W_1$ est un élémentaire). Donc, par définition, G' aussi, donc en particulier, $\mathrm{Ad}(U')$ stabilise $Lie(G)$, W_1, et agit trivialement sur le quotient. Donc une application du lemme 35 nous donne $\mathrm{ad}(\ln(U'))(Lie(G)) = [Lie(U'), Lie(G)] \subset W_1$. Or, $Lie(G') = Lie(\mathcal{T}) \oplus Lie(U')$, donc nous avons $[Lie(G'), Lie(G)] \subset W_1 = [Lie(G), Lie(G)]$. En raisonnant de même, en remplaçant $Lie(G)$ par $Lie(G')$, nous déduisons bien que $[Lie(G'), Lie(G')] \subset [Lie(G), Lie(G)]$. □

Lemme 48. *Sous les mêmes conditions,* $[Lie(G), Lie(G)] = \ln((G,G)(k))$*, et* $[Lie(G'), Lie(G')] = \ln((G',G')(k))$

Démonstration du lemme 48. Nous avons les inclusions suivantes :

$$[Lie(G), Lie(G)] \subset Lie((G,G)) \subset \ln\big((G,G)(k)\big).$$

La première inclusion est toujours vraie (voir [Bor91] proposition 3.17), la seconde vient de ce que $(G,G) \subset U$, donc $\ln\big((G,G)(k)\big)$ existe, et il engendre un groupe exponentiellement qui l'admet comme algèbre de Lie (cf. proposition 44), et qui contient (G,G). La même propriété est vraie en remplaçant G par G', U par U'.

Or, du fait que U (ou U') est inclus dans $\mathcal{U}_M$, la formule de Campbell-Hausdorf est vraie. Si $t \in \mathcal{T}(k)$ et $u \in U(k)$, $tut^{-1} \in U(k)$ (car U est distingué dans G), donc nous pouvons appliquer la formule, et donc $tut^{-1}u^{-1} = \exp(z)$, avec si $X = t\ln(u)t^{-1}$ et $Y = -\ln(u)$, $z = X + Y + Z$ avec $Z \in [Lie(G), Lie(G)]$.

Montrons que $X + Y \in [Lie(G), Lie(G)]$: notons $Lie(U)_\xi$ l'espace propre associé au caractère ξ pour l'action adjointe de $\mathcal{T}$. Par la remarque faite au cours de la démonstration du lemme précédent, c'est l'espace propre associé au caractère $\bar{\xi}$ (la réduction modulo p de ξ) pour l'action adjointe de $Lie(\mathcal{T})$. Donc, nous avons l'inclusion $[Lie(\mathcal{T}), Lie(U)] = \oplus_{\xi \neq 0} Lie(U)_\xi \subset [Lie(G), Lie(G)]$. Considérons $u \in U$ tel que $\ln(u)$ soit dans $Lie(U)_\xi$, et un élément $t \in \mathcal{T}(k)$. Alors $t\ln(u)t^{-1} - \ln(u) = (\xi(t) - 1)\ln(u)$ vaut 0 si

$\xi = 0$, ou appartient à $Lie(U)_\xi$ sinon. Dans les deux cas, nous avons bien $X + Y \in [Lie(G), Lie(G)]$ (en décomposant composante par composante).

Par conséquent, nous pouvons dire qu'il existe $z \in [Lie(G), Lie(G)]$ tel que $tut^{-1}u^{-1} = \exp(z)$. Comme $\mathcal{T}$ est un tore, il est abélien, donc pour tout t_1, $t_2 \in \mathcal{T}(k)$, $t_1t_2t_1^{-1}t_2^{-2} = 0$. Le fait que $\ln(uvu^{-1}v^{-1}) \in [Lie(G), Lie(G)]$ est une application directe de la formule de Campbell-Hausdorff qui nous donne même plus précisement $\ln(uvu^{-1}v^{-1}) \in [Lie(U), Lie(U)]$. Donc nous en déduisons l'inclusion $\ln\left((G, G)(k)\right) \subset [Lie(G), Lie(G)]$. (Bien sur, le même résultat est vrai en remplaçant G par G', U par U'). $\square$

