JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Robert BENEDETTO, Jean-Yves BRIEND et Hervé PERDRY

Dynamique des polynômes quadratiques sur les corps locaux

Tome 19, n° 2 (2007), p. 325-336.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2007__19_2_325_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 325-336

Dynamique des polynômes quadratiques sur les corps locaux

par Robert BENEDETTO, Jean-Yves BRIEND et Hervé PERDRY

À la mémoire d'Adrien Douady

Résumé. Dans cette note, nous montrons que la dynamique d'un polynôme quadratique sur un corps local peut être déterminée en temps fini, et que l'on a l'alternative suivante : soit l'ensemble de Julia est vide, soit P y est conjugué au décalage unilatéral sur 2 symboles.

Abstract. We show that the dynamics of a quadratic polynomial over a local field can be completely decided in a finite amount of time, with the following two possibilities : either the Julia set is empty, or the polynomial is topologically conjugate on its Julia set to the one-sided shift on two symbols.

1. Introduction

La famille des polynômes quadratiques complexes, sous leur forme bien connue de $P_c(z) = z^2 + c$, est l'objet, du point de vue dynamique, d'intenses recherches, plus particulièrement depuis la découverte de l'ensemble de Mandelbrot et les articles fondateurs d'Adrien Douady et John Hamal Hubbard (voir [DH]). L'étude de cette même famille mais restreinte au corps des nombres réels est elle aussi très développée, et l'on peut à ce sujet citer, par exemple, les travaux de Michael Jakobson ou de Michael Lyubich (voir [J] et [L]). Par contre, la théorie des systèmes dynamiques sur d'autres corps que $\mathbf{C}$ est restée, jusqu'à récemment, un sujet peu exploré, malgré de nombreuses applications possibles à la géométrie diophantienne. On peut citer les travaux de D.G. Northcott, Wladyslaw Narkiewich ou encore Patrick Morton et Joseph Silverman (voir [No], [Na], [MS]). Plus récemment, de nombreux chercheurs se sont attaqués à l'étude dynamique des fractions rationnelles sur le corps $\mathbf{C}_p$, analogue p-adique du corps des nombres complexes. Le confort du travail sur un corps algébriquement clos est malheureusement fortement obéré par le caractère topologiquement sauvage de $\mathbf{C}_p$, et a nécessité la mise en place de machineries conséquentes (voir par exemple les travaux de Liang-Chung Hsia [H1, H2], Matthew Baker et

Manuscrit reçu le 12 mars 2006.

Liang-Chung Hsia [HB], Robert Benedetto [Be2], Jean-Paul Bézivin [B1, B2], Juan Rivera–Letelier [R], Charles Favre et Juan Rivera–Letelier [FR], et bien d'autres).

L'objet du présent article est de présenter une étude complète de la dynamique des polynômes quadratiques sur les corps locaux. Ces derniers sont en quelque sorte à $\mathbf{C}_p$ ce que $\mathbf{R}$ est à $\mathbf{C}$: ils ne sont pas algébriquement clos, mais ils sont localement compacts. Les polynômes quadratiques réels et complexes ayant été l'objet de nombreux travaux, il nous a semblé intéressant de faire une étude de ceux-ci dans le cas des corps locaux. Par ailleurs, des méthodes analogues à celles présentées ici permettent de traiter d'autres exemples intéressants, ou des familles simples comme les polynômes unicritiques du type $z^p + c$. On peut également espérer, par un passage du local au global, retirer des informations intéressantes concernant la dynamique sur $\mathbf{C}$ à partir des dynamiques sur les corps p-adiques, comme le montre la dernière partie de cet article. Cependant, la question générale sous-jacente à ce travail est celle de la détermination en temps fini de la dynamique de tout polynôme défini sur un corps local.

Notons enfin que les problèmes de calculabilité des ensembles de Julia et de l'ensemble de Mandelbrot complexes ont été l'objet de travaux récents. Les premiers ont pour cadre un modèle algébrique de calculabilité introduit par Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub et Steve Smale, dans lequel l'ensemble de Mandelbrot n'est pas calculable, de même que certains ensembles de Julia (voir [BCSS]). Des travaux plus récents, utilisant un modèle de calculabilité plus proche du calcul approché sur les nombres réels (inspiré des travaux de Banach), ont montré la non calculabilité de certains ensembles de Julia, et soumis la calculabilité de l'ensemble de Mandelbrot à une question difficile et encore ouverte, la conjecture d'hyperbolicité (voir les articles de Mark Braverman et Michael Yampolski [BY1,BY2]).

