

K_2 et conjecture de Greenberg dans les \mathbb{Z}_p -extensions multiples

par THONG NGUYEN QUANG DO et DAVID VAUCLAIR

RÉSUMÉ. Pour un corps de nombres K contenant une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, nous proposons une condition suffisante, en termes de K_2 , pour la validité de la conjecture de Greenberg généralisée. Celle-ci s'applique pour les corps cyclotomiques vérifiant certaines conditions, par exemple $\mathbb{Q}(\mu_{37})$.

ABSTRACT. For a number field K containing a primitive p^{th} root of unity, we study a sufficient condition, in terms of K_2 , for the validity of Greenberg's generalized conjecture. This applies to cyclotomic fields $\mathbb{Q}(\mu_p)$ satisfying certain conditions, e.g. $\mathbb{Q}(\mu_{37})$.

1. Introduction

Soient p un nombre premier impair et K un corps de nombres ($[K : \mathbb{Q}] < \infty$).

1.1. Conjecture de Greenberg classique (G).

Soit K un corps totalement réel, et $K^c = \cup_n K_n$ sa \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique. On note A_n le p -Sylow du groupe des (p) -classes de K_n (c'est-à-dire le groupe des classes à support hors de (p)), $X(K^c) = \varprojlim A_n$, et $A(K^c) = \varinjlim A_n$. La conjecture de Greenberg classique ([4]) s'énonce ainsi :

Conjecture 1.1. (G) $X(K^c) \sim 0$ (*pseudo-nul, c'est-à-dire fini*) ou, de façon équivalente, $A(K^c) = 0$.

L'équivalence tient au fait bien connu suivant ([8]) :

$$X(K^c) \sim A(K^c)^\vee := \text{Hom}(A(K^c), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

1.2. Conjecture de Greenberg généralisée (GG).

Pour un corps de nombres K quelconque, on note \tilde{K} le composé de toutes ses \mathbb{Z}_p -extensions. Dans [5] Greenberg généralise sa conjecture de la façon suivante :

Conjecture 1.2. (GG) $X(\tilde{K}) \sim 0$, ou $A(\tilde{K}) = 0$.

On ne sait pas précisément si ces deux propriétés sont équivalentes. Moyennant quelques hypothèses de décomposition, l'équivalence est montrée dans [13] (mais avec une erreur, voir l'appendice pour l'équivalence sous certaines conditions).

Curieusement, on ne connaît pour (G) que des résultats numériques, alors qu'un résultat théorique a été obtenu pour (GG) et $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ par Mc Callum [13] (voir aussi Marshall [14]). Les hypothèses de Mc Callum et Marshall sont nombreuses, techniques et très fortes (elles entraînent la conjecture de Vandiver). On peut les condenser pour énoncer le "théorème" suivant :

Enoncé 1.3. *(MC) Si $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ et si $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(K)$ est cyclique d'ordre p , alors (GG) est vraie pour K .*

Ici $\mathcal{X}(K)$ est le groupe de Galois de la pro- p -extension (p) -ramifiée abélienne maximale de K .

Un point-clé de la démonstration de ce "théorème" est l'énoncé suivant :

Enoncé 1.4. *(MC') Si K contient μ_p et possède une seule (p) -place, le $\tilde{\Lambda}$ -module $\text{Gal}(\tilde{N}/\tilde{K})$ est sans $\tilde{\Lambda}$ -torsion.*

Ici \tilde{N} est l'extension de \tilde{K} obtenue par extraction de toutes les racines p^n -ièmes des (p) -unités de \tilde{K} .

En fait, en reprenant les méthodes de Mc Callum, il est possible de généraliser l'énoncé 1.3 de la façon suivante (voir appendice).

Proposition 1.1. *Si K vérifie la conjecture de Leopoldt, contient μ_p et possède une seule place au-dessus de p , si $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(K)$ est cyclique et si $G(\tilde{N}/\tilde{K})$ est sans $\tilde{\Lambda}$ -torsion, alors (GG) est vraie pour K dès que $A(K)$ capitule dans \tilde{K} .*

Malheureusement, la démonstration de 1.4 utilise de façon cruciale [15], Theorem 8, dont la preuve est erronée (et ne semble pas réparable par les seules méthodes de [15], voir appendice). Comme d'habitude, la difficulté provient des unités et des modules d'Iwasawa qui leur sont attachés, et dont la structure est mal contrôlée. En conséquence, la proposition 1.1 devient inintéressante et l'énoncé 1.3 incertain.

L'objectif principal de cet article est la démonstration du théorème 1.5 ci-dessous, qui remplace l'énoncé 1.1 et permettrait, si l'on connaissait un bon analogue du (p) -corps de Hilbert pour le noyau modéré, de retrouver un résultat proche de 1.3.

Théorème 1.5. *Si K contient μ_p , vérifie la conjecture de Leopoldt, et si $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(K)$ est cyclique, alors (GG) est vraie pour K dès que $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ capitule dans \tilde{K} .*

1.3. Principe.

Si l'on suppose que K contient μ_p , on sait que (GG) est équivalente à la nullité de $t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}(\tilde{K})$ (voir l'appendice et [13] ou [15]).

Le principe de départ est le même que dans [15] : Soit δ l'homomorphisme de codescente $\delta : t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}(\tilde{K})_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \mathcal{X}(K)$ (en fait, si K vérifie la conjecture de Leopoldt, on peut montrer que l'image de δ est contenue dans $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(K)$, voir le lemme 3.4). La nullité de $t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}(\tilde{K})$ est équivalente à la conjonction des deux propriétés suivantes :

(H1) : δ est injectif.

(H2) : δ est nul.

Les sections 2 et 3 étudient ces hypothèses et leurs analogues "tor-dues". La section 4 utilise ces résultats pour montrer le théorème 1.5 et un théorème de montée. En appendice, on prouve la proposition 1.1, et l'on complète la preuve de [13] pour l'équivalence des différentes formulations de (GG) sous les hypothèses adéquates.

Notations

K désigne un corps de nombres, **et l'on supposera toujours** $\mu_p \subset K$.

K^c la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de K .

L une \mathbb{Z}_p^s -extension de K , $s \geq 1$.

F/K une sous-extension finie de L/K .

\tilde{K} le composé de toutes les \mathbb{Z}_p -extensions de K .

$\Gamma^c = G(K^c/K)$.

$\Gamma = G(L/K)$.

$\tilde{\Gamma} = G(\tilde{K}/K)$.

$\Lambda^c = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^c]]$.

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$.

$\tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_p[[\tilde{\Gamma}]]$.

Pour un pro- p -groupe G , Λ_G est l'algèbre complète $\mathbb{Z}_p[[G]]$.

Si M est un R -module (R désigne \mathbb{Z}_p ou l'une des algèbres complètes définies ci-dessus), on note $t_R M$ sa torsion et $f_R M = M/t_R M$.

M^\vee désigne le dual de Pontryagin de M , ie. $M^\vee = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Si un groupe agit à gauche sur M , on munit M^\vee de l'action à gauche habituelle $(\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x))$.

$A(F)$ le p -groupe des (p) -classes d'idéaux, $A(L) = \varinjlim A(F)$.

$X(F)$ le pro- p -groupe de Galois (p) -ramifié, (p) -décomposé abélien maximal, $X(L) = \varinjlim X(F)$.

$\mathcal{O}'_F = \mathcal{O}_F[\frac{1}{p}]$ l'anneau des (p) -entiers de F .

$X^{(2)}(L) = \varinjlim K_2 \mathcal{O}'_F \{p\}$.

$G_S(F)$ le pro- p -groupe de Galois (p) -ramifié maximal de F . On note aussi

$$G_S = G_S(K).$$

I_{G_S} = l'idéal d'augmentation de l'algèbre complète $\Lambda_{G_S} = \mathbb{Z}_p[[G_S]]$.

$$\mathcal{X}(F) = G_S(F)^{ab}$$

$$\mathcal{X}^{(i)}(F) = H_1(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)).$$

$$Y^{(i)}(F) = H_0(G_S(F), I_{G_S}(i)).$$

s = le rang de Γ i.e. de $G(L/K)$.