En regroupant tout ceci, nous avons donc montré que (G, G) (respectivement (G', G')) est engendré exponentiellement, son algèbre de Lie étant $[Lie(G), Lie(G)]$ (respectivement $[Lie(G'), Lie(G')]$. Or $[Lie(G), Lie(G)] = [Lie(G'), Lie(G')]$, donc $\ln\left((G, G)(k)\right) = \ln\left((G', G')(k)\right)$, donc $(G, G)(k) = (G', G')(k)$, ce qui montre le théorème (car k est algébriquement clos et $\overline{G}_M$ et $(\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}$ sont réduits). $\square$

Corollaire 49. *Tout élément t' de $(\overline{G}'_M)^{red}$ semi-simple est élément de $\overline{G}_M$. Par conséquent, si T' est un tore de $\overline{G}'_M$, nous avons l'inclusion $T' \subset \overline{G}_M$.*

Démonstration. En effet, $(\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}$ étant connexe et résoluble avec $\mathcal{T}$ comme tore maximal (les autres lui sont conjugués), appliquons le théorème 10.6 de [Bor91], pour obtenir existence d'un $t \in \mathcal{T}$ et $g \in \overline{G}'_M$ tel que $t' = gtg^{-1}$. Alors $gtg^{-1}t^{-1} = u \in ((\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}, (\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}) = (\overline{G}_M, \overline{G}_M)$, donc $u \in \overline{G}_M$, et $t' = ut \in \overline{G}_M$. $\square$

De la même façon, nous pouvons montrer :

Proposition 50. *Sous les hypothèses précédentes, le groupe $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est égal au groupe $((\overline{G}'_V)^{red}, (\overline{G}'_V)^{red})$, et c'est un groupe engendré exponentiellement. De plus, tout tore de $\overline{G}'_V$ est inclus dans $\overline{G}_V$.*

Proposition 51. *Sous les hypothèses précédentes, nous avons l'égalité $(\overline{G}_M, \overline{G}_M) = U_M$.*

Démonstration. En effet, par le théorème 5.6 de [Bor91], il existe une immersion fermée de $\overline{G}_M/(\overline{G}_M, \overline{G}_M)$ dans GL_N pour un $N \in \mathbf{Tan}(M)$, dont l'image est abélienne, et égale à G_N. Donc, par la description donnée à la proposition 18, G_N est sans unipotent (puisque la commutativité implique $u_N = \mathrm{Id}$). Donc $U_M \subset (\overline{G}_M, \overline{G}_M)$. $\square$

Proposition 52. *Sous les hypothèses précédentes, nous avons l'égalité $(\overline{G}_V, \overline{G}_V) = U_V$ si $0 \leq h \leq p - 3$.*

Démonstration. Nous avons montré que $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est engendré exponentiellement. Si l'image de Galois (dans V) a comme groupe dérivé ses unipotents, alors comme $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est engendré exponentiellement, et contient les unipotents de l'image de Galois (c'est-à-dire l'image de l'inertie sauvage), nous aurons $U_V \subset (\overline{G}_V, \overline{G}_V)$. L'inclusion réciproque étant immédiate, nous aurons bien montré la proposition.

Montrons donc que l'image de Galois (dans V) a comme groupe dérivé ses unipotents. Or cela provient du théorème de Fontaine dans [Fon93] (une version plus générale a d'ailleurs été démontrée par V. Abrashkin dans [Abr90]) :

Théorème (Fontaine)**.** *Soit U une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ qui est cristalline, à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$, avec $0 \leq h \leq p-2$. Notons V la réduction modulo p de U, H le noyau de l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur V, et $L = \overline{\mathcal{K}}^H$. Si enfin v_0 désigne la valuation de L normalisée par $v_0(p) = 1$ et $\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}$ la différente de l'extension $L/\mathcal{K}$, alors*

$$v_0(\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}) \leq 1 + \frac{h}{p-1}$$

Le V considéré ici est $V = \mathbf{V_{cris}}(M)$.

Supposons alors qu'il existe un élément unipotent de $\mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}) = \Gamma_{\mathcal{K}}/H$ qui ne soit pas dans le groupe dérivé. Alors, il induit un sous-groupe d'ordre une puissance de p dans $J = \mathrm{Gal}(L/\mathcal{K})/(\mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}), \mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}))$, donc il existe un élément de J d'ordre p (qui engendre un groupe cyclique distingué car J est abélien). Par conséquent, il existe $M/\mathcal{K}$ une extension cyclique de degré p (donc sauvagement ramifié car $\mathcal{K}$ a un corps résiduel algébriquement clos) avec $M \subset L$. De plus, comme $\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}} = \mathfrak{D}_{L/M}\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}$, nous obtenons $v_0(\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}) \leq v_0(\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}) \leq 1 + \frac{h}{p-1}$.