Notations

Dans la suite, $\mathbf{K}$ désignera un corps muni d'une valuation v non-archimédienne pour laquelle $\mathbf{K}$ est complet (voir les chapitres 1 et 2 du livre d'Emil Artin [A]). Nous supposerons toujours que v est de rang 1, c'est-à-dire que $v(\mathbf{K}^*) \subset \mathbf{R}$. Dans ce cas, la fonction $|x| = 2^{-v(x)}$ définit une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbf{K}$. Nous noterons $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \{z, v(z) \geq 0\}$ l'anneau de valuation de $\mathbf{K}$, $\mathcal{M}_{\mathbf{K}} = \{z, v(z) > 0\}$ l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et $\mathbf{k} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\mathcal{M}_{\mathbf{K}}$ le corps résiduel de $\mathbf{K}$.

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. Nous noterons $JR_P(\mathbf{K})$ son ensemble de Julia rempli, défini comme étant l'ensemble des points de $\mathbf{K}$ dont l'orbite sous itération par P est bornée :

$$\begin{aligned} JR_P(\mathbf{K}) &= \{z \in \mathbf{K}, (P^n(z))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{z \in \mathbf{K}, (v(P^n(z)))_{n\in\mathbf{N}} \text{ ne tend pas vers } -\infty\}. \end{aligned}$$

Pour définir l'ensemble de Julia de P, il faut être plus soigneux : soit $\mathbf{C}_v$ la complétion d'une clôture algébrique de $\mathbf{K}$, munie de l'unique extension de v. On peut munir $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v) = \mathbf{C}_v \cup \{\infty\}$ d'une métrique « sphérique », et alors l'ensemble de Julia de P est l'ensemble J_P des points au voisinage desquels la famille des itérées $\{P^n, n \geq 0\}$ n'est pas équicontinue (voir par exemple [H2]). Nous noterons alors $J_P(\mathbf{K})$ l'ensemble des $\mathbf{K}$-points de $J_P(\mathbf{C}_v)$: $J_P(\mathbf{K}) = J_P \cap \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$. Dans le cas où P est un polynôme quadratique, on pourrait se passer de la mention du corps $\mathbf{C}_v$, et travailler entièrement dans $\mathbf{K}$. Notons que $JR_P(\mathbf{K})$ est toujours une partie bornée de $\mathbf{K}$ et que $J_P(\mathbf{K}) \subseteq JR_P(\mathbf{K})$. Dans le cas complexe, l'ensemble de Julia est toujours non vide (et même assez gros), alors que dans le cas non-archimédien, il peut être vide. Notons pour finir que si l'on conjugue P par une transformation affine γ de $\mathbf{K}$, alors l'ensemble de Julia rempli du polynôme conjugué $\gamma \circ P \circ \gamma^{-1}$ est l'image par γ de l'ensemble de Julia rempli de P (et la même chose est vraie pour l'ensemble de Julia).

Résultats

Soit $P(z) = az^2 + bz + c \in \mathbf{K}[z]$ un polynôme quadratique. Quitte à conjuguer P par l'homothétie de rapport $1/a$, on peut supposer que P est unitaire, ce que nous ferons dans toute la suite. Ainsi, nous prendrons P sous la forme

$$P(z) = z^2 + bz + c = z(z+b) + c,$$

avec $b, c \in \mathbf{K}$. Nous noterons alors

$$\Delta = (b-1)^2 - 4c$$

le discriminant de l'équation aux points fixes de P. Le premier théorème que nous montrons est le suivant :

Théorème 1.1. *Avec les notations qui précèdent, trois cas peuvent se présenter :*

(1) *Pour tout $\xi \in \mathbf{K}$, on a*

$$v(P(\xi) - \xi) < 0.$$

Alors $JR_P(\mathbf{K}) = J_P(\mathbf{K}) = \emptyset$. Dans ce cas, on a de plus, pour tout $\xi \in \mathbf{K}$:

$$v(P(\xi) - \xi) < v(P'(\xi)).$$

(2) *Il existe $\xi_0 \in \mathbf{K}$ tel que $v(P(\xi_0) - \xi_0) \geq 0$, et $v(\Delta) \geq 0$. Alors*

$$JR_P(\mathbf{K}) = \{z \in \mathbf{K}, v(z - \xi_0) \geq 0\} \text{ et } J_P(\mathbf{K}) = \emptyset.$$

(3) *Il existe $\xi_0 \in \mathbf{K}$ tel que $v(P(\xi_0) - \xi_0) \geq 0$, et $v(\Delta) < 0$. Alors $JR_P(\mathbf{K}) = J_P(\mathbf{K})$ est un compact non-vide en restriction auquel P est topologiquement conjugué au décalage unilatéral sur deux symboles. De plus, $J_P = J_P(\mathbf{K})$.*