$d = \dim_{\mathbb{Z}/p} H^1(G_S, \mathbb{Z}/p)$ le nombre minimal de générateurs de G_S .

$r = \dim_{\mathbb{Z}/p} H^2(G_S, \mathbb{Z}/p)$ le nombre minimal de relations de G_S .

$s_p(F)$ = le nombre de (p) -places de F .

2. Injectivité de $\delta^{(i)}$

On introduit des versions ‘‘tordues’’ de l’homomorphisme δ de l’introduction et l’on donne une condition suffisante pour leur injectivité.

Soient L/K une \mathbb{Z}_p^s -extension, $\Gamma = G(L/K)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit les Λ -modules

$$\mathcal{X}^{(i)}(L) = H_1(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i)) = H^1(G_S(L), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^\vee,$$

et

$$Y^{(i)}(L) = H_0(G_S(L), I_{G_S}(i)).$$

Remarquons que $\mathcal{X}^{(i)}(L)$ ne dépend pas de K , alors que $Y^{(i)}(L)$ en dépend. On fixe aussi une présentation pro- p -libre minimale $R \hookrightarrow F \twoheadrightarrow G_S$, c’est-à-dire que F est pro- p -libre et a même invariant d que G_S . Le caractère cyclotomique $\kappa : \Gamma^c \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ donne par inflation un caractère $F \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$, via lequel on peut tordre tout F -module ‘‘à la Tate’’. La proposition suivante établit le lien entre $\mathcal{X}^{(i)}(L)$ et $Y^{(i)}(L)$ et montre en particulier qu’ils ont la même Λ -torsion. Si G_S agit sur un \mathbb{Z}_p -module M , on note M_{G_S} ses coinvariants.

Proposition 2.1. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe deux suites exactes de Λ -modules*

$$\mathcal{X}^{(i)}(L) \hookrightarrow Y^{(i)}(L) \rightarrow \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_p(i)_{G_S(L)}$$

$$H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i)) \hookrightarrow R^{ab}(i)_{G_S(L)} \rightarrow (I_F(i)_R)_{G_S(L)} \rightarrow Y^{(i)}(L)$$

Dans cette dernière, les deux termes du milieu sont libres, de rangs respectifs r (nombre de relations de G_S) et d (nombre de générateurs de G_S).

Démonstration. La première suite exacte s’obtient en écrivant la $G_S(L)$ -homologie de la suite exacte d’augmentation de G_S tordue :

$$0 \rightarrow I_{G_S}(i) \longrightarrow \Lambda_{G_S} \longrightarrow \mathbb{Z}_p(i) \rightarrow 0$$

Ecrivons ensuite la R -homologie de la suite exacte d'augmentation de F tordue :

$$0 \rightarrow R^{ab}(i) \longrightarrow I_F(i)_R \longrightarrow I_{G_S}(i) \rightarrow 0$$

Rappelons que I_F s'identifie au module des dérivations universelles de F , et que ce dernier est Λ_F -libre de rang d . Comme $\Lambda_F(i)$ s'identifie à Λ_F comme Λ_F -module, $I_F(i)$ est libre aussi. La $G_S(L)$ -homologie de la suite exacte précédente donne la seconde suite exacte de la proposition.

A cause de $cd\ G_S \leq 2$, les deux termes du milieu de la seconde suite exacte de l'énoncé s'identifient respectivement à Λ^r et Λ^d . On pourra consulter [17] pour plus de détails, notamment quant à l'interprétation de la flèche entre ces deux modules par dérivation de Fox des relations de G_S . \square

Remarque 1. Si $L \supset K^c$, on sait (voir [17], théorème 2.2) que l'on a $H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i)) = 0$. La seconde suite exacte de la proposition devient alors

$$0 \rightarrow \Lambda^r \longrightarrow \Lambda^d \longrightarrow Y^{(i)}(L) \rightarrow 0$$

Si l'on écrit sa codescendue et qu'on la compare avec son analogue pour $L = K$, on obtient $H_1(\Gamma, Y^{(i)}(\tilde{K})) = H_2(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$.

Soit $\delta^{(i)} : t_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(L)_\Gamma \rightarrow \mathcal{X}^{(i)}(K)$ l'homomorphisme canonique induit par la codescente $Y^{(i)}(L)_\Gamma \rightarrow Y^{(i)}(K)$. L'homomorphisme $\delta^{(0)}$ est le δ de l'introduction.

En tenant compte de la remarque précédente, on obtient une expression de $\text{Ker} \delta^{(i)}$ pour les "bons" i :

Proposition 2.2. Soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $H_2(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$ et $H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i))$ soient nuls. Alors $\text{Ker} \delta^{(i)} = H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L))$. En particulier, $\delta^{(i)}$ est injectif si $s = 1$, puisque dans ce cas $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L)) = f_\Lambda Y^{(i)}(L)^\Gamma = 0$.

Pour les \mathbb{Z}_p -extensions multiples, on ne sait pas faire mieux que le lemme algébrique suivant, dû à Mc Callum :

Lemme 2.1. ([15] Lemma 24) On suppose que $r = 1$. Si $H_2(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$ et $H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i))$ sont nuls, alors $\delta^{(i)}$ est injectif.

Remarque 2. Si K vérifie la conjecture de Leopoldt, $r = 1$ signifie que $t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}(K)$ est cyclique.

Démonstration. Nous proposons pour 2.1 une preuve différente de celle de [15], ceci dans le but "d'expliquer" l'hypothèse $r = 1$. Comme on suppose que $H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i)) = 0$, c'est que $Y^{(i)}(L)$ est de dimension projective inférieure ou égale à 1. Notons pour $k \geq 0$, $E^k(\bullet) = \text{Ext}_\Lambda^k(\bullet, \Lambda)$ (donc $E^0(\bullet) = \text{Hom}_\Lambda(\bullet, \Lambda)$). D'après [9] theorem 1.6 et lemma 1.8, puisque $\text{pd}_\Lambda Y^{(i)}(L) \leq 1$, $E^1(E^1(Y^{(i)}(L)))$ est canoniquement isomorphe au noyau

de l'homomorphisme naturel $Y^{(i)}(L) \rightarrow E^0(E^0(Y^{(i)}(L)))$. Mais ce dernier noyau n'est autre que $t_\Lambda Y^{(i)}(L)$, on en conclut donc que $t_\Lambda Y^{(i)}(L) = E^1(E^1(Y^{(i)}(L)))$. Appliquant le foncteur E^\bullet à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{\Phi} \Lambda^d \longrightarrow Y^{(i)}(L) \rightarrow 0$$

on obtient

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{E^0(\Phi)} \Lambda \longrightarrow E^1(Y^{(i)}(L)) \rightarrow 0$$

où M est défini par l'exactitude de la suite. En recommençant, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Lambda & \xrightarrow{E^0(E^0(\Phi))} & E^0(M) & \longrightarrow & t_\Lambda Y^{(i)}(L) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Lambda & \xrightarrow{\Phi} & \Lambda^d & \longrightarrow & Y^{(i)}(L) \rightarrow 0 \end{array}$$

En prenant l'homologie par rapport à Γ , on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L)) & \xrightarrow{=} & H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L)) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & E^0(M)_\Gamma & \longrightarrow & (t_\Lambda Y^{(i)}(L))_\Gamma \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p^d & \longrightarrow & Y^{(i)}(K) \rightarrow 0 \end{array}$$

Comme $(t_\Lambda Y^{(i)}(L))_\Gamma$ est de \mathbb{Z}_p -torsion (cf lemme 3.4), on lit sur ce diagramme que $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L)) = t_{\mathbb{Z}_p} E^0(M)_\Gamma$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse $r = 1$: Il est bien connu que pour $s = 1$, un module est libre si et seulement s'il est réflexif, mais pour $s > 1$, l'équivalence n'est conservée que pour les idéaux (i.e. les modules de rang 1) (voir [1] VII§4.2 Example (2) et noter qu'ici un idéal divisoriel est principal, puisque Λ est factoriel). Comme $E^0(M)$ est réflexif de rang 1, il est libre, et $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(i)}(L)) = t_{\mathbb{Z}_p} E^0(M)_\Gamma = 0$, ce qui termine la preuve du lemme.