$M/\mathcal{K}$ est totalement ramifiée, donc si $\pi \in M$ est une uniformisante (c'est-à-dire $v_0(\pi) = \frac{1}{p}$), $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[\pi]$ (cf. I 6 théorème 1 de [CF86]), et si f est le polynôme minimal de π sur $\mathcal{K}$, alors $\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}} = f'(\pi)\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ (cf. I 4 proposition 6 de [CF86]), donc

$$v_0(\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}) = v_0(f'(\pi)) = v_0(\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(M/\mathcal{K}) \setminus \{Id\}} (\sigma(\pi) - \pi)) = \frac{(i+1)(p-1)}{p}$$

où $i \geq 1$ est le nombre de ramification de l'extension $M/\mathcal{K}$ (il y a un seul nombre de ramification car l'extension est cyclique, et il est supérieur ou égal à 1 car l'extension est sauvagement ramifiée).

Nous obtenons donc $h \geq \dfrac{ip^2 - (2i+1)p + i + 1}{p}$. Si $0 \leq h \leq p-3$ et $i \geq 1$, cette inégalité est impossible, ce qui conduit à une contradiction. Ceci montre donc bien que l'image de Galois (dans V) a comme groupe dérivé ses unipotents, ce qui conclut la proposition. □

3.4. Relation entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ modulo p. Soit M un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ ou de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, notons $n = \dim_k(M)$.

Soit $r+1$ la plus petite longueur d'une filtration de M dont les quotients sont des modules élémentaires.

Théorème 53. *Supposons $p \geq 2r+1$. Alors il existe*

$$f_M : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to M$$

un isomorphisme de k-espaces vectoriels tel que
- $f_M \rho_{mr}(t) = \rho_{\mathbf{MF}}(t) f_M$ *pour* $t \in (k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$;
- f_M *identifie* $\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k$ *et* $\overline{G}_V \times_{\mathbb{F}_p} k$.

Démonstration. Soit $\tilde{\mathsf{f}}_M$ la bijection donnée par le théorème 54 de [Dor07]

$$\tilde{\mathsf{f}}_M : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p \to M \otimes_k \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p$$

Elle envoie $\overline{G}'_V(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ sur $\overline{G}'_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ par définition de ces groupes, combiné à la proposition 17 (car, suite aux conditions imposées sur h, End_M est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{k}}$ avec $0 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$). Donc, à l'aide des théorèmes précédents (nous remarquerons que pour G un schéma en groupe, si F est un corps, $G(F) = G^{\mathrm{red}}(F)$), nous pouvons voir que $U_V(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p) = (\overline{G}'_V, \overline{G}'_V)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ est envoyé sur $(\overline{G}'_M, \overline{G}'_M)(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p) = U_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$. Alors, elle envoie $\overline{G}_V(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ sur $\overline{G}_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$, car ces groupes contiennent tous les éléments semi-simples (de $\overline{G}'_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ ou de $\overline{G}'_V(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ respectivement).

Donc, il existe $g \in \overline{G}_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ tel que $g\mathcal{T}g^{-1}$ est envoyé par $\tilde{\mathsf{f}}_M^{-1}$ sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Si $g = u_1 t_1$ avec $u_1 \in U_M(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$ et $t_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$, alors $u_1 \mathcal{T} u_1^{-1}$ est envoyé sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Comme u_1 agit via l'identité sur les modules élémentaires $M[i]/M[i-1]$, pour tout $t \in (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$, $u_1 \rho_{\mathbf{MF}}(t) u_1^{-1}$ agit comme $\rho_{\mathbf{MF}}(t)$ sur $M[i]/M[i-1]$. Par les propriétés de fonctorialité, le fait que le théorème 54 de [Dor07] est vrai sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p$, et la proposition 17, $u_1 \rho_{\mathbf{MF}} u_1^{-1}(t)$ est envoyé par $\tilde{\mathsf{f}}_M$ sur un élément qui agit comme $\rho_{mr}(t)$ sur $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)[i]/\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M[i-1])$, donc $u_1 \rho_{\mathbf{MF}} u_1^{-1}(t)$ est envoyé sur $\rho_{mr}(t)$.