Rappelons que $P : J_P(\mathbf{K}) \longrightarrow J_P(\mathbf{K})$ est dit topologiquement conjugué au décalage unilatéral sur deux symboles s'il existe un homéomorphisme $h : J_P(\mathbf{K}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que $h \circ P = \sigma \circ h$, où $\sigma : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est l'application de décalage vers la gauche (avec suppression du premier symbole). Dans le troisième cas ci-dessus, pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ (en particulier pour $\mathbf{L} = \mathbf{C}_v$), on a $J_P(\mathbf{L}) = J_P(\mathbf{K})$, et en particulier tous les points périodiques de P (qui sont répulsifs) sont dans $\mathbf{K}$. La condition 2 est invariante par passage à une extension de $\mathbf{K}$, tandis qu'on peut, éventuellement, faire passer P de la première condition à la deuxième ou la troisième par extension (par exemple en rajoutant un point fixe à P). Dans le deuxième cas, tous les points périodiques de P sont non-répulsifs. On sait alors, si $\mathbf{K}$ est une extension finie d'un corps p-adique $\mathbf{Q}_p$, que ceux-ci sont en nombre fini (voir l'article de T. Pezda [P], ainsi que la thèse [R] de J. Rivera-Letelier, corollaire 3.17).

Ce théorème étend et généralise des résultats antérieurs, notamment de Thiran, Verstegen et Weyers [TVW], où le cas de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_p$, $p \neq 2$ est traité, et de Benedetto [Be1] dans l'appendice de sa thèse, dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}_2$. Par ailleurs, différents cas particuliers ont été étudiés : $P(z) = z(z-1)/2$ sur $\mathbf{Q}_2$ dans l'article de Woodcock et Smart [WS], et $P(z) = z^2 - a^2/p^2$ sur $\mathbf{Q}_p$, $p \neq 2$, dans l'article de Dremov [D]. Dans la prépublication [NR] de Nevins et Rogers, les points périodiques de $P(z) = z^2 + c$, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_p$ et $|c| < 1$ sont étudiés. Enfin, et dans une direction beaucoup plus arithmétique, il faut mentionner le très intéressant travail de R. Jones dans sa thèse [Jo] (étude galoisienne du lieu hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot p-adique).

Si $\mathbf{K}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, les travaux de J. Denef (voir [De]) concernant l'élimination des quantificateurs en géométrie semi-algébrique p-adique permettent de démontrer qu'il existe une procédure déterminant, en un temps fini et avec une quantité finie de termes d'un développement hensélien des coefficients, dans quel cas du théorème 1.1 le polynôme que l'on examine se place. En poussant un peu l'analyse, nous allons donner un énoncé précis permettant de faire ce test de manière effective. Pour ne pas alourdir la présentation, nous supposerons que $\mathbf{K}$ n'est pas de caractéristique 2, même si un énoncé analogue est vrai dans ce cas (le lecteur intéressé pourra aisément y adapter nos méthodes).

Pour parler de calcul effectif sur des développements henséliens, nous allons nous limiter au cas où $\mathbf{K}$ est un corps local non-archimédien : $\mathbf{K}$ est complet et localement compact (en particulier, la valuation est discrète et le corps résiduel fini).

Théorème 1.2. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps local non-archimédien de caractéristique différente de 2, avec v normalisée de manière à ce que $v(\mathbf{K}^*) = \mathbf{Z}$. Soit $P(z) = z^2 + bz + c$ un polynôme quadratique. Soit $\Delta = (b-1)^2 - 4c$ le discriminant de l'équation aux points fixes.*

(1) *Si $v(\Delta) \geq 2v(2)$, alors P vérifie le deuxième cas du théorème 1.1.*

(2) *Si $v(\Delta)$ est impair et vérifie $v(\Delta) < 2v(2)$, P vérifie le premier cas.*

(3) *Si $v(\Delta)$ est pair et vérifie $v(\Delta) < 2v(2)$, on peut poser $u\alpha^2 = -\Delta/4$, avec $v(u) = 0$ et $v(\alpha) = v(\Delta)/2 - v(2) < 0$. Alors on a l'alternative suivante :*
   - *soit $v(\Delta) \geq 0$ et on est dans le deuxième cas si, et seulement si, il existe $z \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ tel que $v(z^2 + u) \geq 2v(2) - v(\Delta)$, sinon on est dans le premier cas ;*
   - *soit $v(\Delta) < 0$, et on est dans le troisième cas si, et seulement si, il existe $z \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ tel que $v(z^2 + u) \geq 2v(2) - v(\Delta)/2$, sinon on est dans le premier cas.*