Pour la commodité du lecteur, on redonne ici l'argument : disons que $\{m_1, \dots, m_q\}$ engendrent M comme idéal de Λ , alors $E^0(M) = \frac{1}{\text{pgcd}(m_j)} \Lambda$, cette égalité ayant lieu dans $\text{Hom}_Q(M \otimes_\Lambda Q, Q)$, identifié à Q , où Q est le corps des fractions de Λ . □

3. Nullité de $\delta^{(i)}$

L'objectif principal de cette section est la preuve du théorème suivant, qui fait le lien entre le problème de la nullité de $\delta^{(i)}$ et un problème de capitulation.

On rappelle que L/K est une \mathbb{Z}_p^s -extension, et que F/K une sous-extension finie de L/K . On note $H_S^q(F, -i) = H^q(G_S(F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$. Si M est un groupe abélien, on note M^{div} son sous-groupe divisible maximal.

Théorème 3.1. *Soit i tel que $H_2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)) = 0$ pour toute sous-extension finie F de L/K (par ex. $i = -2$, cf [19]). Alors $\delta^{(i)}$ s'identifie naturellement à la flèche duale de l'application de capitulation :*

$$H_S^1(K, -i)/H_S^1(K, -i)^{div} \longrightarrow \varinjlim (H_S^1(F, -i)/H_S^1(F, -i)^{div})$$

Remarque 3. *Soit i comme ci-dessus. Supposons que le \mathbb{Z}_p -rang du groupe de décomposition Γ_v de Γ est ≥ 2 pour toute place v au-dessus de p (c'est par exemple le cas pour $L = \tilde{K}$). On définit le groupe de cohomologie p -adique $H^q(G_S(F), \mathbb{Z}_p(-i)) = \varprojlim_k H^q(G_S(F), \mathbb{Z}/p^k(-i))$. Pour un module M discret, le noyau de localisation est défini par la suite exacte*

$$Ker_S^q(F, M) \hookrightarrow H^q(G_S(F), M) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^q(F_v, M)$$

Par passage à la limite projective, on définit encore $Ker_S^q(F, \mathbb{Z}_p(-i))$. On a alors (cf [18]) $H_S^1(F, -i)/H_S^1(F, -i)^{div} = H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(-i))$, et le début de la suite exacte de Poitou-Tate (loc.cit.), permet de montrer facilement que

$$\varinjlim_F H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(-i)) = \varinjlim_F Ker_S^2(F, \mathbb{Z}_p(-i)).$$

Pour $i = -2$, Tate a construit un isomorphisme

$$K_2\mathcal{O}'_L\{p\} \simeq H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(2)).$$

On obtient alors $K_2\mathcal{O}'_L\{p\} = WK_2^{ét}(L)$, où $WK_2^{ét}$ désigne le noyau sauvage étale (i.e. la p -partie du noyau des symboles de Hilbert).

Le théorème 3.1 découle immédiatement, par dualité, de la description suivante de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(L)$:

Proposition 3.1. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\varinjlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F) \subset t_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(L)$. Si i est choisi comme dans le théorème 3.1, alors $\varinjlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F) = t_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(L)$.*

Pour la première assertion, il s'agit de montrer que les Λ -rangs de $\mathcal{X}^{(i)}(L)$ et $\varinjlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F)$ sont égaux. Pour cela, quelques préliminaires algébriques sont nécessaires.

3.1. Caractérisation du rang d'un Λ -module.

On fixe un isomorphisme $\Lambda = \Lambda_0[[T]] = \Lambda_0[[G]]$, où $\Gamma = H \times G$, $G = \mathbb{Z}_p$, $\Lambda_0 = \mathbb{Z}_p[[H]]$. On note aussi $G_n = G^{p^n}$.

L'objet de ce paragraphe est la preuve du résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soit M un Λ -module noethérien. Alors*

$$rg_{\Lambda}M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rg_{\Lambda_0}M_{G_n}}{p^n}$$

En fait ce résultat s’obtient directement en combinant les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Si M est un Λ -module noethérien sans torsion, alors*

$$rg_{\Lambda_0}M_{G_n} = p^n rg_{\Lambda}M$$

Lemme 3.2. *Si M est un Λ -module noethérien, alors M est de torsion si et seulement si M_{G_n} est de Λ_0 -rang borné.*

On rappelle que pseudo-nul signifie localement nul (i.e. le localisé en tout premier de hauteur 1 est nul). Commençons par un lemme.

Lemme 3.3. *Si $M \sim 0$, alors M_{G_n} est un Λ_0 -module de torsion.*

Démonstration. D’après [1] VII §4.8 prop. 18, si $M \sim 0$ comme Λ -module, c’est que $M \sim 0$ comme $\Lambda_0[[G_n]]$ -module. Il suffit donc de montrer le lemme pour $n = 0$. Comme $M \sim 0$, M possède un annulateur premier à T , donc M_G est de Λ_0 -torsion. □

Montrons maintenant le lemme 3.1.

Démonstration. Soit $\omega_n(T) = (T + 1)^{p^n} - 1$. Comme $\Lambda_0[[T]]$ est entier sur $\Lambda_0[[\omega_n(T)]]$ et que ce dernier anneau est intégralement clos (car factoriel), on voit que tout module de $\Lambda_0[[T]]$ -torsion est de $\Lambda_0[[\omega_n(T)]]$ -torsion. Par ailleurs, on voit facilement que $rg_{\Lambda_0[[\omega_n(T)]]}M = p^n rg_{\Lambda_0[[T]]}M$. Ces deux remarques ramènent la preuve du lemme au cas où $n = 0$. Soit donc $r = rg_{\Lambda_0[[T]]}M$. Il existe un plongement $M \hookrightarrow \Lambda_0[[T]]^r$ dont le conoyau Z est annulé par des éléments non divisibles par T . Il suffit en effet de relever un isomorphisme qui provient de la localisation en (T) . Mais alors le lemme du serpent donne une suite exacte

$$Z^G \hookrightarrow M_G \longrightarrow \Lambda_0^r \twoheadrightarrow Z_G$$

Comme Z^G et Z_G sont de Λ_0 -torsion, on obtient $rg_{\Lambda_0}M_G = r$, ce qui termine la preuve de 3.1. □

Passons au lemme 3.2.

Démonstration. Supposons d’abord M de torsion. Alors, grâce au théorème de structure des modules de type fini sur un anneau noethérien intégralement clos ([1] VII §4.4 Th.5) , on sait qu’il existe une suite exacte

$$E \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Z$$

où E est un module élémentaire, et Z est pseudo-nul. Il suffit donc de vérifier le lemme pour E et Z . Pour Z , il est trivial grâce au lemme 3.3. On

peut évidemment supposer $E = \Lambda/(f^k)$, où f est un élément irréductible de Λ . En fait on peut même se ramener au cas où $k = 1$ en exécutant une récurrence immédiate grâce à la suite exacte

$$\Lambda/(f^{k-1}) \hookrightarrow \Lambda/(f^k) \rightarrow \Lambda/(f)$$

Or si $E = \Lambda/(f)$, de deux choses l'une : Soit f et ω_n sont premiers entre eux pour tout n et dans ce cas, E_{G_n} est de Λ_0 -torsion (3.3), ce qui règle la question. Soit il existe n tel que $f \mid \omega_n$, et alors $E_{G_n} = E$ pour n grand, le rang cherché est donc bien borné et cela termine la preuve du sens direct.

La réciproque est une conséquence immédiate de 3.1. Supposons $rg_{\Lambda_0} M_{G_n}$ borné, alors $rg_{\Lambda_0}(f_{\Lambda_0}[[T]]M)_{G_n}$ l'est aussi, et le lemme 3.1 montre que dans ce cas $f_{\Lambda}M$ est nul, ce qui termine la preuve de 3.2. \square

Question : *Peut-on montrer une proposition analogue en remplaçant T par plusieurs variables ? Ce qui manque a priori, c'est le lemme du serpent.*

3.2. Comparaison des Λ -rangs de $\mathcal{X}^{(i)}(L)$ et de $\varprojlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 3.1. On fixe un isomorphisme $\Gamma = \mathbb{Z}_p^s$ via un système de générateurs $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, et donc $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_s]]$. Pour $n = (n_i) \in \mathbb{N}^s$, notons $p^n = p^{\sum n_i}$, Γ_n le sous-groupe de Γ engendré (topologiquement) par $\{\gamma_1^{p^{n_1}}, \dots, \gamma_s^{p^{n_s}}\}$, et $F_n = L^{\Gamma_n}$. Avec ces notations, on a donc $(\Gamma : \Gamma_n) = p^n$.