Considérons alors le schéma $\mathbf{X}$ défini sur k par : pour toute k-algèbre R, $\mathbf{X}(R)$ est l'ensemble des $\theta : M \otimes_k R \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} R$ isomorphismes de R-modules tels que
- $\forall t \in (R \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$, $\theta \rho_{\mathbf{MF}}(t) \theta^{-1} = \rho_{mr}(t)$;
- θ envoie $\overline{G}_M(R)$ bijectivement sur $\overline{G}_V(R)$.

Alors $\mathbf{X}$ est un sous-k-schéma de $\mathbf{Isom}_{\mathbf{k}}(M, \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k)$ (les k-isomorphismes de M sur $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$), il est non vide puisque $\tilde{\mathsf{f}}_M^{-1} \circ u_1 \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$. Donc, k étant algébriquement clos, $\mathbf{X}(k)$ est non vide. $\square$

4. Relèvement du cas modulo p

4.1. Rappel. Pour appliquer les résultats précédents à une situation sur $\mathbb{Z}_p$, reprenons une situation décrite dans [Dor07] dans la section 6 : soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$ une représentation cristalline à valeurs dans les points sur $\mathbb{Z}_p$ d'un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$, G, et U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n, avec $\alpha : G \to GL_U$ une immersion fermée.

Proposition 54. *Soit G un groupe plat sur $\mathbb{Z}_p$, U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n et $\alpha : G \to GL_U$ une représentation qui induit une immersion fermée dans* End_U. *Identifions G avec son image. Alors, il existe un entier k et un sous $\mathbb{Z}_p$-module E (facteur direct) de $\bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{U\oplus\cdots\oplus U}_{n\ fois})^{\otimes i}$ laissé stable par l'action naturelle de $G(\mathbb{Z}_p)$ (provenant de celle de GL_U, notée η) tels que $G(R) = \{g \in GL(R) | \eta_g(E_R) = E_R\}$ pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R.*

Remarque 55. Si $\alpha : G \to GL_U$ n'induit pas une immersion fermée de G dans End_U, il suffit de composer α avec une immersion fermée $\beta : GL_U \to GL_{U'}$ tel que β induise une immersion fermée de GL_U dans $\mathrm{End}_{U'}$. Par exemple, $U' = U \oplus \mathbb{Z}_p$ avec $\beta = \mathrm{Id} \oplus \dfrac{1}{\det}$, ou bien $U' = U \oplus U^*$ (où U^* est le dual de U) avec $\beta(g) = (g, {}^tg^{-1})$.

Nous pouvons alors définir sur $M = \mathbf{D_{cris}}(U)$ (ou $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ suivant les cas) un groupe algébrique sur W, G_M, par : si η est l'action naturelle de GL_M sur $\bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{M\oplus\cdots\oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, alors

$$G_M(R) = \{g \in GL_M(R) | \eta_g(\overline{E}_R) = \overline{E}_R\}$$

pour toute W-algèbre R. Il ne reste qu'à bien choisir $\overline{E}$ en liaison avec E, ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème 56. *Supposons G lisse sur $\mathbb{Z}_p$. Si $\alpha : G \to GL_U$ induit une immersion fermée dans* End_U *et si la représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ induite sur U par α (et par $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$) vérifie*

– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec $0 \le h \le p-2$*

– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{2}$*

alors, en prenant

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) \cap \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{\mathbf{D_{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus \mathbf{D_{cris}}(U)}_{n\ fois})^{\otimes i}$$

dans le premier cas, ou

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) \cap \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}_{n\ fois})^{\otimes i}$$

dans le deuxième cas, il existe une bijection $\Psi : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M$ *qui identifie* $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ *au groupe* G_M *défini par* $G_M(R) = \{g \in GL_M(R) | \eta_g(\overline{E}_R) = \overline{E}_R\}$ *pour toute* W*-algèbre* R.