Notons tout d'abord que le premier alinéa du troisième cas ci-dessus ne peut se produire que si $\mathbf{K}$ est de caractéristique résiduelle 2, c'est-à-dire, ici, une extension finie de $\mathbf{Q}_2$. Dans ce cas, $v(2)$ est l'indice de ramification de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{Q}_2$. Si $\mathbf{K}$ est de caractéristique résiduelle impaire, on a toujours $v(2) = 0$, et l'énoncé se simplifie. Enfin, les critères intervenant dans le théorème sont effectifs au sens où il nous suffit de tester l'existence de solutions d'équations modulaires. Nous entendons par cette expression une inégalité de la forme

$$v(f(z)) \geq l, z \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}},$$

où $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}[z]$ et $l \in \mathbf{N}$. Déterminer si une telle inégalité a une solution ou non revient à résoudre l'équation $f(z) = 0$ dans l'anneau fini $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\pi^{l+1}\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, où π est une uniformisante de $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire un élément de valuation 1).

2. Démonstration du théorème 1

Nous avons décidé, pour la preuve de ce théorème, de n'utiliser que des méthodes élémentaires, qui, en particulier, ne font pas appel à des extensions de $\mathbf{K}$ pour y résoudre éventuellement certaines équations. Cela rend les choses un tout petit peu fastidieuses, mais permet de mieux appréhender les phénomènes.

Si ξ est un élément de $\mathbf{K}$, nous noterons $Q_\xi(z) = P(z+\xi) - \xi$ le conjugué de P par la translation de vecteur $-\xi$. On a ainsi

$$Q_\xi(z) = z^2 + (2\xi + b)z + P(\xi) - \xi,$$

et, avec des notations suggestives, $\Delta_P = \Delta_Q$.

Lemme 2.1. *Si $\xi_0 \in JR_P(\mathbf{K})$, alors $v(P(\xi_0) - \xi_0) \geq \min\{0, v(P'(\xi_0))\}$.*

Démonstration. En effet, si $v(P(\xi)-\xi) < \min\{0, v(2\xi+b)\}$, alors, par l'inégalité ultramétrique, $v(Q_\xi^2(0)) = 2v(P(\xi)-\xi)$, et, plus généralement,

$$v(Q_\xi^n(0)) = 2^{n-1} v(P(\xi)-\xi),$$

qui tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Le lemme est démontré. □

Nous supposons donc maintenant qu'il existe ξ_0 tel que $v(P(\xi_0)-\xi_0) \geq \min\{0, v(P'(\xi_0))\}$, et examinons séparément les divers cas qui peuvent se présenter.

Si $v(2\xi_0+b) \geq 0$, alors $v(P(\xi_0)-\xi_0) \geq 0$ et le polynôme Q_{ξ_0} a *bonne réduction :* il est à coefficients entiers et sa réduction est de même degré que lui (car il est unitaire) ; en particulier, $v(\Delta_Q) = v(\Delta_P) \geq 0$. On en déduit immédiatement que $JR_{Q_{\xi_0}}(\mathbf{K}) = \{z, v(z) \geq 0\} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et que $J_{Q_{\xi_0}}(\mathbf{K}) = \emptyset$. En retranslatant par $-\xi_0$, il vient

$$JR_P(\mathbf{K}) = \{z, v(z-\xi_0) \geq 0\}, \quad J_P(\mathbf{K}) = \emptyset.$$

Nous supposerons donc désormais que $v(2\xi_0+b) < 0$. Le polynôme Q_{ξ_0} est alors de la forme

$$Q(z) = z^2 - \beta z + \gamma = z(z-\beta) + \gamma,$$

avec $v(\beta) < 0$ et $v(\beta) \leq v(\gamma)$, et $v(\Delta_Q) = v(\Delta_P) < 0$.

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses ci-dessus, $JR_Q(\mathbf{K})$ est inclus dans l'union disjointe des boules $\{v(z) \geq 0\}$ et $\{v(z-\beta) \geq 0\}$.*

Démonstration. Nous allons procéder par disjonction des cas.

(1) Si $v(z) < v(\beta)$, alors $v(z-\beta) = v(z)$, et donc $v(Q(z)) = 2v(z) < v(\beta)$. En itérant, $v(Q^n(z)) = 2^n v(z)$, et donc $z \notin JR_Q(\mathbf{K})$.

