

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Pascal AUTISSIER

**Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur**

Tome 18, n° 1 (2006), p. 1-12.

[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2006\\_\\_18\\_1\\_1\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2006__18_1_1_0)

© Université Bordeaux 1, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur

par PASCAL AUTISSIER

RÉSUMÉ. On montre dans cet article que le théorème d'équidistribution de Szpiro-Ullmo-Zhang concernant les suites de petits points sur les variétés abéliennes s'étend au cas des suites de sous-variétés. On donne également une version quantitative de ce résultat.

ABSTRACT. In this paper, the equidistribution theorem of Szpiro-Ullmo-Zhang about sequences of small points in an abelian variety is extended to the case of sequences of higher dimensional subvarieties. A quantitative version of this result is also given.

## 1. Introduction

Dans ce texte, on appelle **variété** sur un corps  $K$  tout schéma intègre et projectif sur  $K$ .

Commençons par rappeler les travaux de Szpiro, Ullmo et Zhang sur l'équidistribution des petits points (*cf* [17]) :

**Définition.** Soit  $V$  une variété sur  $\mathbb{Q}$ . Une suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  de fermés intègres de  $V$  est dite **générique** dans  $V$  lorsque pour tout fermé  $Z \neq V$ , l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \subset Z\}$  est fini.

Soit  $K$  un corps de nombres de degré  $N$ . Notons  $G_K$  l'ensemble des plongements  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $A$  une variété abélienne sur  $K$  de dimension  $d$ . Remarquons que  $A(\mathbb{C})$  est alors l'union disjointe des groupes  $A_\sigma(\mathbb{C})$ . Soit  $\mu$  la mesure de probabilité sur  $A(\mathbb{C})$  égale sur chaque  $A_\sigma(\mathbb{C})$  à la mesure de Haar de masse  $1/N$ .

Soit  $\hat{h}_L$  la hauteur de Néron-Tate relativement à un faisceau inversible  $L$  symétrique et ample sur  $A$ . Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  une suite de points fermés de  $A$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $k_n = \deg(P_n) = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$ .

Lorsque  $Z$  est un fermé réduit de  $A_{\mathbb{C}}$  purement de codimension  $q$ , on désigne par  $\delta_Z$  le courant d'intégration sur  $Z(\mathbb{C})$  (c'est un  $(q; q)$ -courant sur  $A(\mathbb{C})$ ).

Szpiro, Ullmo et Zhang ont démontré le théorème d'équirépartition suivant :

**Théorème 1.1.** *Supposons que la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(P_n) = 0$ . Alors la suite de mesures  $\left(\frac{1}{k_n} \delta_{P_{n\mathbb{C}}}\right)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $\mu$ .*

Ce résultat a permis à Ullmo [18] et Zhang [20] de prouver la conjecture de Bogomolov (cf aussi [1]).

On étend ici le théorème 1.1 aux suites génériques de sous-variétés :

Soit  $\|\cdot\|$  une "métrique du cube" (cf [12]) sur  $L_{\mathbb{C}}$ . Notons  $\omega$  la  $(1; 1)$ -forme de courbure de  $(L_{\mathbb{C}}; \|\cdot\|)$  sur  $A(\mathbb{C})$  et posons  $k = \deg_L(A)$ . Remarquons que l'on a  $\omega^{\wedge d} = k\mu$  sur  $A(\mathbb{C})$ .

Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de fermés intègres de  $A$  de dimension  $p$ . On pose  $k_n = \deg_L(Y_n)$  pour tout  $n \geq 0$ . On prouve le résultat suivant :

**Théorème 1.2** (5.1). *Supposons que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$ . Alors la suite de mesures  $\left(\frac{1}{k_n} \omega^{\wedge p} \wedge \delta_{Y_{n\mathbb{C}}}\right)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $\mu$ .*

La démonstration s'inspire de celle du théorème 1.1. Elle se place donc dans le cadre de la théorie d'Arakelov (cf [5]), et utilise le théorème de "Hilbert-Samuel arithmétique" dû à Gillet et Soulé [9] (cf aussi Abbes et Bouche [2]).