Démonstration. D'après la proposition 3.2, il faut montrer que

$$\frac{1}{p^n} (rg_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F))_{\Gamma_n} - rg_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(i)}(L))_{\Gamma_n})$$

est une quantité qui tend vers 0 lorsque les coordonnées de n tendent successivement vers l'infini.

On obtient, grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre, le diagramme suivant, dans lequel les lignes sont exactes et C_n et D_n sont définis tautologiquement. On note $\Delta_n = H_S^1(F_n, -i)^{div} = f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F_n)^\vee$ et $\Delta_L = \varinjlim \Delta_n = (\varprojlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F))^\vee$.

$$\begin{array}{ccccccc} C_n & \hookrightarrow & \Delta_n & \rightarrow & \Delta_L^{\Gamma_n} & \rightarrow & D_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\Gamma_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) & \hookrightarrow & H_S^1(F_n, -i) & \rightarrow & H_S^1(L, -i)^{\Gamma_n} & \rightarrow & H^2(\Gamma_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i)) \end{array}$$

Une chasse rapide dans le diagramme montre que le \mathbb{Z}_p -corang de chaque terme de la première ligne est inférieur à celui de son correspondant sur la seconde : les deux flèches verticales du milieu sont injectives, donc la première aussi ; de plus la deuxième est à conoyau fini. Le lemme du serpent permet de conclure. Pour $q = 1, 2$, les corangs de $H^q(\Gamma_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ sont

bornés, donc négligeables devant p^n . Finalement, en appliquant s fois la proposition 3.2, on obtient

$$rg_{\Lambda} \lim_{\leftarrow} f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(F_n) = rg_{\Lambda} \mathcal{X}^{(i)}(L) = \lim_{\leftarrow} \frac{1}{p^n} \text{corg}_{\mathbb{Z}_p} H^1(G_S(F_n), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

cette dernière limite étant calculée en faisant tendre succesivement les coordonnées de n vers $+\infty$. Cela termine la preuve de l'inclusion dans la proposition 3.1. \square

Remarque 4. Si $K^c \subset L$, cette preuve donne une façon de retrouver le résultat $rg_{\Lambda} \mathcal{X}^{(i)}(L) = r_2$ (qui provient par ailleurs de la proposition 2.1). Si l'on note N_L le corps obtenu en adjoignant à L toutes les racines $p^{n^{\text{ièmes}}}$ des (p)-unités de L , le cas $i = -1$ redonne $rg_{\Lambda} G(N_L/L) = r_2$ (voir appendice où $L = \tilde{K}$).

L'égalité de la proposition 3.1 résulte du lemme plus précis suivant :

Lemme 3.4. Si $H_2(G_S, \mathbb{Z}_p(i)) = H_2(G_S(L), \mathbb{Z}_p(i)) = 0$, alors $t_{\Lambda} \mathcal{X}^{(i)}(L)_{\Gamma}$ est fini.

Démonstration. Rappelons la définition des idéaux de Fitting (consulter [7], chapitre 3). Si M possède une présentation

$$\Lambda^a \xrightarrow{\Phi} \Lambda^b \rightarrow M \rightarrow 0$$

on note $E_k(M)$ l'idéal engendré par les déterminants de taille $b - k$ extraits de la matrice de Φ (à ne pas confondre avec les Ext de [9], notés E^k). Il est bien connu que cet idéal ne dépend pas de la présentation choisie, mais uniquement de M (voir [7] et références). Notons maintenant $\Delta_k(M)$ un pgcd des éléments de $E_k(M)$.

On conserve les notations d et r pour les nombres de générateurs et de relations de G_S . Le module $Y^{(i)}(L)$ est présenté par la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \Lambda^r \xrightarrow{\Phi} \Lambda^d \longrightarrow Y^{(i)}(L) \rightarrow 0$$

Puisque $H_1(\Gamma, f_{\Lambda} Y^{(i)}(L)) = H_2(G_S, \mathbb{Z}_p(i)) = 0$, $\Phi(0, \dots, 0)$ est injective et possède donc un déterminant de taille r non nul. On en déduit que $\Delta_r(Y^{(i)}(L))(0, \dots, 0)$ est non nul. Comme $Y^{(i)}(L)$ est de dimension projective ≤ 1 , $\Delta_r(Y^{(i)}(L))/\Delta_{r+1}(Y^{(i)}(L))$ engendre l'idéal annulateur de $t_{\Lambda} Y^{(i)}(L)$ ([7] th 3.8). On en conclut que $\Delta_r(Y^{(i)}(L))(0, \dots, 0)$ est un annulateur non nul de $t_{\Lambda} Y^{(i)}(L)_{\Gamma}$, ce qui termine la preuve. \square

Revenons-en à la proposition 3.1.

Démonstration. Comme $t_{\Lambda} \mathcal{X}^{(i)}(L)_{\Gamma}$ est de \mathbb{Z}_p -torsion, c'est que l'image de $\delta^{(i)}$ est contenue dans $t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(i)}(K)$. On peut remplacer K par une extension finie $F \subset L$, puisque L/F est encore une \mathbb{Z}_p^s -extension. Cela termine la preuve de 3.1, et par conséquent du théorème 3.1. \square

Remarque 5. Pour $i = -2$, le lemme 3.4 possède une interprétation arithmétique intéressante. En effet, il signifie que $K_2\mathcal{O}'_L\{p\}^\Gamma$ est fini, ce qui permet, dans le cas général, de répondre partiellement à la question 6.1 de [11]. Dans le cas particulier où $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique, le lemme 2.1 montre que le conoyau de l'application de capitulation

$$K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_L\{p\}^\Gamma$$

est trivial.

4. Cas particuliers de la conjecture de Greenberg

Pour fixer les idées, on choisit $i = -2$. On rappelle que K contient μ_p . On sait alors que $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ s'identifie naturellement à

$$H_S^1(F, 2)/H_S^1(F, 2)^{div}$$

(cf [20]), et le résultat principal de cet article s'énonce ainsi :

Théorème 4.1. Si $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique et capitule dans \tilde{K} , alors K vérifie la conjecture (GG).

Démonstration. On prend $L = \tilde{K}$ et $i = -2$ dans le lemme 2.1 et le théorème 3.1. □

Remarque 6. $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique si et seulement si $r(K) = 1$, ce qui équivaut encore à la cyclicité de $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(K)$ jointe à la validité de la conjecture de Leopoldt pour K . On retrouve bien le théorème 1.5 annoncé dans l'introduction.

Au vu du théorème 4.1, nous proposons l'affaiblissement suivant de la conjecture (GG) :

Conjecture 4.2. $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ capitule dans \tilde{K} .

Pour une \mathbb{Z}_p^s -extension L/F , on définit le module d'Iwasawa

$$X^{(2)}(L) = \varprojlim K_2\mathcal{O}'_E\{p\}$$

E parcourant les sous-extensions finies de L/F . On note $X^{(2)}(L)^0$ le sous-module fini maximal de $X^{(2)}(L)$. On souhaite établir un lien entre la non-nullité de certains $X^{(2)}(L)^0$ et la conjecture 4.2. Commençons par deux lemmes.