(2) Si $v(z) = v(\beta)$ et $v(z-\beta) < 0$, alors $v(z(z-\beta)) = v(z) + v(z-\beta) < v(\beta) \leq v(\gamma)$, et donc $v(Q(z)) < v(\beta)$; on peut se ramener au premier cas et $z \notin JR_Q(\mathbf{K})$.

(3) Si $v(\beta) < v(z) < 0$, alors $v(z(z-\beta)) = v(z) + v(z-\beta) = v(z) + v(\beta) < v(\beta) \leq v(\gamma)$; on peut encore une fois se ramener au premier cas, et cela achève la démonstration du lemme.

□

Posons donc $B_0 = \{z, v(z) \geq 0\}$, $B_\beta = \{z, v(z-\beta) \geq 0\}$ et $B = \{z, v(z) \geq v(\beta)\}$.

Lemme 2.3. *Si $JR_Q(\mathbf{K}) \neq \emptyset$, alors il existe $\xi_0 \in \mathbf{K}$ tel que $v(Q(\xi_0)-\xi_0) \geq 0$.*

Démonstration. Soit en effet $x \in JR_Q(\mathbf{K})$ et soit $y = \beta - x$. Si x est dans l'une des B_i, y est dans l'autre. Cependant $Q(x) = Q(y)$ doit être dans l'une des deux, et donc soit $v(Q(x)-x) \geq 0$ soit $v(Q(y)-y) \geq 0$. □

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, Q définit une bijection entre B_i et B, pour $i = 0, \beta$.*

Démonstration. Il est en effet facile de voir que $Q(B_i) \subseteq B$: si $z \in B_0$, alors $v(z-\beta) = v(\beta)$ et donc $v(z(z-\beta)) \geq v(\beta)$, soit finalement $v(Q(z)-\gamma) \geq v(\beta)$. La démonstration est la même pour B_β. Montrons maintenant que $Q : B_0 \longrightarrow B$ est bijective. Soit $y = \gamma - y_0$ avec $v(y_0) \geq v(\beta)$ un élément de B. L'équation

$$Q(z) = y, \quad z \in B_0$$

s'écrit

$$z^2 - \beta z + y_0 = 0, \quad v(z) \geq 0,$$

soit encore

$$f(z) = \frac{1}{\beta} z^2 - z + \frac{y_0}{\beta} = 0, \quad v(z) \geq 0.$$

On a alors $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}[z]$, $v(f(y_0/\beta)) > 0$ et $v(f'(y_0/\beta)) = 0$. Comme $\mathbf{K}$ est complet, on peut appliquer le lemme de Hensel, qui nous assure de l'existence d'une unique solution z_0 de $f(z) = 0$ dans B_0. L'autre solution de $f(z) = 0$, $\beta - z_0$, se trouve dans B_β, et nous avons démontré le lemme. $\square$

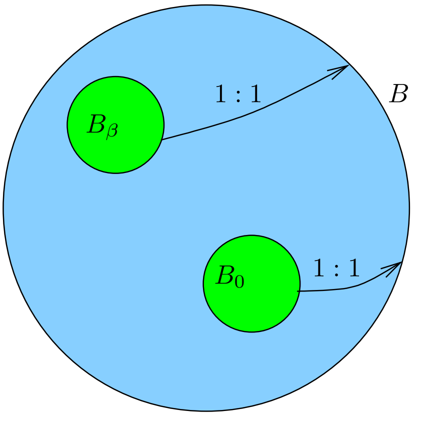

FIG. 1. Un décalage sur deux symboles

Nous avons presque terminé de démontrer le théorème 1.1 : il reste à montrer que sous les hypothèses ci-dessus, on a $JR_Q(\mathbf{K}) = J_Q(\mathbf{K})$ et que $Q_{|J_Q(\mathbf{K})}$ est topologiquement conjuguée au décalage unilatéral sur deux symboles σ. Tout d'abord, pour tout $x, y \in B_i$, on a $v(x+y-\beta) = v(\beta)$, et donc

$$v(Q(x) - Q(y)) = v((x-y)(x+y-\beta)) = v(x-y) + v(\beta).$$

Ainsi, d'après le lemme 2.4, $Q : B_i \longrightarrow B$ est une dilatation stricte. Il est également clair, par le lemme 2.2, que

$$JR_Q(\mathbf{K}) = \bigcap_{n\geq 0} Q^{-n}(B).$$

Si z est un élément de $JR_Q(\mathbf{K})$, on peut définir $h(z) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ par

$$h(z) = (\alpha_n)_{n\geq 0},\ \alpha_n = 0 \text{ si } Q^n(z) \in B_0,\ \alpha_n = 1 \text{ si } Q^n(z) \in B_\beta.$$