Remarquons en particulier que si  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$  et si  $U$  est un ouvert non vide de  $A(\mathbb{C})$  disjoint de  $Y_{n\mathbb{C}}$  pour tout  $n$  assez grand, alors on a  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) > 0$ . On peut donner une version quantitative de ce résultat :

**Théorème 1.3** (7.1). *On suppose la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  générique dans  $A$ . Soit  $U_\eta$  une boule ouverte de  $A(\mathbb{C})$  de rayon  $\eta \in ]0; \eta_0[$  telle que  $U_\eta$  soit disjoint de son conjugué complexe. On suppose que  $U_\eta$  et  $Y_{n\mathbb{C}}$  sont disjoints pour tout  $n \geq 0$ . Alors on a  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \eta^{2d+2}$  ( $\eta_0$  et  $c_0$  sont des constantes ne dépendant que de  $(K; A; L; p)$ ).*

Par ailleurs, Zhang a proposé une généralisation de la conjecture de Bogomolov (cf [19]) :

Soient  $V$  une variété lisse sur  $\mathbb{Q}$  et  $L$  un faisceau inversible ample sur  $V$ . Supposons que l'on a un morphisme fini  $f : V \rightarrow V$  et un isomorphisme  $L^{\otimes m} \simeq f^*L$ , où  $m$  est un entier  $> 1$ .

**Définition.** Un fermé intègre  $Y$  de  $V$  est dit **préperiodique** lorsque l'ensemble  $\{f^n(Y) ; n \in \mathbb{N}\}$  est fini.

Lorsque l'on a de telles données, Zhang a montré comment obtenir une hauteur canonique  $\hat{h}_L$  généralisant la construction de Néron-Tate. En particulier, la fonction  $\hat{h}_L$  est positive ; si un fermé intègre  $Y$  de  $V$  est prépériodique, alors on a  $\hat{h}_L(Y) = 0$  ; et un point fermé  $P$  est prépériodique si et seulement si  $\hat{h}_L(P) = 0$ .

Dans cette situation, la conjecture de Zhang s'énonce ainsi :

**Conjecture (i).** Soit  $Y$  un fermé intègre de  $V$ . Si  $\hat{h}_L(Y) = 0$ , alors  $Y$  est prépériodique.

Zhang a montré que  $\hat{h}_L(Y) = 0$  si et seulement si  $Y$  contient une suite de points fermés  $(P_n)_{n \geq 0}$  générique dans  $Y$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(P_n) = 0$ . En particulier, si  $Y$  contient un ensemble Zariski-dense de points fermés prépériodiques, alors  $Y$  est conjecturalement prépériodique.

Ce dernier énoncé, qui ne fait plus intervenir de hauteur, rappelle une conjecture de dynamique complexe :

**Conjecture (ii).** Soient  $M$  une variété lisse sur  $\mathbb{C}$  et  $f : M \rightarrow M$  un morphisme fini. On suppose qu'il existe un faisceau inversible  $L$  ample sur  $M$  tel que  $L^{\otimes m} \simeq f^*L$  avec  $m > 1$ . Si un fermé intègre  $Y$  de  $M$  contient un ensemble Zariski-dense de points prépériodiques, alors  $Y$  est prépériodique.

Cette conjecture "s'applique" en particulier au cas où  $M$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$  et  $f$  un morphisme fini de degré  $> 1$  (on prend alors  $L = \mathcal{O}(1)$ ).

Par ailleurs, lorsque  $M$  est une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$  et  $f$  la multiplication par un entier  $> 1$ , la conjecture (ii) est un théorème de Raynaud (*cf* [15]).

Pour attaquer la conjecture (i), on pourrait commencer par prouver un résultat d'équidistribution des petits points analogue au théorème 1.1. La mesure limite  $\mu$  serait alors la mesure à l'équilibre du système dynamique  $(V_{\mathbb{C}}; f_{\mathbb{C}})$ .

La difficulté de cette approche est que l'on est amené, semble-t-il, à utiliser un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique sans hypothèse de positivité de la courbure, qui n'est connu que pour les surfaces arithmétiques (*cf* propositions 3.3.3 et 4.1.4 de [3]).

Je remercie Serge Cantat et Antoine Chambert-Loir pour de fructueuses conversations et pour leurs conseils concernant ce papier. Je remercie également Emmanuel Ullmo pour l'inspiration qu'il m'a procurée.

## 2. Définitions et notations

Soient  $M$  une variété lisse sur  $\mathbb{C}$  et  $L$  un faisceau inversible sur  $M$ .

**Définition.** Une **métrique** sur  $L$  est une famille  $\| \cdot \|$  de normes hermitiennes sur  $L$  variant de manière continue sur  $M(\mathbb{C})$ . Posons  $\hat{L} = (L; \| \cdot \|)$ .

On note  $\omega_{\widehat{L}}$  le  $(1; 1)$ -courant de courbure de  $\widehat{L}$  sur  $M(\mathbb{C})$  ; il est caractérisé par la propriété suivante : pour toute section rationnelle  $s$  non nulle de  $L$ , on a l'égalité  $\omega_{\widehat{L}} = \delta_{\text{div}(s)} - \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \ln \|s\|$ .