Remarque 57. La proposition 54 permet de décrire un groupe algébrique plat sur $\mathbb{Z}_p$ à l'aide d'invariants de Chevallet (comme pour les groupes algébriques sur un corps). En reprenant la situation du théorème 56, le résultat affirmé dit juste le sous-groupe algébrique de GL_M obtenu à partir de G et de l'isomorphisme Ψ a pour invariants de Chevallet "ceux obtenus naturellement à partir de ceux de G" grâce aux foncteurs de Fontaine et de Fontaine-Laffaille).

Rappelons les étapes de la démonstration : **Isom**, défini par

$$\mathbf{Isom}(R) = \{h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{\sim} M \otimes_W R | s(h)(E_R) = \overline{E}_R\}$$

pour R une W-algèbre, est un G-torseur (en notant $s(h)$ l'isomorphisme induit par h, défini de $\bigoplus_{0 \le i \le k} (\underbrace{U_R \oplus \cdots \oplus U_R}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ sur $\bigoplus_{0 \le i \le k} (\underbrace{M_R \oplus \cdots \oplus M_R}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$).
Il est non vide car f ou $\tilde{\mathsf{f}}$ (suivant les cas) est un point de $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$. Il est lisse sur W, et donc $\mathbf{Isom}(W)$ se surjecte dans $\mathbf{Isom}(k)$ par le lemme de Hensel. Or, $\mathbf{Isom} \times k$ est un schéma non vide (car f ou $\tilde{\mathsf{f}} \in \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$), donc par le théorème des zéros de Hilbert, $\mathbf{Isom}(k)$ est non vide (car k est algébriquement clos), donc $\mathbf{Isom}(W)$ est non vide.

4.2. Relèvement. Augmentons les hypothèses du théorème 56 : supposons qu'il existe un objet M de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, avec $0 \le h \le \frac{p-2}{2}$, ou un objet M de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, avec $0 \le h \le \frac{p-2}{4}$, tel que $U = \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)$ (nous avons donc divisé par deux la longeur de l'intervalle pour les poids de Hodge-Tate). Si r est la plus petite longueur d'une filtration de M dont les quotients sont des modules élémentaires, supposons que $p \ge 2r+1$.

Théorème 58. *Alors il existe* $f_{M/p} : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M/p) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to M/p$ *un isomorphisme de* k*-espaces vectoriels tel que*
- $f_{M/p}\rho_{mr}(t) = \rho_{\mathbf{MF}}(t) f_{M/p}$ *pour* $t \in (k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$;
- $f_{M/p}$ *identifie* $\overline{G}_{M/p} \times_{\mathbb{F}_p} k$ *et* $\overline{G}_{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M/p)} \times_{\mathbb{F}_p} k$;
- *si* L *est un sous-objet dans* $\mathbf{MF_W}$*, facteur direct (comme* W*-module) de* $\bigoplus_{0 \le i \le k} (\underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$*, alors* $f_{M/p}$ *induit une bijection de*

$$\Big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{0 \le i \le k} (\underbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} k \text{ sur } L/p\,;$$

Remarque 59. La dernière condition dit en particulier que $f_{M/p} \in \mathbf{Isom}(k)$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 53. Il suffit de considérer le schéma $\mathbf{X}$ défini sur k par : pour toute k-algèbre R, $\mathbf{X}(R)$ est l'ensemble des $\theta : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} R \xrightarrow{\sim} M \otimes_k R$ isomorphismes de R-modules tels que

- $\forall t \in (R \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$, $\theta\rho_{mr}(t)\theta^{-1} = \rho_{\mathbf{MF}}(t)$;
- θ envoie $\overline{G}_{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M/p)}(R)$ bijectivement sur $\overline{G}_{M/p}(R)$;
- si L est un sous-objet dans $\mathbf{MF_W}$, facteur direct (comme W-module) de $\bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, alors θ induit une bijection de $\left(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ sur $L \otimes_W R$.

Il est non vide, car le théorème 54 de [Dor07] nous donne que $\tilde{\mathsf{f}}$ vérifie la condition, et le reste est à analogue à la démonstration du théorème 53. □

Donc $f_{M/p} \in \mathbf{Isom}(k)$, et par le lemme de Hensel, il existe une bijection $f : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M$ qui identifie le groupe G à G_M (groupe qui contient en particulier $\mathcal{T}$) et la réduction de f modulo p vaut $f_{M/p}$.