Comme Q est dilatante sur les deux boules B_0, B_β, l'application h est bien définie et injective. Comme B_0 et B_β sont des ouverts, h est continue, et la complétude de $\mathbf{K}$ implique enfin que h est surjective. Enfin, il est clair que, par définition, h conjugue Q, restreint à $JR_Q(\mathbf{K})$, au décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. On conclut enfin que $JR_Q(\mathbf{K}) = J_Q(\mathbf{K})$ par le fait que Q est uniformément localement dilatante sur $JR_Q(\mathbf{K})$. Remarquons également que dans les lemmes 2.2 et 2.4, on peut remplacer $\mathbf{K}$ par une de ses extensions, par exemple $\mathbf{C}_v$. On construit alors de la même manière une conjugaison $h' : J_Q \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ qui, étant bijective et coincidant avec h sur $J_Q(\mathbf{K})$, doit avoir le même domaine que h ; ainsi, $J_Q = J_Q(\mathbf{K})$. On achève la démonstration du théorème 1.1 en repassant à P par conjugaison par une translation.

Notons pour conclure cette section que dans l'article [WS], la conjugaison h est décrite entièrement en termes henséliens, dans le cas particulier où $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_2$ et $P(z) = z(z-1)/2$.

3. Démonstration du théorème 1.2

Dans cette section, nous supposerons que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2 muni d'une valuation non-archimédienne v (de rang 1) pour laquelle $\mathbf{K}$ est complet et localement compact. On sait alors que v est discrète et le corps résiduel $\mathbf{k}$ fini. On suppose v normalisée de manière à ce que $v(\mathbf{K}^*) = \mathbf{Z}$. On peut alors choisir une uniformisante π, c'est-à-dire un élément de valuation 1, et l'on sait que tout élément de $\mathbf{K}$ admet une unique écriture comme série de Hensel en puissances de π (voir [A], p. 57).

Soit maintenant $P(z) = z^2 + bz + c$ un polynôme quadratique unitaire à coefficients dans $\mathbf{K}$. Pour montrer qu'on peut déterminer en temps fini dans quel cas du théorème 1.1 le polynôme P se place, il suffit de montrer qu'on peut décider si

$$A = \{z \in \mathbf{K}, v(z^2 + (b-1)z + c) \geq 0\}$$

est vide ou non, avec un nombre fini de termes du développement hensélien de b et de c. Il suffit pour cela de montrer que cette question peut se résoudre en résolvant des équations, en nombre fini, dans des quotients finis $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\pi^k\mathcal{M}_{\mathbf{K}}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$.

Comme $\mathbf{K}$ n'est pas de caractéristique 2, on peut conjuguer P, par la translation de vecteur $(b-1)/2$, au polynôme

$$Q(z) = z^2 + z - \frac{1}{4}\left((b-1)^2 - 4c\right),$$

et nous poserons $\Delta = (b-1)^2 - 4c$ ainsi que $\gamma = -\Delta/4$. On doit alors maintenant déterminer si

$$B = \{z \in \mathbf{K}, v(z^2 + \gamma) \geq 0\}$$

est vide ou non.

Si $v(\gamma) \geq 0$, alors 0 est élément de B, et le cas 1 du théorème 1.2 est démontré. Nous supposons maintenant $v(\gamma) < 0$.

Pour montrer que l'énoncé $B \neq \emptyset$ peut se réduire à la résolution d'une équation modulaire, nous allons regarder en détail où peuvent se situer les éléments de B, s'il en existe.

Fait :

$$B \subseteq \left\{z, v(z) = \frac{v(\gamma)}{2}\right\}.$$

En effet, si $v(z) > v(\gamma)/2$, alors $v(z^2+\gamma) = v(\gamma) < 0$ et si $v(z) < v(\gamma)/2$, alors $v(z^2+\gamma) = 2v(z) < v(\gamma) < 0$.

On en déduit que si $v(\gamma)$ est impair, il n'y a pas de solution et B est vide, et c'est le deuxième cas du théorème 1.2.