**Définition.** Soit  $\|\cdot\|$  une métrique sur  $L$  ; posons  $\widehat{L} = (L; \|\cdot\|)$ . On dit que  $\|\cdot\|$  est **p.s.h.** lorsque le courant  $\omega_{\widehat{L}}$  est positif, autrement dit lorsque pour tout ouvert  $U$  de  $M$  et tout  $s \in \Gamma(U; L)$  ne s'annulant pas sur  $U$ , la fonction  $-\ln \|s\|$  est plurisousharmonique sur  $U(\mathbb{C})$ .

**Définition.** Une **variété arithmétique** est un schéma  $X$  intègre, projectif et plat sur  $\mathbb{Z}$ , tel que la fibre générique  $X_{\mathbb{Q}}$  soit lisse sur  $\mathbb{Q}$ . Remarquons que  $X_{\mathbb{C}}$  est alors l'union disjointe de variétés lisses sur  $\mathbb{C}$ .

Un **faisceau inversible hermitien** sur  $X$  est un couple  $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\cdot\|)$ , formé d'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et d'une métrique  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$  invariante par conjugaison complexe.

**Remarque.** Soit  $Y$  un schéma intègre et projectif sur  $\mathbb{Z}$ . On a deux possibilités :

- $Y$  est plat et surjectif sur  $B_0 = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  ;  $Y$  est alors dit horizontal ;
- $Y$  est au-dessus d'un point fermé  $b = p\mathbb{Z}$  de  $B_0$  (ie  $Y$  est une variété sur  $\mathbb{F}_p$ ) ;  $Y$  est alors dit vertical.

### 3. Théorie d'Arakelov

Soient  $X$  une variété arithmétique de dimension (absolue)  $d$ , et  $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\cdot\|)$  un faisceau inversible hermitien sur  $X$  dont la métrique  $\|\cdot\|$  est  $C^\infty$ . Pour  $0 \leq p \leq d$ , on désigne par  $Z_p(X)$  le groupe des combinaisons  $\mathbb{Z}$ -linéaires de fermés intègres (de  $X$ ) de dimension  $p$ .

Faisons quelques rappels de la théorie des hauteurs développée par Bost, Gillet et Soulé :

Pour  $0 \leq p \leq d$ , on définit (cf [9] p. 485, [5] p. 933) le groupe de Chow arithmétique de dimension  $p$ , noté  $\widehat{\text{CH}}_p(X)$ . Le degré arithmétique définit une application  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $\widehat{\text{deg}} : \widehat{\text{CH}}_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $1 \leq p \leq d$ , on construit la première classe de Chern arithmétique  $\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}}) : \widehat{\text{CH}}_p(X) \rightarrow \widehat{\text{CH}}_{p-1}(X)$ , qui est  $\mathbb{Z}$ -linéaire.

Soient maintenant  $p \in \{0; \dots; d\}$  et  $D \in Z_p(X)$ . Soit  $g$  un courant de Green pour  $D_{\mathbb{C}}$ . Le réel

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \widehat{\text{deg}} \left[ \widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})^p(D; g) - (0; \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}^{\wedge p} \wedge g) \right]$$

ne dépend pas du choix de  $g$ . On l'appelle la **hauteur d'Arakelov** de  $D$  relativement à  $\widehat{\mathcal{L}}$ .

Soit  $Y$  un fermé intègre horizontal de dimension  $p$  tel que  $\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}}) > 0$ . La **hauteur normalisée** de  $Y$  relativement à  $\widehat{\mathcal{L}}$  est le réel

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}})p} \quad .$$

**Proposition 3.1.** *Soient  $Y$  un fermé intègre de  $X$  de dimension  $p \geq 1$ ,  $n$  un entier  $\geq 1$ , et  $s$  une section rationnelle non nulle de  $\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}$  (sur  $Y$ ). Alors on a l'égalité*

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s)) - \int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1}$$

(On convient que l'intégrale est nulle si  $Y$  est vertical).

*Démonstration.* C'est la proposition 3.2.1 (iv) de [5] p. 949.  $\square$

Le résultat suivant est un analogue arithmétique du théorème de Hilbert-Samuel :

**Théorème 3.1.** *Supposons  $\mathcal{L}$  ample et la métrique  $\| \cdot \|$  p.s.h.. Soit  $\epsilon > 0$ . Alors pour tout entier  $n$  assez grand, il existe une section globale  $s$  non nulle de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  telle que  $\max_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \leq \epsilon n - h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)n$ .*

*Démonstration.* cf théorème 9 de [9] p. 539 ou corollaire du théorème principal de [2].  $\square$

## 4. Hauteurs

### 4.1. Hauteurs de Weil.

Soient  $V$  une variété lisse sur  $\mathbb{Q}$  et  $L$  un faisceau inversible ample sur  $V$ . Notons  $V^{\diamond}$  l'ensemble des fermés intègres de  $V$ .