Lemme 4.1. (Comparer avec [6] §3.3°) Soit L/F une \mathbb{Z}_p -extension de groupe Γ . Alors $K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = X^{(2)}(L)_\Gamma$; de plus, il y a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow X^{(2)}(L)_\Gamma^0 \rightarrow K_2\mathcal{O}'_F\{p\} \xrightarrow{j_{L/F}} K_2\mathcal{O}'_L\{p\}^\Gamma \rightarrow 0$$

Démonstration. Notons F_n le $n^{\text{ième}}$ étage de L/F , $\Gamma_n = G(L/F_n)$, et γ un générateur de Γ . La première assertion provient du fait bien connu suivant : $K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = K_2\mathcal{O}'_{F_n}\{p\}_{\Gamma/\Gamma_n}$. De même, $K_2\mathcal{O}'_{F_n}\{p\} = X^{(2)}(L)_{\Gamma_n}$; il s'agit donc de montrer l'exactitude de la suite suivante :

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow X^{(2)}(L)_{\Gamma}^0 \rightarrow X^{(2)}(L)_{\Gamma} \rightarrow (\varinjlim X^{(2)}(L)_{\Gamma_n})^{\Gamma} \rightarrow 0$$

la limite inductive étant prise via la multiplication par $\nu_{m,n} = \frac{\gamma^{p^m} - 1}{\gamma^{p^n} - 1}$, $m > n$. Notons $\overline{X^{(2)}(L)} = X^{(2)}(L)/X^{(2)}(L)^0$. Il est clair que $\overline{X^{(2)}(L)}$ ne possède pas de sous-module fini non nul. Comme de plus le noyau modéré est fini, on a $\overline{X^{(2)}(L)}^{\Gamma} = 0$, et le lemme du serpent donne une suite exacte

$$0 \rightarrow X^{(2)}(L)_{\Gamma_n}^0 \rightarrow X^{(2)}(L)_{\Gamma_n} \rightarrow \overline{X^{(2)}(L)}_{\Gamma_n} \rightarrow 0$$

qui montre l'injectivité à gauche dans (4.1). La surjectivité à droite est bien connue aussi, elle résulte par exemple de l'injectivité de $\delta^{(-2)}$ lorsque $s = 1$ (cf. proposition 1.3) ; on pourrait aussi invoquer [11] théorème 6.1. Passons à l'exactitude au terme $X^{(2)}(L)_{\Gamma}$. Comme $X^{(2)}(L)^0$ est fini, il est tué par $\nu_{m,n}$ pour $m \gg n$. Avec $n = 0$, on obtient donc $X^{(2)}(L)_{\Gamma}^0 \subset \text{Ker } j_{L/F}$. D'autre part, en faisant passer la suite exacte ci-dessus à la limite inductive suivant $\nu_{m,n}$, on obtient $\varinjlim X^{(2)}(L)_{\Gamma_n} = \varinjlim \overline{X^{(2)}(L)}_{\Gamma_n}$. Reste donc à montrer que $\overline{X^{(2)}(L)}_{\Gamma} \rightarrow \varinjlim \overline{X^{(2)}(L)}_{\Gamma_n}$ est injective. Posons $\omega_n = \gamma^{p^n} - 1$, de sorte que $\omega_m = \omega_n \nu_{m,n}$. Soit $x \in \overline{X^{(2)}(L)}$. Si $\nu_{m,0}x \in \omega_m \overline{X^{(2)}(L)}$, disons $\nu_{m,0}x = \omega_m y$, alors $\omega_m(x - (\gamma - 1)y)$. Puisque $\overline{X^{(2)}(L)}^{\Gamma^m} = 0$, c'est que $x = (\gamma - 1)y$. Son image dans $\overline{X^{(2)}(L)}_{\Gamma}$ est donc nulle, et cela termine la preuve. \square

Lemme 4.2. *Soient $E/F/K$ trois p -extensions galoisiennes S -ramifiées. Si l'extension $K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_E\{p\}$ est injective, alors $K_2\mathcal{O}'_F\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_E\{p\}$ l'est aussi.*

Démonstration. Puisque F/K est résoluble, on se ramène au cas où F/K est cyclique.

Montrons donc le lemme dans ce cas. Notons $G = G(F/K)$ et $H = G(E/F)$. La suite exacte (cf [11] th. 5.1)

$$H^1(G, K_3F) \hookrightarrow K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_F\{p\}^G \twoheadrightarrow H^2(G, K_3F)$$

et les isomorphismes $H^q(G, K_2\mathcal{O}'_F) \simeq H^{q+2}(G, K_3F)$ pour $q \geq 1$ (loc. cit.), donnent la suite exacte

$$H^1(G, K_2\mathcal{O}'_F) \hookrightarrow K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_F\{p\}^G \twoheadrightarrow H^2(G, K_2\mathcal{O}'_F)$$

puisque le groupe G est cyclique. On a donc, par hypothèse,

$$H^1(G, K_2\mathcal{O}'_F) = 0.$$

Puisque $K_2\mathcal{O}'_F$ est fini, son quotient de Herbrand est trivial et l'on en déduit que $K_2\mathcal{O}'_F$ est G -cohomologiquement trivial, donc K_3F aussi. Comme $K_3F = K_3E^H$ (cf [11] §1.1), la suite spectrale de Hochschild-Serre montre que $H^1(H, K_3E)^G = 0$. La première suite exacte ci-dessus permet de conclure. \square

Considérons le “cas simple” où $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est d'ordre p . S'il existe une \mathbb{Z}_p -extension L/K telle que $X^{(2)}(L)^0$ soit non nul, le lemme 4.2 montre que $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ capitule dans L et la conjecture 4.2 est vérifiée. En fait on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Si $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique d'ordre p et s'il existe une sous-extension finie F/K de \tilde{K}/K et une \mathbb{Z}_p -extension L/F telle que $L \subset \tilde{K}$ et $X^{(2)}(L)^0 \neq 0$, alors les conjectures 4.2 et (GG) sont vérifiées pour K .*

Démonstration. : Comme $X^{(2)}(L)^0 \neq 0$, c'est que l'homomorphisme d'extension $K_2\mathcal{O}'_F\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_L\{p\}$ n'est pas injectif. Le lemme 4.2 montre que l'extension $K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \rightarrow K_2\mathcal{O}'_L\{p\}$ ne l'est pas non plus. Comme $L \subset \tilde{K}$, $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ capitule dans \tilde{K} . \square

On peut douter de l'utilité pratique de la proposition 4.1, puisqu'il est très difficile de contrôler le module $X^{(2)}(L)^0$.

Question : *L'existence d'une telle \mathbb{Z}_p -extension L/F à l'intérieur de \tilde{K}/K est-elle équivalente à la validité de la conjecture 4.2 ?*¹

Remarque 7. *Lorsque $F = K$ et $L = K^c$, si $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique d'ordre divisant p , l'hypothèse $X^{(2)}(K^c)^0 \neq 0$ entraîne la nullité de $K_2\mathcal{O}'_{K^c}\{p\}$. Par exemple, pour $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$, cela signifie que p est régulier, ce qui n'est pas très intéressant pour notre propos.*

La vraie difficulté consiste donc à faire capituler $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ ailleurs que dans la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de K . Dans l'état actuel de nos connaissances, nous devons nous limiter à des cas particuliers.

Soit k un corps de nombres quelconque et $K = k(\mu_p)$. On note $\Delta = G(K/k)$. Dans cette situation on peut énoncer une condition suffisante pour que K vérifie 4.2 :

Proposition 4.2. *Soit $K = k(\mu_p)$; on suppose que $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est cyclique d'ordre p . Soit F/K une sous-extension de \tilde{K}/K , cyclique de degré p , de groupe G , et galoisienne sur k . Soit $\chi : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}/p^\times$ le caractère donnant l'action de Δ sur G . Fixons une section $\Delta \rightarrow G(F/k)$, via laquelle on identifie Δ à un sous-groupe de $G(F/k)$, et notons $M = F^\Delta$. Supposons que χ engendre $\text{Hom}(\Delta, \mathbb{Z}/p^\times)$ et que $K_2\mathcal{O}'_M\{p\} = 0$; alors $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ capitule dans F , si bien que K vérifie la conjecture 4.2.*

¹Ajouté pendant les épreuves : On peut montrer l'équivalence entre la conjecture (GG) et l'existence d'une \mathbb{Z}_p -extension L/K vérifiant $X^{(2)}(L)^0 = X^{(2)}(L)$, voir [21].