Supposons maintenant que $v(\gamma)$ est pair, et choisissons $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $v(\alpha) = v(\gamma)/2$. Il existe alors une unité u de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ telle que $\gamma = u\alpha^2$. D'après le premier cas du théorème 1.1, en posant $z = \alpha z_0$, la condition que $JR_Q(\mathbf{K})$ est non-vide devient

$$(\star) \quad \exists z_0 \in \mathbf{K}, v(z_0) = 0 \text{ et } v(\alpha^2 z_0^2 + u\alpha^2) \geq \min\{0, v(2\alpha z_0 + 1)\}.$$

Si $v(2) < -v(\alpha)$, on obtient alors $v(2\alpha z_0 + 1) = v(2) + v(\alpha) < 0$, et la condition $(\star)$ est équivalente à $v(z_0^2 + u) \geq v(2) - v(\alpha) > 0$, qui est une équation modulaire.

Si $v(2) \geq -v(\alpha)$, la condition devient $v(z_0^2 + u) \geq -2v(\alpha) > 0$, qui est aussi une équation modulaire.

Pour résumer, nous avons montré que, si $v(\gamma) < 0$, alors $JR_Q(\mathbf{K})$ est non-vide si, et seulement si, $v(\gamma)$ est pair, et si

- soit $v(2) \geq -v(\alpha) = -v(\gamma)/2 = -(v(\Delta) - 2v(2))/2$, et il existe z_0 tel que $v(z_0^2 + u) \geq -v(\gamma)$. Or $v(2) \geq -v(\gamma)/2$ équivaut à $v(\Delta) \geq 0$; dans ce cas, $v(2\alpha z_0 + 1) = 0$, et nous sommes donc dans le deuxième cas du théorème 1.1.
- soit $v(2) < -v(\alpha) = -v(\gamma)/2 = -(v(\Delta) - 2v(2))/2$, et il existe z_0 tel que $v(z_0^2 + u) \geq v(2) - v(\alpha) = 2v(2) - v(\Delta)/2$. Nous avons alors $v(\Delta) < 0$ ainsi que $v(2\alpha z_0 + 1) < 0$, et nous sommes dans le troisième cas du théorème 1.1.

La démonstration du théorème 1.2 est ainsi achevée.

4. Une question de John Milnor

Dans son livre [M] sur la dynamique holomorphe, John Milnor pose la question suivante :

Question : le polynôme $P(z) = z^2 - 3/2$ admet-il, dans $\mathbf{C}$, un point périodique attractif ?

Nous conjecturons qu'il n'en admet pas, et donc que P est un exemple explicite non trivial de polynôme réel non hyperbolique. Notre étude des polynômes quadratiques sur les corps locaux permet, non de démontrer cette conjecture, mais de montrer qu'elle est essentiellement de nature globale, et d'un énoncé qui rappelle celui de la conjecture de Lehmer.

Commençons par remarquer que pour tout corps local de caractéristique résiduelle impaire, on a $P \in \mathcal{O}_K[z]$, et ainsi P n'a, sur un tel corps, aucun point périodique répulsif (cela n'est pas vrai pour des polynômes de degré plus grand, comme le montre l'exemple $P(z) = p^2 z^3 - z^2$). Si maintenant $\mathbf{K}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_2$, alors $v(\Delta) = 0$. Le théorème 1.2 implique alors que, dans ce cas non plus, P n'a aucun point périodique répulsif. Les points périodiques répulsifs de P sont donc tous dans $\mathbf{C}$ si l'on adopte un point de vue « adélique ». Soit $z \in \mathbf{C}$ un point périodique de période n, et de multiplicateur $\lambda = (f^n)'(z)$. Les nombres z et λ sont algébriques, et donc redevables de la formule du produit : soit $\mathbf{K}$ une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}$ contenant z (et donc λ), et $\mathcal{P}_K$ l'ensemble des places de $\mathbf{K}$. On sait que

$$1 = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} |\lambda|_v^{n_v},$$

où n_v est le degré de l'extension locale en v. Ce produit se décompose en un produit sur les places non-archimédiennes de $\mathbf{K}$, pour lesquelles tous les termes vérifient $|\lambda|_v \leq 1$, et un produit sur les places archimédiennes. De la sorte,

$$\prod_{v|\infty} |\lambda|_v^{n_v} = |N_{\mathbf{Q}[\lambda]:\mathbf{Q}}(\lambda)| \geq 1.$$

Cela ne répond bien sûr pas à la question de John Milnor, mais indique tout de même que tout point périodique de P sur $\mathbf{C}$ a un multiplicateur de norme canonique plus grande que 1. Notons pour finir que P fournit un exemple de polynôme P_c avec $|c|_v > 1$ et d'ensemble de Julia vide sur toute extension de $\mathbf{Q}_2$, en contraste frappant avec ce qui se passe en caractéristique résiduelle impaire.