**Définition.** Un **modèle entier** de  $(V; L)$  est un couple  $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ , formé d'une variété arithmétique  $X$  et d'un faisceau inversible hermitien  $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \cdot \|)$  sur  $X$  tels que  $(X_{\mathbb{Q}}; \mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$  soit isomorphe à  $(V; L)$ , que  $\mathcal{L}$  soit ample sur  $X$ , que la métrique  $\| \cdot \|$  soit  $C^{\infty}$ , et que la courbure  $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$  soit définie positive sur  $X(\mathbb{C})$ .

Remarquons que pour tout entier  $e$  assez grand, le couple  $(V; L^{\otimes e})$  admet un modèle entier.

La définition suivante étend aux sous-variétés la notion classique de hauteur de Weil sur les points :

**Définition.** Une application  $\hat{h} : V^{\diamond} \rightarrow \mathbb{R}$  est une **hauteur de Weil** relativement à  $L$  lorsqu'il existe un entier  $e \geq 1$ , un modèle entier  $(X; \widehat{\mathcal{L}})$  de  $(V; L^{\otimes e})$  et un réel  $C$  tels que

$$\forall Y \in V^{\diamond} \quad \left| \hat{h}(Y) - \frac{1}{e} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \right| \leq C$$

( $\overline{Y}$  désigne l'adhérence de  $Y$  dans  $X$ ).

La proposition suivante montre entre autres que cette définition “ne dépend pas du choix de  $(e; X; \widehat{\mathcal{L}})$ ” :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\hat{h}$  une hauteur de Weil relativement à  $L$ . Alors pour tout entier  $e \geq 1$  et tout modèle entier  $(X; \widehat{\mathcal{L}})$  de  $(V; L^{\otimes e})$ , il existe un réel  $C$  tel que  $\forall Y \in V^\diamond \quad \left| \hat{h}(Y) - \frac{1}{e} \hat{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \right| \leq C$ .*

*En outre, la fonction  $\hat{h}$  est minorée sur  $V^\diamond$ .*

*Démonstration.* La première partie de l'énoncé est une reformulation de la proposition 3.2.2 de [5] p. 950. La deuxième partie se déduit de la remarque (iii) de [5] p. 954.  $\square$

#### 4.2. Hauteur canonique.

Soient  $V$  une variété lisse sur  $\mathbb{Q}$  et  $L$  un faisceau inversible ample sur  $V$ . On suppose que l'on a un morphisme fini  $f : V \rightarrow V$  et un isomorphisme  $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^*L$ , où  $m$  est un entier  $> 1$ .

À partir de ces données, Zhang construit une hauteur de Weil particulière relativement à  $L$  par un procédé dynamique :

**Proposition 4.2.** *Il existe une unique hauteur de Weil  $\hat{h}_L$  relativement à  $L$  telle que pour tout  $Y \in V^\diamond$ , on ait l'égalité  $\hat{h}_L(f(Y)) = \hat{h}_L(Y)m$ .*

*De plus, on a les propriétés suivantes :*

- Si  $\hat{h}$  est une hauteur de Weil relativement à  $L$ , alors la suite de fonctions  $\left( \frac{1}{m^n} \hat{h} \circ f^n \right)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $V^\diamond$  vers la fonction  $\hat{h}_L$  ;
- La fonction  $\hat{h}_L$  est positive sur  $V^\diamond$  ;
- Si  $Y$  est un fermé intègre prépériodique de  $V$ , alors on a  $\hat{h}_L(Y) = 0$  ;
- Un point fermé  $P$  de  $V$  est prépériodique si et seulement si  $\hat{h}_L(P) = 0$ .

*Démonstration.* C'est une reformulation du théorème 2.4 de [19] p. 292.  $\square$

L'application  $\hat{h}_L$  est appelé la **hauteur canonique** relativement à  $(L; f)$ . Remarquons qu'elle ne dépend pas du choix de l'isomorphisme  $\alpha$ .

### 5. Équidistribution

Soit  $K$  un corps de nombres de degré  $N$ . Soient  $A$  une variété abélienne sur  $K$  de dimension  $d$  et  $0_A \in A(K)$  sa section neutre. Pour tout entier non nul  $c$ , on note  $[c] : A \rightarrow A$  le morphisme de multiplication par  $c$ .

Soit  $L$  un faisceau inversible symétrique (ie  $[-1]^*L \simeq L$ ) et ample sur  $A$ . On fixe un isomorphisme  $0_A^*L \simeq \mathcal{O}_B$  sur  $B = \text{Spec}(K)$ . Par le théorème du cube, on en déduit naturellement un isomorphisme  $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$  sur  $A$  pour chaque entier  $c \geq 2$ .