Démonstration. Les auteurs tiennent à remercier R.Greenberg de leur avoir permis de reproduire ici la preuve de cette proposition. Notons I_G l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}_p[G]$. Les puissances de I_G induisent sur $K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$ une filtration

$$K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = \mathcal{F}^0 K_2\mathcal{O}'_F\{p\} \supset \mathcal{F}^1 K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = I_G K_2\mathcal{O}'_F\{p\} \supset \dots$$

Notons $\mathcal{G}^q K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = \mathcal{F}^q K_2\mathcal{O}'_F\{p\} / \mathcal{F}^{q+1} K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$ les quotients successifs. Comme G est cyclique, disons engendré par σ , la multiplication par $\sigma - 1$ induit un homomorphisme surjectif et Δ -équivariant $\mathcal{G}^q K_2\mathcal{O}'_F\{p\}(\chi) \rightarrow \mathcal{G}^{q+1} K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$. En effet, si $\delta \in \Delta$ et $x \in K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$, on a $(\sigma - 1)\chi(\delta)\delta x = \chi(\delta)\delta(\sigma^{\chi(\delta^{-1})} - 1)x$. Comme $\sigma^{\chi(\delta^{-1})} - 1 - (\chi(\delta^{-1})\sigma - 1) \in I_G^2$, l'homomorphisme est bien Δ -équivariant.

Comme la norme réalise un isomorphisme $K_2\mathcal{O}'_F\{p\}_G \rightarrow K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$, ces deux Δ -modules sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p(\chi^t)$ pour un certain $0 < t < \#\Delta$: en effet, $t \neq 0$ car $K_2\mathcal{O}'_M\{p\} = 0$. Mais $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ est d'exposant p , son image par l'extension dans $\mathcal{G}^0 K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = K_2\mathcal{O}'_F\{p\}_G$ est donc triviale, c'est-à-dire que $j_{F/K} K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \subset \mathcal{F}^1 K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$. Comme pour $q < \#\Delta$, $\mathcal{G}^q K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$ et $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ ne sont pas isomorphes (abstraitement) comme Δ -modules, une récurrence immédiate montre qu'en fait $j_{F/K} K_2\mathcal{O}'_K\{p\} \subset \mathcal{F}^{\#\Delta} K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$. Maintenant, soit $q = -t \bmod \#\Delta$, $0 < q < \#\Delta$; l'hypothèse $K_2\mathcal{O}'_M\{p\} = 0$ implique $\mathcal{G}^q K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = 0$. Par décroissance des quotients successifs, on en déduit que $\mathcal{F}^{q+1} K_2\mathcal{O}'_F\{p\} = 0$, et donc $j_{F/K} K_2\mathcal{O}'_K\{p\} = 0$. \square

Appliquons ce critère pour $k = \mathbb{Q}$. Soit donc $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ et p tel que $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ soit d'ordre p . Comme $s_p(K) = 1$, noyau sauvage et noyau modéré coïncident. Nous disposons, pour trouver de tels p , du théorème suivant, dû à Jaulent-Soriano :

Théorème 4.3. ([10], th. 7 (ii)) *Si K contient μ_{p^k} où p^k est l'exposant de $X(K^c)_\Gamma$, et si l'extension $WK_2^{\text{ét}}(K) \rightarrow WK_2^{\text{ét}}(K(\mu_{p^{k+1}}))$ est injective, alors $WK_2^{\text{ét}}(K)$ est aussi d'exposant p^k .*

Ainsi $\#A(K) = p \Rightarrow \#WK_2^{\text{ét}}(K) = p$, puisque dans cette situation la conjecture de Vandiver est valide, et donc $X^{(2)}(K^c)^0 = 0$, ce qui implique automatiquement l'hypothèse d'injectivité grâce au lemme 4.1.

Par exemple, $p = 37$ convient. Ensuite, il est naturel de choisir $M = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})$, et $F = KM$. Ainsi la dernière condition à vérifier est la nullité de $K_2\mathcal{O}'_M\{p\}$. Malheureusement, dans l'état actuel de nos connaissances, cette dernière condition est impossible à vérifier pour tout p . Néanmoins, pour $p = 37$, le problème a été résolu indépendamment par McCallum et Sharifi : ils ont montré que $A(F)$ est cyclique d'ordre 37, d'où l'on déduit que $K_2\mathcal{O}'_F\{p\}$ est cyclique. S'il était fixé par Δ , $K_2\mathcal{O}'_K\{p\}$ le serait aussi, ce qui est faux. La dernière condition de la proposition 4.2 est donc remplie,

ce qui montre que $K = \mathbb{Q}(\mu_{37})$ vérifie la conjecture 4.2, et par conséquent la conjecture (GG) (cf 1.5).

En fait les deux derniers auteurs ont émis une conjecture, appelons-la (MCS), concernant un certain cup-produit en cohomologie galoisienne (cf [16] Conjecture 5.3) : lorsque $\#A(K) = p$, (MCS) équivaut à l'existence à l'intérieur de \tilde{K} d'une extension F/K possédant une seule (p) -place et telle que $\#A(F) = p$ (loc. cit. Corollary 6.4). On voit facilement que dans ces conditions, $A(K)$ capitule dans F .

Nous pouvons alors passer du corps de classes à la K -théorie par la proposition suivante :

Proposition 4.3. *Soit $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$; on suppose la conjecture de Vandiver vérifiée. Si $A(K)$ est tué par p et s'il capitule dans une extension F/K telle que $F \subset \tilde{K}$ et $s_p(F^c) = 1$, alors K vérifie la conjecture 4.2.*

Démonstration. Comme $s_p(F) = 1$, les groupes de Brauer $H_S^2(K, 1)$ et $H_S^2(F, 1)$ sont nuls, et l'on peut appliquer la proposition 3.1 aux extensions cyclotomiques de K et F , avec $i = -1$. Cela donne $t_{\Lambda^c} \mathcal{X}^{(-1)}(K^c)^\vee = A(K^c)$ et $t_{\Lambda^c} \mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^\vee = A(F^c)$. Comme par ailleurs, la même proposition pour $i = -2$ donne $t_{\Lambda^c} \mathcal{X}^{(-2)}(K^c)^\vee = K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\}$ et $t_{\Lambda^c} \mathcal{X}^{(-2)}(F^c)^\vee = K_2 \mathcal{O}'_{F^c} \{p\}$, on retrouve les isomorphismes fonctoriels bien connus (cf [2] theorem 5) : $K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\} = A(K^c)(1)$ et $K_2 \mathcal{O}'_{F^c} \{p\} = A(F^c)(1)$. Montrons maintenant que $K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\}^{\Gamma^c}$ capitule dans F^c par l'homomorphisme d'extension $K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\}^{\Gamma^c} \rightarrow K_2 \mathcal{O}'_{F^c} \{p\}^{\Gamma^c}$, ce qui suffira pour conclure que $K_2 \mathcal{O}'_K \{p\}$ capitule dans F^c , donc dans \tilde{K} . Puisque $s_p(F^c) = 1$, noyaux sauvages et noyaux modérés coïncident. La conjecture de Vandiver impliquant la nullité de $X(K^c)^0$, le lemme 3.3 montre que l'hypothèse d'injectivité dans le théorème 4.3 ci-dessus est satisfaite. On en conclut donc que $K_2 \mathcal{O}'_K \{p\}$ est d'exposant p . Maintenant comme l'application de capitulation $K_2 \mathcal{O}'_K \{p\} \rightarrow K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\}^\Gamma$ est surjective (cf par exemple 4.1 ou [11], th 6.1), on en déduit que $A(K^c)(1)^{\Gamma^c} = K_2 \mathcal{O}'_{K^c} \{p\}^\Gamma$ est d'exposant p . Mais alors $A(K^c)(1)^{\Gamma^c} \subset A(K^c)^{\Gamma^c}(1)$.