Modulo p, $f_{M/p}$ identifie $\rho_{\mathbf{MF}}$ et ρ_{mr}, donc si τ est un générateur de l'inertie modérée $\mathcal{I}_{mr}$, si $t \in \mathbb{Z}_{p^s}^*$ est tel que $\rho_{mr}(t) = \rho(\tau)$, alors $f_{M/p}\rho_{\mathbf{MF}}(t)f_{M/p}^{-1} = \rho(\tau)$ modulo p, et ($g^{-1}(\mathcal{T})$ étant conjugué à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ dans $GL_{\mathbf{V_{cris}}(M)}$ car ils ont mêmes caractères, et mêmes dimensions d'espaces propres) $\rho_{\mathbf{MF}}(t)$ engendre dans GL_M un groupe isomorphe à celui de l'image de l'inertie modéré.

Considérons un élément $x \in f^{-1}\mathcal{T}f$ tel que $x = \rho(\tau)$ modulo p. Il existe alors $g \in G(W)$ avec $g^{-1}xg = \rho(\tau)$ et $g = \mathrm{Id}$ modulo p (c'est le lemme 60). Alors, fg est un relèvement possible de $f_{M/p}$ tel que $\rho(\tau) \in (fg)^{-1}\mathcal{T}fg$. Donc, $(fg)^{-1}\mathcal{T}fg$ est un tore qui contient l'image de l'inertie modérée (donc commute à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$), qui est égal à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ modulo p, et qui a les mêmes caractères (qui sont déterminés sur k à cause des conditions sur h), donc $(fg)^{-1}\mathcal{T}fg = \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Et comme fg modulo p vaut $f_{M/p}$, nous avons $(fg)^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}fg = \rho_{mr}$ modulo p, donc $(fg)^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}fg = \rho_{mr}$.

Lemme 60. *Soit H un groupe de type multiplicatif sur W, G un groupe lisse sur W (sous-groupe de GL_U pour un W-module libre de type fini U), et $u, v : H \to G$ deux morphismes de groupes tels que $u \times_W k = v \times_W k$. Alors, il existe $g \in G(W)$ tel que $v = gug^{-1}$ et $g = \mathrm{Id}$ modulo p.*

Démonstration. L'existence d'un élément $g_n \in G(W/p^n)$ qui vérifie que $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$ et $g_n = \mathrm{Id}$ modulo p, provient du corollaire 3.3 de SGA 3 II Exposé IX. Et plus exactement, en utilisant ce corollaire, pour tout g_n qui vérifie $g_n \in G(W/p^n)$ avec $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$, il existe un élément $g_{n+1} \in G(W/p^{n+1})$ tel que $g_{n+1} = g_n$

modulo p^n et $g_{n+1}(u \times_W W/p^{n+1})g_{n+1}^{-1} = (v \times_W W/p^{n+1})$. Donc, en notant $Y_n := \{g_n \in G(W/p^n)$ tel que $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$ et $g_n =$ Id modulo $p\}$, et $Y_1 := \{\mathrm{Id}\}$, les Y_n (avec les applications de restrictions modulo p^n) forment un système projectif. Nous venons de montrer que chaque Y_n est non vide, donc la limite projective est non vide. Soit donc $g \in \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, alors $g \in G(W)$ (car si I est l'idéal qui définit G sur W, $I \otimes_W W/p^n$ est l'idéal définissant G sur W/p^n, par conséquent pour tout $f \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(g) = f(g_n) = 0$ modulo p^n, donc $f(g) = 0$), $g = \mathrm{Id}$ modulo p et $v = gug^{-1}$ modulo p^n pour tout n. □

Nous venons donc de montrer :

Théorème 61. *Soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$ une représentation cristalline à valeurs dans les points sur $\mathbb{Z}_p$ de G, groupe algébrique lisse défini sur $\mathbb{Z}_p$. Soit U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n, et $\alpha : G \to GL_U$ une représentation qui soit une immersion fermée. Supposons $p \geq 2r+1$ où $r+1$ est le nombre de modules élémentaires intervenant dans une suite de composition de V/p. Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *la représentation cristalline induite par α sur U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, et α induit une immersion fermée de G dans End_U*
- *la représentation cristalline induite par α sur U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, et α induit une immersion fermée de G dans End_U*
- *la représentation cristalline induite par α sur U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$*
- *la représentation cristalline induite par α sur U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$*

Alors, $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}} \subset G$ et il existe un isomorphisme $h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ qui identifie le groupe G à un groupe G_M (dont la description est donné au théorème 56) contenant $\mathcal{T}$, tel que $h^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}h = \rho_{mr}$ (donc en particulier identifie $\mathcal{T}$ à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$).