La hauteur canonique  $\hat{h}_L$  relativement à  $(L; [c])$  ne dépend pas du choix de l'entier  $c \geq 2$ ; c'est la **hauteur de Néron-Tate** relativement à  $L$  (cf aussi [13] et [10]).

On fixe un entier  $c \geq 2$ . D'après [12] p. 50-52, il existe une unique métrique  $\| \cdot \|$  de classe  $C^\infty$  sur  $L_{\mathbb{C}}$  telle que l'isomorphisme  $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$  devienne une isométrie (ie une "métrique du cube").

Notons  $\omega$  la courbure de  $(L_{\mathbb{C}}; \| \cdot \|)$ ; posons  $k = \deg_L(A)$  et  $\mu = \frac{1}{k}\omega^d$ . Pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la mesure  $\mu_\sigma$  est alors la mesure de Haar de masse  $1/N$  sur  $A_\sigma(\mathbb{C})$ .

Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de fermés intègres de  $A$  de dimension  $p$ . On pose  $k_n = \deg_L(Y_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Théorème 5.1.** *Supposons que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$ . Alors la suite de mesures  $\left( \frac{1}{k_n} \omega^p \delta_{Y_{n\mathbb{C}}} \right)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $\mu$ .*

*Démonstration.* Posons  $\nu_n = \frac{1}{k_n} \omega^p \delta_{Y_{n\mathbb{C}}}$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Il s'agit de montrer que pour toute fonction  $\phi$  continue sur  $A(\mathbb{C})$ , la suite numérique  $\left( \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right)_{n \geq 0}$  converge vers  $\int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$ .

Il suffit en fait de le vérifier pour  $\phi$  invariante par conjugaison complexe et  $C^\infty$  sur  $A(\mathbb{C})$ . Il existe alors un réel  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $t \in [-t_0; t_0]$ , la  $(1; 1)$ -forme  $\omega_t = \omega + \frac{it}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$  soit positive sur  $A(\mathbb{C})$ . Soient  $t \in [-t_0; t_0]$  et  $\epsilon > 0$ .

On choisit un entier  $e \geq 1$  et un modèle  $(X; \hat{\mathcal{L}})$  de  $(A; L^{\otimes e})$  tels que la métrique sur  $\mathcal{L}$  soit la métrique du cube  $\| \cdot \|_{\otimes^e}$ .

Pour tout  $Y \in A^\circ$ , on pose  $\hat{h}(Y) = \frac{1}{e} h'_{\hat{\mathcal{L}}}(\bar{Y})$ , où  $\bar{Y}$  désigne l'adhérence de  $Y$  dans  $X$ . L'application  $\hat{h}$  est par définition une hauteur de Weil relativement à  $L$ . D'après la proposition 4.2, il existe  $n_1 \geq 0$  tel que  $|\hat{h} \circ [c^{n_1}] - c^{2n_1} \hat{h}_L| \leq c^{2n_1} \epsilon$  sur  $A^\circ$ . On pose  $e_1 = c^{2n_1} e$ .

On construit un modèle  $(X'; \hat{\mathcal{L}}')$  de  $(A; L^{\otimes e_1})$  de la manière suivante :

On désigne par  $f : X' \rightarrow X$  la normalisation de  $X$  par le morphisme  $[c^{n_1}] : A \rightarrow A$ , de sorte que l'on a  $f_{\mathbb{Q}} = [c^{n_1}]$  sur  $X'_{\mathbb{Q}} \simeq A$ . On pose alors  $\hat{\mathcal{L}}' = (\mathcal{L}'; \| \cdot \|') = f^* \hat{\mathcal{L}}$ .

Par la formule de projection (cf proposition 3.2.1 (iii) de [5] p. 949), on a, pour tout  $Y \in A^\circ$ , la relation  $\hat{h}([c^{n_1}](Y))e = h'_{\hat{\mathcal{L}}'}(\bar{Y}')$ , où  $\bar{Y}'$  désigne l'adhérence de  $Y$  dans  $X'$ . On en déduit :

$$(5.1) \quad \forall Y \in A^\circ \quad \left| \hat{h}_L(Y) - \frac{1}{e_1} h'_{\hat{\mathcal{L}}'}(\bar{Y}') \right| \leq \epsilon \quad .$$

On pose  $\| \|\prime_t = \| \|\prime \exp(-e_1 t \phi)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}'_t = (\mathcal{L}'; \| \|\prime_t)$ . Par multilinéarité, on a la formule

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') - h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X') = (d+1)e_1^{d+1}kt^2Q(t) + (d+1)e_1^{d+1}t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \omega^d \quad ,$$

où  $Q(T) = \sum_{j=1}^d \frac{C_{d+1}^{j+1}}{(d+1)k} T^{j-1} \int_{A(\mathbb{C})} \phi \left( \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi \right)^j \omega^{d-j}$  est un polynôme en  $T$ .