Enfin, comme $s_p(K^c) = 1$, l'application de capitulation $A(K) \rightarrow A(K^c)^{\Gamma^c}$ est surjective aussi ([12] corollary 1.6). Comme par hypothèse $A(K)$ capitule dans F , donc dans F^c , on en déduit que l'image de l'extension $A(K^c)^{\Gamma^c} \rightarrow A(F^c)^{\Gamma^c}$ est nulle. L'extension "tordue" $A(K^c)(1) \rightarrow A(F^c)(1)$ annule donc $A(K^c)(1)^{\Gamma^c} \subset A(K^c)^{\Gamma^c}(1)$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 8. *On peut aussi voir directement que, pour $r = 1$, la conjecture de McCallum et Sharifi entraîne (GG) (cf [16], Corollary 10.5). En résumé, lorsque $A(F)$ est cyclique d'ordre p , on a les implications (MCS) \Rightarrow (3.2) \Rightarrow (GG).*

Passons maintenant à un résultat de "montée" concernant (GG).

Théorème 4.4. *Soit $K \subset F \subset \tilde{K}$. Si K vérifie (GG) , alors F aussi.*

Démonstration. Pour une extension de corps, disons E/F , on note $\Lambda_{E/F} = \mathbb{Z}_p[[G(E/F)]]$ (par exemple $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{K}/K}$ et $\Lambda = \Lambda_{L/K}$). Comme $\tilde{\Lambda}$ est entier sur $\Lambda_{\tilde{K}/F}$, on a $t_{\Lambda_{\tilde{K}/F}} \mathcal{X}^{(-2)}(\tilde{K}) = t_{\tilde{\Lambda}} \mathcal{X}^{(-2)}(\tilde{K}) = 0$. On utilise ensuite plusieurs fois le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate de la proposition 3.1 :

Lemme 4.3. *Soit L/K (resp. E/K) une \mathbb{Z}_p^s -extension (resp. une \mathbb{Z}_p^{s+1} -extension contenant L), et $G = G(E/L) = \mathbb{Z}_p$. On a alors une injection*

$$(t_{\Lambda_{E/K}} Y^{(-2)}(E))_G \hookrightarrow t_{\Lambda} Y^{(-2)}(L)$$

□

Enfin, dans le même esprit signalons le critère général suivant :

Théorème 4.5. *Si $K_2 \mathcal{O}'_K \{p\}$ capitule dans une \mathbb{Z}_p -extension L/K , alors K vérifie la conjecture (GG) .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme ci-dessus. □

5. Appendice

Bien qu'il semble que la proposition 1.1 ne soit pas utilisable sous cette forme, nous en donnons ici la preuve. Notons $\tilde{N} = \tilde{K}(E_S(\tilde{K})^{\frac{1}{p^\infty}})$

Proposition 5.1. *Si K contient μ_p et possède une seule place au-dessus de p , si $r = 1$ et si $G(\tilde{N}/\tilde{K})$ est sans $\tilde{\Lambda}$ -torsion, alors (GG) est vraie pour K dès que $A(K)$ capitule dans \tilde{K} .*

Démonstration. Le lemme 2.1 montre que $\delta^{(-1)}$ est injective. Montrons que son image est nulle. La suite exacte de Poitou-Tate (voir [18])

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_S^0(F, 0) &\rightarrow \bigoplus_{v \in S_p(K)} \text{ind}_{G(F/K)_v}^{G(F/K)} H^0(F_v, 0) \\ &\rightarrow H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(1))^\vee \rightarrow \text{Ker}_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

montre que $t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F) = (H_S^1(F, 1)/H_S^1(F, 1)^{\text{div}})^\vee = H_S^2(F, \mathbb{Z}_p(1))^\vee = A(F)^\vee$, puisque l'image de la troisième flèche doit être finie et divisible, donc nulle. L'hypothèse $t_{\tilde{\Lambda}} G(\tilde{N}/\tilde{K}) = 0$ signifie que

$$t_{\tilde{\Lambda}} \mathcal{X}^{(-1)}(\tilde{K}) = \varprojlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F),$$

et donc que la flèche duale de $\delta^{(-1)}$ est l'application de capitulation

$$A(K) \rightarrow A(\tilde{K})^{\tilde{\Gamma}}$$

Cela termine donc la preuve de 5.1. □

5.1. Les différentes formulations de (G) et (GG) .

L'erreur, dans [15], consistait à confondre sans raison valable un certain isomorphisme algébrique ([15] Proposition 5), avec un homomorphisme d'origine arithmétique (le dual de l'homomorphisme naturel de [15] Theorem 8). Il ne semble pas qu'elle puisse être réparée avec les seules méthodes de [15]. Le même type d'erreur entache la démonstration du théorème 4.4 de [13] qui donne les équivalences entre différentes formulations de (GG) : avec les notations de [13] c'est l'implication $(G1) \Rightarrow (G5)$ qui est en cause ; l'isomorphisme annoncé entre la Λ^c -torsion de $G(N^c/K^c)$ et un certain module induit provient de la description algébrique par Iwasawa [8] de ce dernier module, mais cette description n'a aucune raison d'être fonctorielle en K . Ici, heureusement, la réparation est possible (voir théorème 5.1 ci-dessous). Ces deux erreurs proviennent de la difficulté à décrire le quotient $t_{\Lambda^c}G(N^c/K^c)(-1) = t_{\Lambda^c}Y^{(-1)}(K^c)/\varprojlim_{\mathbb{Z}_p} Y^{(-1)}(K_n)$. Le lecteur est invité à consulter [12] afin de s'en convaincre.

Théorème 5.1. *Soit $K \supset \mu_p$ et L/K une \mathbb{Z}_p^s -extension contenant K^c et dont le groupe de décomposition Γ_v soit de \mathbb{Z}_p -rang ≥ 2 pour toute place v au-dessus de (p) (par ex. $L = \tilde{K}$). Si tous les corps intermédiaires vérifient la conjecture de Gross, alors les énoncés suivants sont équivalents.*

- (G1) $A(\tilde{K}) = 0$
- (G2) $X(\tilde{K}) \sim 0$
- (G3⁽ⁱ⁾) $t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}^{(i)}(\tilde{K}) = 0$

S'ils sont vérifiés pour L , ils le sont automatiquement pour \tilde{K} . On dit alors que K vérifie la conjecture de Greenberg généralisée (GG) .

Dans [13], les implications $(G3^{(0)}) \Leftrightarrow (G2) \Rightarrow (G1)$ sont démontrées, sous l'hypothèse supplémentaire que tous les corps F entre K et \tilde{K} vérifient la conjecture de Leopoldt. En fait, il suffit de remplacer $i = 0$ par $i = -2$ pour obtenir une preuve qui est indépendante de la conjecture de Leopoldt. On peut aussi consulter [15], [14] ou [9].

Le point délicat réside dans l'implication $(G1) \Rightarrow (G3^{(i)})$. Puisque $(G3^{(i)})$ est visiblement indépendante de i , nous montrons $(G1) \Rightarrow (G3^{(-1)})$.

Démonstration. On choisit F_k^n tels que $F_k^n = F_k^0(\mu_{p^n})$ et $L = \cup F_k^n$. On note également $F_k = F_k^0$, donc $L = \cup F_k^c$. La proposition 3.1 montre que $t_{\Lambda}\mathcal{X}^{(-2)}(L) = \varprojlim t_{\Lambda^c}\mathcal{X}^{(-2)}(F_k^c)$. Comme tous les modules considérés se situent au dessus de K^c , on peut remplacer $i = -2$ par $i = -1$ dans cette égalité (cela ne change pas les groupes, mais simplement l'action de Γ^c). Par ailleurs, pour $i = -1$, l'inclusion de la proposition 3.1 fournit une suite exacte tautologique qui définit un module \mathcal{Z}_k :

$$\varprojlim_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F_k^n) \hookrightarrow t_{\Lambda^c}\mathcal{X}^{(-1)}(F_k^c) \twoheadrightarrow \mathcal{Z}_k$$

Puisque $t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F_k^n) = A(F_k^n)^\vee$ (voir la preuve de 5.1), on obtient, après passage à la limite sur k , la description suivante de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(L)$

$$A(L)^\vee \hookrightarrow t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(L) \twoheadrightarrow \varprojlim \mathcal{Z}_k$$

Il s'agit donc de montrer que $\varprojlim \mathcal{Z}_k \sim 0$.