Remarque 62. La condition $p \geq 2r+1$ est vérifiée dès que $p \geq 2n-1 = 2\,\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} U - 1$.

Ce théorème peut s'appliquer de la manière suivante : considérons $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL_V$ une représentation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$ espace-vectoriel de dimension inférieure à $\dfrac{p+1}{2}$. Supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$ ou dans $[\![0,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, alors (cf [Fon79], proposition 3.8.4) l'adhérence de Zariski (dans GL_V) $\mathbf{G}$ de l'image de ρ est connexe. Supposons la représentation semi-simple (sinon, considérons sa semi-simplifiée), alors $\mathbf{G}$ est réductif. Donc, en appliquant les résultats cités dans [Tit79] (paragraphe 3.2 et 3.4.1), il existe un groupe algébrique lisse G défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que $\mathrm{Im}(\rho) \subset G(\mathbb{Z}_p)$, et dont la fibre générique est $\mathbf{G}$. Le théorème précédent s'applique alors, et nous donne l'inclusion $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}} \subset \mathbf{G}$.

De manière générale, nous avons la suite exacte courte scindée (cf. un résultat de G.D. Mostow, car la caractéristique du corps de base $\mathbb{Q}_p$ est nulle) :

$$0 \longrightarrow R_u(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbf{G} \xrightarrow{\Pi} \mathbf{G}_{red} \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{G}_{red}$ est un groupe réductif, qui est égal à l'adhérence de Zariski de l'image de la représentation semi-simplifiée associée, et $R_u(\mathbf{G})$ est le radical unipotent de $\mathbf{G}$. De plus, toutes les sections sont conjuguées.

Alors, le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est inclus dans $\mathbf{G}_{red}$, de part les remarques précédentes, et en considérant son image par une section $s : \mathbf{G}_{red} \to \mathbf{G}$, nous obtenons un tore $T = s(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})$, qui se réduit sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Quitte à conjuguer la section, nous pouvons supposer que l'image de l'inertie modérée est incluse dans T (en effet, soit K le groupe engendré par T et $R_u(\mathbf{G})$ (c'est-à-dire $K = T \ltimes R_u(\mathbf{G})$) ; alors l'image de l'inertie modérée est dans K, car $K = \Pi^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})$, donc il existe un élément de T qui est conjugué (par $g \in K$) à l'image d'un générateur de l'inertie modérée (cf. théorème 10.6(5) de [Bor91]) ; or, T étant abélien, nous pouvons supposer $g \in R_u(\mathbf{G})$, et considérer alors la section gsg^{-1}). Nous voulons montrer que T est en fait $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$, or il suffit de remarquer qu'il a les mêmes espaces propres que ceux de l'image d'un générateur de l'inertie modérée, associés aux bons caractères, et ceci se voit sur le semi-simplifié. Nous avons donc montré le théorème suivant :

Théorème 63. *Considérons une représentation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace-vectoriel de dimension n avec $p \geq 2n-1$, et supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans $[\![0,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$ ou dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$. Alors le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est inclus dans l'adhérence sur $\mathbb{Q}_p$ de Zariski $\mathbf{G}$ de l'image de la représentation.*

4.3. Groupe à un paramètre de Hodge-Tate. Le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est l'image du tore restriction des scalaires de $\mathbb{G}_m$ de $\mathbb{Q}_{p^s}$ à $\mathbb{Q}_p$ pour s bien choisi, qui se scinde en $\prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p)} {}^{\tau}\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{Q}_p^{nr}$. Notons u le groupe à un paramètre correspondant à l'image de la composante indexée sur l'identité.