Sachant que  $\hat{h}_L(A) = 0$ , on en déduit à l'aide de (5.1) la minoration

$$(5.2) \quad \frac{1}{e_1} h'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') \geq t^2 Q(t) - \epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

Maintenant, appliquons le théorème 3.2 (Hilbert-Samuel arithmétique) : il existe  $n_2 \geq 1$  et  $s \in \Gamma(X'; \mathcal{L}'^{\otimes n_2}) - \{0\}$  tels que  $\max_{A(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t \leq \epsilon n_2 - h'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') n_2$ .

Posons  $Z = \text{div}(s_{\mathbb{Q}})$ . Puisque la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$ , il existe un entier  $n_3 \geq 0$  tel que  $\forall n \geq n_3 \ Y_n \not\subset Z$ . Alors, d'après la proposition 3.1, on a (pour tout  $n \geq n_3$ ) :

$$\begin{aligned} h_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') n_2 - h_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\text{div}(s_{|\overline{Y_n}'}) ) &= -e_1^p \int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_2 e_1 t \phi + \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t) \omega^p \\ &\geq [h'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') - \epsilon] e_1^p n_2 k_n - e_1^{p+1} n_2 k_n t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \quad . \end{aligned}$$

Majorons le premier membre : En utilisant (5.1) et la positivité de  $\hat{h}_L$ , on obtient d'une part l'inégalité  $h_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\text{div}(s_{|\overline{Y_n}'}) ) \geq -e_1^{p+1} p n_2 k_n \epsilon$  et d'autre part l'inégalité  $h_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') \leq [\hat{h}_L(Y_n) + \epsilon] (p+1) e_1^{p+1} k_n$ . On en déduit à l'aide de la minoration (5.2) que l'on a (pour tout  $n \geq n_3$ ) :

$$(5.3) \quad (p+1) \hat{h}_L(Y_n) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq t^2 Q(t) - (2p+3)\epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  puis  $\epsilon$  vers 0 dans ce qui précède ; sachant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$ , on trouve l'inégalité

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \geq t^2 Q(t) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

Finalement, en faisant tendre  $t$  vers 0 :

- Par valeurs supérieures, on obtient  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \geq \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$  ;
- Par valeurs inférieures, on obtient  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \leq \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$ .

On en déduit le résultat.  $\square$

## 6. Variante arakelovienne

Soient  $X$  une variété arithmétique de dimension  $d$  et  $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\cdot\|)$  un faisceau inversible hermitien sur  $X$ . On suppose que  $\mathcal{L}$  est ample sur  $X$ , que la métrique  $\|\cdot\|$  est  $C^\infty$ , et que la courbure  $\omega = \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_C}$  est définie positive sur  $X(\mathbb{C})$ . Le couple  $(X; \widehat{\mathcal{L}})$  est donc un modèle entier de  $(X_{\mathbb{Q}}; \mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ .

Posons  $k = \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}})$  et  $\mu = \frac{1}{k}\omega^{d-1}$ . Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de fermés intègres de  $X_{\mathbb{Q}}$  de dimension  $p$ . On pose  $k_n = \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

On fait l'hypothèse (\*) suivante : pour tout fermé intègre  $Y$  de  $X_{\mathbb{Q}}$  de dimension  $p-1$ , on a  $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \geq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$ .

Remarquons que cette hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque  $p = 0$ .

**Proposition 6.1.** *Supposons que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $X_{\mathbb{Q}}$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}_n) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$ . Alors la suite de mesures  $\left(\frac{1}{k_n}\omega^p \delta_{Y_n(\mathbb{C})}\right)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $\mu$ .*

*Démonstration.* Posons  $\nu_n = \frac{1}{k_n}\omega^p \delta_{Y_n(\mathbb{C})}$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Soit  $\phi$  une fonction invariante par conjugaison complexe et  $C^\infty$  sur  $X(\mathbb{C})$ . Il existe un réel  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $t \in [-t_0; t_0]$ , la  $(1; 1)$ -forme  $\omega_t = \omega + \frac{it}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$  soit positive sur  $X(\mathbb{C})$ .

Soient  $t \in [-t_0; t_0]$  et  $\epsilon > 0$ . On pose  $\|\cdot\|_t = \|\cdot\| \exp(-t\phi)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\mathcal{L}; \|\cdot\|_t)$ . Par multilinéarité, on a la relation

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) - h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = dkt^2 Q(t) + dt \int_{X(\mathbb{C})} \phi \omega^{d-1} \quad ,$$

où  $Q$  est une fonction polynomiale.

D'après le théorème 3.2, il existe  $n_1 \geq 1$  et  $s \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n_1}) - \{0\}$  tels que  $\max_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_t \leq \epsilon n_1 - h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) n_1$ .