L'étude du module \mathcal{Z}_k est faite en détail dans [12] (\mathcal{Z}_k y est noté $\text{tor}_\Lambda Z'_\infty$ par les auteurs).

Proposition 5.2. ([12] th.4.2) *Soit $\Phi(F_k^n)$ le conoyau de l'application de capitulation $A(F_k^n) \rightarrow A(F_k^c)_{\Gamma_n^c}$ et $\Phi(F_k^c) = \varprojlim \Phi(F_k^n)$. On a une suite exacte*

$$\left(\bigoplus_{v \in S_p(K)} \text{Ind}_{G(F_k^c/K)_v}^{G(F_k^c/K)} \mathbb{Z}_p \right) / \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathcal{Z}_k \twoheadrightarrow \Phi(F_k^c)^\vee$$

Si de plus F_k^n vérifie la conjecture de Gross pour n suffisamment grand, alors $\Phi(F_k^c)$ s'identifie naturellement à $\Psi(F_k^c) = \varprojlim \Psi(F_k^n)$, où $\Psi(F_k^n)$ est le noyau de l'application de descente $X(F_k^c)_{\Gamma_n^c} \rightarrow A(F_k^n)$.

Il est facile de voir que le terme induit disparaît lorsque l'on fait passer cette suite exacte à la limite projective sur k . Il s'agit donc de montrer que $\varprojlim (\Phi(F_k^c)^\vee)$ est un Λ -module pseudo-nul. Comme on suppose vraie la conjecture de Gross, on peut travailler sur le module $\Psi(F_k^c)^\vee$. Nous disposons de la suite exacte de Sinnott (voir appendice de [3]) :

$$\widetilde{\bigoplus_{v \in S_p(K)} \text{Ind}_{G(F_k^n/K)_v}^{G(F_k^n/K)} \mathbb{Z}_p} \longrightarrow X(F_k^c)_{\Gamma_n^c} \longrightarrow A(F_k^n)$$

d'où une surjection

$$\widetilde{\bigoplus_{v \in S_p(K)} \text{Ind}_{G(F_k^n/K)_v}^{G(F_k^n/K)} \mathbb{Z}_p} \twoheadrightarrow \Psi(F_k^n)$$

Ici, le signe $\widetilde{}$ désigne le noyau de la forme linéaire "somme". Comme L/K vérifie l'hypothèse de décomposition, pour chaque place $v \in S_p(K)$, il existe $\gamma_v \in \Gamma_v$ tel que $\kappa(\gamma_v) = 1$ (κ est le caractère cyclotomique). Comme les $v \in S_p(K)$ sont en nombre fini, il existe un indice j tel que, pour toute place $v \in S_p(K)$, $\gamma^{\mathbb{Z}_p} \cap \Gamma^{p^j}$ soit un facteur direct de Γ^{p^j} . Notons γ'_v un générateur de $\gamma^{\mathbb{Z}_p} \cap \Gamma^{p^j}$ et $\Lambda' = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{p^j}]]$, alors $\prod(\gamma'_v - 1)$ annule $\widetilde{\bigoplus_{v \in S_p(K)} \text{Ind}_{G(F_k^n/K)_v}^{G(F_k^n/K)} \mathbb{Z}_p}$, donc $\Psi(F_k^n)$, ceci pour n et k quelconques. Comme $\varprojlim \mathcal{Z}_k = (\varprojlim \Phi(F_k^c))^\vee$, c'est que $\prod(\gamma'_v - 1)$ annule $\varprojlim \mathcal{Z}_k$. Dans la preuve du lemme 2.9, on a montré l'existence d'un $f \in \Lambda'$ annihilant $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-2)}(L)$ et dont l'image dans \mathbb{Z}_p par l'augmentation est non nulle. On en déduit l'existence d'un $g \in \Lambda'$

annulant $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(L)$ (donc $\varprojlim \mathcal{Z}_k$) et dont l'image dans $\Lambda^{c'} = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{cp^j}]]$ par l'augmentation est non nulle. Puisque les $\gamma_v'^{-1} - 1$ sont irréductibles dans Λ' et que leur augmentation est nulle dans $\Lambda^{c'}$, c'est que g et $\prod \gamma_v'^{-1} - 1$ sont sans facteur commun. On en conclut que $\varprojlim \mathcal{Z}_k$ est pseudo-nul comme Λ' -module, et donc par [1] VII §4.8 prop. 18, comme Λ -module. Finalement, on a montré que $\varprojlim \mathcal{Z}_k \sim 0$, c'est-à-dire que $A(L)^\vee \sim t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(L)$, ce qui achève la preuve de $(G1) \Rightarrow (G3^{(-1)})$. \square

Remarque 9. Si, au lieu de supposer la conjecture de Gross à tous les étages, on suppose que $s_p(L) < \infty$, l'isomorphisme algébrique de [15] Proposition 5 permet de montrer la dernière implication $(G1) \Rightarrow (G3^{(-1)})$.

Bibliographie

- [1] N. BOURBAKI, *Commutative Algebra*. Chapter 1–7, Springer 1989.
- [2] J. COATES, *On K_2 and some classical conjecture in Algebraic Number Theory*. Annals of Math. **95** (1972), 99–116.
- [3] L. FEDERER, B.H. GROSS, with an appendix by W.Sinnott, *Regulators and Iwasawa Modules*. Invent. Math. **62** (1981), 443–457.
- [4] R. GREENBERG, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*. American J. of Math. **98** (1976), 263–284.
- [5] R. GREENBERG, *Iwasawa theory, past and present*. Adv. Studies in Pure Math. **30** (2001), Class Field Theory – Its Centenary and Prospect, 335–385.
- [6] C. GREITHER, *Sur les normes universelles dans les \mathbb{Z}_p -extensions*. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [7] J. HILLMAN, *Alexander Ideals of links*. Lecture Notes in Mathematics. **895**. Berlin–Heidelberg–New York : Springer–Verlag (2000).
- [8] K. IWASAWA, *On \mathbb{Z}_l -extensions of algebraic number fields*. Annals of Math. **98** (1973), 246–326.
- [9] U. JANNSEN, *Iwasawa Modules up to Isomorphism*. Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1989), 171–207.
- [10] J-F. JAULENT. F. SORIANO, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe de classes logarithmiques*. Math. Z. **238** (2001), 335–354.
- [11] B. KAHN, *Descente Galoisienne et K_2 des corps de nombres*. *K-Theory* **7** (1993), 55–100.
- [12] M. LE FLOC'H, A. MOVAHHEDI, T. Nguyen Quang Do, *On Capitulation cokernels in Iwasawa theory*. to appear in American J. of Math.
- [13] A. LANNUZEL. T. NGUYEN QUANG DO, *Conjectures de Greenberg et extensions pro- p -libres d'un corps de nombres*. Manuscripta Math. **102** (2000), 187–209.
- [14] D.C. MARSHALL, *Galois Groups and Greenberg's Conjecture*. Thesis (2000).
- [15] W. MCCALLUM, *Greenberg's conjecture and units in multiple \mathbb{Z}_p -extensions*. American J. of Math. **123** (2001), 909–930.
- [16] W. MCCALLUM. R. SHARIFI, *A cup product in the Galois cohomology of number fields*. Duke Math. J. **120**, No.2 (2003), 269–309.
- [17] T. NGUYEN QUANG DO, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*. Springer Lect. Notes **1068** (1984), 167–185.
- [18] P. SCHNEIDER, *Über Gewisse Galoiscohomologiegruppen*. Math. Z. **168** (1979), 181–205.

- [19] C. SOULÉ, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*. Invent. Math. **55** (1979), 251–295.
- [20] J. TATE, *Relations between K_2 and Galois cohomology*. Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
- [21] D. VAUCLAIR, *Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les \mathbb{Z}_p -extensions d'un corps de nombres*, en préparation (2005).

Thong NGUYEN QUANG DO
Université de Franche-Comté
16, route de Gray
25030 Besançon Cedex, France
E-mail : `thong.nguyen-quang-do@math.univ-fcomte.fr`

David VAUCLAIR
Université de Franche-Comté
16, route de Gray
25030 Besançon Cedex, France
E-mail : `vauclair@math.univ-fcomte.fr`