Remerciements. Le premier auteur bénéficie du soutien du NSA Young Investigator Grant H98230-05-1-0057. Les deux derniers auteurs voudraient remercier le CRM de Barcelone–Bellaterra, Espagne, pour son hospitalité. Enfin le deuxième auteur remercie Liang-Chung Hsia pour les nombreuses discussions qui ont été à la source de ce travail, ainsi que le NCTS de Hsinchu, Taiwan, pour son hospitalité.

Références

[A] E. Artin, *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.* Gordon and Breach, New-York 1967.

[BH] M. Baker et L-C. Hsia, *Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics.* J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 61–92.

[Be1] R. Benedetto, *Fatou Components in p-adic Dynamics.* Thesis, Brown University, 1998.

[Be2] R. Benedetto, *Reduction, dynamics, and Julia sets of rational functions.* J. Number Theory **86** (2001), 175–195.

[B1] J-P. Bézivin, *Sur les points périodiques des applications rationnelles en dynamique ultramétrique.* Acta Arithmetica **100** (2001), 63–74.

[B2] J-P. Bézivin, *Sur la compacité des ensembles de Julia des polynômes p-adiques.* Math. Z. **246** (2004), 273–289.

[BCSS] L. Blum, F. Cucker, M. Shub et S. Smale, *Complexity And Real Computation.* Spinger Verlag, Berlin 1998.

[BY1] M. Braverman et M. Yampolsky, *Non-computable Julia sets.* J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 3, 551–578.

[BY2] M. Braverman et M. Yampolsky, *On computability of Julia sets : answers to questions of Milnor and Shub.* Preprint 2006.

[De] J. Denef, *p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition.* J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 154–166.

[DH] A. Douady et J. H. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **294** (1982), 123–126.

[D] V. A. Dremov, *On a p-adic Julia set.* Russian Math. Surveys **58** (2003), 1194–1195.

[FR] C. Favre et J. Rivera–Letelier, *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **339** (2004), 271–276.

[H1] L-C. Hsia, *A weak Néron model with applications to p-adic dynamical systems.* Compositio Math. **100** (1996), 277–304.

[H2] L-C. Hsia, *Closure of periodic points over a non archimedean field.* J. London. Math. Soc. **62** (2000), 685-700.

[J] M. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one parameter families of one-dimensional maps.* Comm. Math. Phys. **81** (1981), 161–185.

[Jo] R. Jones, *Galois martingales and the hyperbolic subset of the p-adic Mandelbrot set.* PhD thesis (2005), Brown University.

[L] M. Lyubich, *Almost every real quadratic map is either regular or stochastic.* Ann. of Math. **156** (2002), 1–78.

[M] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[MS] P. Morton et J. Silverman, *Periodic points, multiplicities, and dynamical units.* J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 81–122.

[Na] W. Narkiewicz, *Polynomial Mappings.* Lecture Notes in Mathematics **1600** (1995), Springer Verlag, Berlin.

[NR] M. Nevins et T. Rogers, *Quadratic maps as dynamical systems on the p-adic numbers.* Prépublication (2000).

[No] D. G. Northcott, *Periodic points on an algebraic variety.* Ann. of Math. **51** (1950), 167–177.

[P] T. Pezda, *Polynomial cycles in certain local domains.* Acta Arithmetica **66** (1994), 11–22.

[R] J. RIVERA–LETELIER, *Dynamique des fractions rationnelles sur les corps locaux*, dans *Geometric Methods in Dynamics, II.* Astérisque **287** (2003), 199-231.

[TVW] E. THIRAN, D. VERSTEGEN, J. WEYERS, *p-adic dynamics*. J. Stat. Phys. **54** (1989), 893–913.

[W] A. WEIL, *Basic Number Theory*. Die Grundlehren des mathematischen Wissenschaften **144** (1967), Springer Verlag, Berlin.

[WS] C. WOODCOCK ET N. SMART, *p-adic chaos and random number generation*. Experiment. Math. **7** (1998), 333–342.

Robert BENEDETTO
Department of Mathematics and Computer Science
Amherst College, P. O. Box 5000
Amherst, MA 01002-5000, USA
E-mail: rlb@cs.amherst.edu

Jean-Yves BRIEND
Université de Provence
Laboratoire Analyse, Topologie, Probabilités, UMR CNRS 6632
39 rue Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, FRANCE
E-mail: briend@cmi.univ-mrs.fr

Hervé PERDRY
INSERM U535, Université Paris-Sud
Pavillon Leriche Secteur Jaune - Porte 18
BP 1000, 94817 Villejuif Cedex, France
E-mail: perdry@vjf.inserm.fr