Posons  $Z = \text{div}(s_{\mathbb{Q}})$ . La suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  étant générique dans  $X_{\mathbb{Q}}$ , il existe un entier  $n_2 \geq 0$  tel que  $\forall n \geq n_2$   $Y_n \not\subset Z$ . Alors, en appliquant la proposition 3.1, on obtient (pour tout  $n \geq n_2$ ) :

$$\begin{aligned} h_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(\overline{Y}_n) n_1 - h_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(\text{div}(s|_{\overline{Y}_n})) &= - \int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_1 t \phi + \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_t) \omega^p \\ &\geq [h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) - \epsilon] n_1 k_n - n_1 k_n t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \nu_n \quad . \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (\*), on a la minoration  $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s|_{\overline{Y_n}})) \geq pm_1 k_n h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$ . On en déduit que pour tout  $n \geq n_2$ , on a

$$(p+1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n}) + t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq (p+1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) + t^2 Q(t) - \epsilon + t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

On conclut comme dans la démonstration du théorème 5.1.  $\square$

## 7. Version quantitative

Soient  $K$  un corps de nombres,  $A$  une variété abélienne sur  $K$  de dimension  $d$ , et  $L$  un faisceau inversible symétrique et ample sur  $A$ . Soit  $\| \cdot \|$  une métrique du cube sur  $L_{\mathbb{C}}$ . On note  $\omega$  la courbure de  $(L_{\mathbb{C}}; \| \cdot \|)$  et on pose  $k = \operatorname{deg}_L(A)$ .

On fixe un plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  et un isomorphisme  $A_{\sigma}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^d/\Gamma$  de groupes analytiques (où  $\Gamma$  est un réseau de  $\mathbb{C}^d$ ) tel que la  $(1;1)$ -forme  $\omega_{\sigma}$  s'écrive  $\omega_{\sigma} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^d dz_j \wedge d\bar{z}_j$  dans  $\mathbb{C}^d/\Gamma$ .

On munit  $\mathbb{C}^d$  de la norme hermitienne canonique, notée  $\| \cdot \|$ . Lorsque  $z \in \mathbb{C}^d$ , on note ici  $\dot{z}$  l'image de  $z$  dans  $\mathbb{C}^d/\Gamma$ . On munit  $\mathbb{C}^d/\Gamma$  de la distance  $D$  induite par  $\| \cdot \|$ , ie  $D(\dot{x}; \dot{y}) = \min_{\gamma \in \Gamma} \|x - y + \gamma\|$ . Par ailleurs, on pose

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \|\gamma\|.$$

Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de fermés intègres de  $A$  de dimension  $p$ . Posons  $c_0 = \frac{1}{(p+1)(d+1)k}$ . Soit  $U_{\eta}$  une boule ouverte de  $A_{\sigma}(\mathbb{C})$  de rayon  $\eta \in ]0; \eta_0[$ . Si  $\sigma$  est réel, on suppose  $U_{\eta}$  disjoint de son conjugué complexe.

**Théorème 7.1.** *On suppose que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $A$  et que  $Y_n_{\mathbb{C}}$  est disjoint de  $U_{\eta}$  pour tout  $n \geq 0$ . Alors on a  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \widehat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \eta^{2d+2}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\dot{z}_0$  le centre de  $U_{\eta}$  et  $U'_{\eta}$  le conjugué complexe de  $U_{\eta}$ . Soit  $\psi : ]0; \eta_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^{\infty}$  vérifiant :

- La fonction  $\psi$  est nulle sur  $[\eta; \eta_0[$ ;
- On a  $\psi' \geq -1$  et  $\psi'' \geq 0$  sur  $]0; \eta_0[$ .

Soit  $\phi : A(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction caractérisée par les propriétés suivantes :

- Si  $\|z - z_0\| < \eta$ , alors  $\phi(\dot{z}) = \frac{\pi}{2} \psi(\|z - z_0\|^2)$ ;
- La fonction  $\phi$  est invariante par conjugaison complexe ;
- La fonction  $\phi$  est nulle en dehors de  $U_{\eta} \cup U'_{\eta}$ .

La  $(1; 1)$ -forme  $\omega_1 = \omega + \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$  est alors positive sur  $A(\mathbb{C})$ . On reprend avec  $t_0 = t = 1$  la démonstration du théorème 5.1, jusqu'à l'inégalité (5.3) :

$$\forall n \geq n_3 \quad (p+1) \hat{h}_L(Y_n) + \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq Q_1 - (2p+3)\epsilon \quad ,$$

$$\text{où } Q_1 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^d \int_{A(\mathbb{C})} \phi \omega_1^j \omega^{d-j}.$$

L'intégrale dans le premier membre est nulle puisque  $Y_{n\mathbb{C}}$  et  $U_\eta$  sont disjoints. En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  puis  $\epsilon$  vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient donc la minoration  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq \frac{Q_1}{p+1}$ .