Théorème 64. *Considérons V une représentation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace-vectoriel de dimension n avec $p \geq 2n-1$, et supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans $[\![0,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$ ou dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$. Alors le groupe à un paramètre de Hodge-Tate est conjugué à u dans $\mathbf{G}$, l'adhérence sur $\mathbb{Q}_p$ de Zariski de l'image de la représentation.*

Démonstration. Montrons le théorème dans le cas où V est semi-simple : dans ce cas, $\mathbf{G}$ est un groupe réductif, donc si U est un réseau stable pour la représentation, en appliquant les résultats de [Tit79], il existe un groupe algébrique lisse G défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que l'image de la représentation soit incluse dans $G(\mathbb{Z}_p)$, et dont la fibre générique est $\mathbf{G}$. Le théorème 61 s'applique donc, et il existe alors une application $f_U : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ qui est dans le torseur **Isom**.

Considérons alors l'application h_V défini par : notons $N = \mathbf{D}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(V)$, $Gr^i(N) = \operatorname{Fil}^i(N)/\operatorname{Fil}^{i+1}(N)$. Alors, puisque V est cristalline, elle est de DeRham et de Hodge-Tate, et nous avons donc un isomorphisme naturel $Gr^i(N) \to (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}(i))^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$. Pour obtenir une application $N \to \oplus_i Gr^i(N)$, il faut se choisir un scindage de la filtration de N. En considérant le scindage donné dans [Win84] en $N = \oplus N_i$, scindage fonctoriel, nous obtenons une application

$$h_V : N \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to (\oplus_i Gr^i(N)) \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to (\oplus_i (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}(i))^{\Gamma_{\mathcal{K}}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C} \to V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}$$

qui est fonctorielle.

L'application h_V ainsi défini appartient donc à $\mathbf{Isom}(\mathbb{C})$ qui est un G-espace homogène, donc il existe $g \in G(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{C})$ tel que $h_V = g \circ f_U^{-1}$. Or, en notant u_{HT} le groupe à un paramètre de Hodge-Tate et u_{grad} le groupe à un paramètre associé à la graduation $N = \oplus N_i$ (c'est-à-dire le groupe à un paramètre correspondant à l'image de la composante indexée sur l'identité par la représentation définissant $\mathcal{T}$), nous avons $h_V \circ u_{grad} = u_{HT} \circ h_V$, et donc, comme $f_U^{-1} \circ u_{grad} = u \circ f_U^{-1}$, nous obtenons $u_{HT} = gug^{-1}$, ce qui donne le résultat dans le cas d'une représentation semi-simple.

Pour le cas général, si $\Pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}_{red}$ est la projection canonique, il suffit de remarquer que si T_1 et T_2 sont deux tores d'un groupe algébrique $\mathbf{G}$ tels que l'image par Π de T_1 est conjugué à l'image de T_2 dans $\mathbf{G}_{red}$, alors T_1 et T_2 sont conjugués : en effet, il suffit de relever l'élément qui conjugue pour se ramener au cas où T_1 et T_2 ont même image T, mais alors ce sont deux tores maximaux de $\Pi^{-1}(T)$ (qui est un groupe réductif), donc sont conjugués (cf. théorème 11.10 [Bor91]). □

Bibliographie

[Abr90] Victor A. Abrashkin. Ramification in étale cohomology. *Invent. Math.*, 101(3) :631–640, 1990.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Col92] Pierre Colmez. Périodes p-adiques des variétés abéliennes. *Math. Ann.*, 292(4) :629–644, 1992.

[Col93] Pierre Colmez. Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. of Math. (2)*, 138(3) :625–683, 1993.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982. Philosophical Studies Series in Philosophy, 20.

[Dor07] Lionel Dorat. G-structures entières et modules de Wach. *Doc. Math.*, 12 :399–440 (electronic), 2007.

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations p-adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.

[Fon79] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Fon82] Jean-Marc Fontaine. Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :529–577, 1982.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon93] Jean-Marc Fontaine. Schémas propres et lisses sur $\mathbf{Z}$. In *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, pages 43–56, Delhi, 1993. Hindustan Book Agency.

[Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, 223 :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Nor87] Madhav V. Nori. On subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$. *Invent. Math.*, 88(2) :257–275, 1987.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Win84] Jean-Pierre Wintenberger. Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux. *Ann. of Math*, 119(3) :511–548, 1984.

[Win91] Jean-Pierre Wintenberger. Torseur entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline ; le cas abélien. *Duke Math. J.*, 62(3) :511–526, 1991.

Lionel Dorat
14 allée des Myosotis 26760 Beaumont Les Valence
E-mail: `lionel.dorat@ens-lyon.org`
URL: `http://lionel.dorat.googlepages.com/`