Par ailleurs, un calcul que j'épargne au lecteur montre que

$$Q_1 = \frac{4\pi^d}{k} \int_0^\eta \left[ 1 - \left( 1 + \psi'(r^2) \right)^{d+1} \right] r^{2d+1} dr \quad .$$

On a donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \int_0^\eta \left[ 1 - \left( 1 + \psi'(r^2) \right)^{d+1} \right] (2d+2) r^{2d+1} dr \quad .$$

Maintenant, soit  $\psi_0 : [0; \eta_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\psi_0(\rho) = \eta - \rho$  si  $\rho < \eta$  et  $\psi_0(\rho) = 0$  si  $\rho \geq \eta$ . En faisant tendre  $\psi$  vers  $\psi_0$  convenablement, on en déduit le résultat.  $\square$

## 8. Cas des courbes

Soient  $V$  une courbe lisse sur  $\mathbb{Q}$ ,  $L$  un faisceau inversible ample sur  $V$ ,  $f : V \rightarrow V$  un morphisme fini, et  $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^* L$  un isomorphisme, où  $m$  est un entier  $> 1$ .

Notons  $\mu$  la mesure à l'équilibre du système dynamique  $(V_{\mathbb{C}}; f_{\mathbb{C}})$ . Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  une suite de points fermés de  $V$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $k_n = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$ .

Citons pour mémoire la variante suivante de la proposition 4.1.4 de [3] :

**Proposition 8.1.** *Supposons que la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est générique dans  $V$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(P_n) = 0$ . Alors la suite de mesures  $\left( \frac{1}{k_n} \delta_{P_{n\mathbb{C}}} \right)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $\mu$ .*

Ce résultat s'applique en particulier au cas où  $V = \mathbb{P}_K^1$  (avec  $K$  un corps de nombres) et  $f$  de degré  $> 1$ .

## Bibliographie

- [1] A. ABBES, *Hauteurs et discrétude*. Astérisque **245** (1997), 141–166.
- [2] A. ABBES, T. BOUCHE, *Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”*. Annales de l’Institut Fourier **45** (1995), 375–401.
- [3] P. AUTISSIER, *Points entiers sur les surfaces arithmétiques*. Journal für die reine und angew. Math. **531** (2001), 201–235.
- [4] Y. BILU, *Limit distribution of small points on algebraic tori*. Duke Math. Journal **89** (1997), 465–476.
- [5] J.B. BOST, H. GILLET, C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*. Journal of the AMS **7** (1994), 903–1027.
- [6] G.S. CALL, J.H. SILVERMAN, *Canonical heights on varieties with morphisms*. Compositio Math. **89** (1993), 163–205.
- [7] S. CANTAT, *Endomorphismes des variétés homogènes*. Enseignement Math. **49** (2003), 237–262.
- [8] A. CHAMBERT-LOIR, *Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes*. Annales Scientifiques de l’ENS **33** (2000), 789–821.
- [9] H. GILLET, C. SOULÉ, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*. Inventiones Math. **110** (1992), 473–543.
- [10] W. GUBLER, *Höhentheorie*. Math. Annalen **298** (1994), 427–455.
- [11] V. MAILLOT, *Géométrie d’Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*. Mémoires de la SMF **80** (2000).
- [12] L. MORET-BAILLY, *Métriques permises*. Astérisque **127** (1985), 29–87.
- [13] P. PHILIPPON, *Sur des hauteurs alternatives I*. Math. Annalen **289** (1991), 255–283.
- [14] B. POONEN, *Mordell-Lang plus Bogomolov*. Inventiones Math. **137** (1999), 413–425.
- [15] M. RAYNAUD, *Sous-variétés d’une variété abélienne et points de torsion*. Progress in Math. **35** (1983), 327–352.
- [16] R. RUMELY, *On Bilu’s equidistribution theorem*. Contemporary Math. **237** (1999), 159–166.
- [17] L. SZPIRO, E. ULLMO, S. ZHANG, *Équirépartition des petits points*. Inventiones Math. **127** (1997), 337–347.
- [18] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*. Annals of Math. **147** (1998), 167–179.
- [19] S. ZHANG, *Small points and adelic metrics*. Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), 281–300.
- [20] S. ZHANG, *Equidistribution of small points on abelian varieties*. Annals of Math. **147** (1998), 159–165.

Pascal AUTISSIER

Université de Rennes I,

campus de Beaulieu,

35042 Rennes Cedex, France

*E-mail*: pascal.autissier@univ-rennes1.fr

*URL*: <http://name.math.univ-rennes1.fr/pascal.autissier/>