

Géométrie réelle des dessins d'enfant

par LAYLA PHARAMOND DIT D'COSTA

RÉSUMÉ. À tout dessin d'enfant est associé un revêtement ramifié de la droite projective complexe $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifié en dehors de 0, 1 et l'infini. Cet article a pour but de décrire la structure algébrique de l'image réciproque de la droite projective réelle par ce revêtement, en termes de la combinatoire du dessin d'enfant. Sont rappelées en annexe les propriétés de la restriction de Weil et des dessins d'enfants utilisées.

ABSTRACT. To every Grothendieck's "dessin d'enfant" is associated a ramified covering of the projective complex line $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, unramified over $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. The aim of this paper is to describe the algebraic structure of the preimage of the real projective line $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ by this covering in terms of the combinatorial data of the "dessin d'enfant". The required properties of the Weil restriction and of dessins d'enfant are given in the appendices.

Soient X une courbe algébrique, projective et lisse sur \mathbf{C} , f un morphisme fini (de \mathbf{C} -schémas) de X dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, et n le degré de f . On note \underline{f} l'application de $X(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ qui se déduit de la précédente par passage aux points complexes : c'est un revêtement topologique ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$ (§ B.4.1). On associe à ce revêtement un dessin d'enfant D (§ B.3.3) tracé sur la surface topologique $X(\mathbf{C})$, qui possède une triangulation adaptée canonique T (§ B.5.1, exemple). La réunion des sommets et des arêtes de la triangulation T est l'image réciproque par \underline{f} de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{R})$: c'est un sous-ensemble algébrique réel de $X(\mathbf{C})$. Dans cet article, nous allons définir une courbe algébrique Γ sur \mathbf{R} , dont $\underline{f}^{-1}(\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{R}))$ est l'ensemble des points réels et décrire quelques unes de ses propriétés. C'est l'ensemble de ces propriétés que nous appelons la géométrie réelle du dessin d'enfant.

1. La courbe algébrique réelle Γ

1.1. Définition de la courbe algébrique réelle Γ .

Les courbes X et \mathbf{P}_C^1 admettent des restrictions de Weil à \mathbf{R} (cor. de la prop. A.3), notées $\prod_{C/\mathbf{R}} X$ et $\prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$; ce sont des surfaces algébriques projectives et lisses sur \mathbf{R} (§ A.4.1, exemple).

Notons $\prod_{C/\mathbf{R}} f : \prod_{C/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$ le morphisme de \mathbf{R} -schémas déduit de f par restriction de Weil. La droite projective \mathbf{P}_R^1 sur \mathbf{R} s'identifie canoniquement à une courbe fermée de la surface $\prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$ (cor. de la prop. A.6, appliqué à $Y = \mathbf{P}_R^1$). Son image réciproque par $\prod_{C/\mathbf{R}} f$ est un sous-schéma fermé Γ de la surface $\prod_{C/\mathbf{R}} X$, et $\prod_{C/\mathbf{R}} f$ définit par restriction un morphisme $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}_R^1$. Par définition, le diagramme carré

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \prod_{C/\mathbf{R}} X \\ g \downarrow & & \downarrow \prod_{C/\mathbf{R}} f \\ \mathbf{P}_R^1 & \longrightarrow & \prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1 \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les immersions fermées canoniques, est cartésien. Cela signifie que Γ s'identifie au produit fibré $\mathbf{P}_R^1 \times_{\prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1} \prod_{C/\mathbf{R}} X$,

l'immersion fermée de Γ dans $\prod_{C/\mathbf{R}} X$ étant la projection sur le second facteur, et le morphisme g étant la projection sur le premier facteur. Il en résulte que l'ensemble $\Gamma(\mathbf{R})$ des points réels de Γ s'identifie à l'image réciproque de $\mathbf{P}_C^1(\mathbf{R})$ par l'application $\underline{f} : X(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}_C^1(\mathbf{C})$.

1.2. Complexifiée de la courbe Γ .

Notons X^* la courbe algébrique complexe conjuguée de X (§ A.1.3). Lorsqu'on identifie \mathbf{P}_C^1 à son conjugué (§ A.1.4), le conjugué de f s'identifie à un morphisme $f^* : X^* \rightarrow \mathbf{P}_C^1$.

Le complexifié du \mathbf{R} -schéma $\prod_{C/\mathbf{R}} X$ s'identifie à $X \times X^*$ (§ A.2.3), et celui de $\prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$ à $\mathbf{P}_C^1 \times \mathbf{P}_C^1$ (en identifiant \mathbf{P}_C^1 à son conjugué). Une fois ces identifications faites, le complexifié du morphisme $\prod_{C/\mathbf{R}} f : \prod_{C/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$ s'identifie à $(f, f^*) : X \times X^* \rightarrow \mathbf{P}_C^1 \times \mathbf{P}_C^1$, et celui de l'immersion fermée canonique $\mathbf{P}_R^1 \rightarrow \prod_{C/\mathbf{R}} \mathbf{P}_C^1$ à l'immersion diagonale $\Delta : \mathbf{P}_C^1 \rightarrow \mathbf{P}_C^1 \times \mathbf{P}_C^1$ (prop. A.6).

Le carré cartésien déduit de (1) par passage au complexifié s'identifie ainsi à

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_{(\mathbf{C})} & \longrightarrow & X \times X^* \\ g_{(\mathbf{C})} \downarrow & \Delta & \downarrow (f, f^*) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 & \longrightarrow & \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \end{array} .$$

Par suite, $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ s'identifie à l'image réciproque par (f, f^*) de la diagonale de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, et le morphisme $g_{(\mathbf{C})} : \Gamma_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ à la restriction de $f \circ \text{pr}_1$ (ou ce qui revient au même de $f^* \circ \text{pr}_2$) à $\Gamma_{(\mathbf{C})}$.

1.3. Premières propriétés de Γ .

Proposition 1.1. a) *Le \mathbf{R} -schéma Γ est une courbe algébrique projective et réduite, localement définie dans $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ par une équation.*

b) *Le morphisme $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ est fini et plat, de degré n^2 .*

c) *La courbe $\Gamma' = \Gamma - g^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ est lisse, et le morphisme g' de Γ' dans $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ déduit de g par restriction est un revêtement étale de degré n^2 .*

Commençons par démontrer que le \mathbf{R} -schéma Γ est localement défini par une équation dans $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$. Pour cela, il nous suffit de prouver que $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ est

localement défini par une équation dans $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, ou encore que, si $U = \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0\}$ ou $U = \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{\infty\}$, U est défini par une équation dans $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_{(\mathbf{C})}$.

Traisons par exemple le cas où $U = \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{\infty\} = \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbf{R}[Z])$. La restriction de Weil de $U_{(\mathbf{C})} = \text{Spec}(\mathbf{C}[Z])$ s'identifie à $\text{Spec}(\mathbf{R}[X, Y])$. L'immersion canonique $U \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_{(\mathbf{C})}$ s'identifie à $\text{Spec}(\rho) : \text{Spec}(\mathbf{R}[Z]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{R}[X, Y])$, où $\rho : \mathbf{R}[X, Y] \rightarrow \mathbf{R}[Z]$ est l'homomorphisme de \mathbf{R} -algèbres qui applique X sur Z et Y sur 0 . Le noyau de cet homomorphisme est engendré par Y , d'où notre assertion dans ce cas.

Pour démontrer les autres assertions de la prop. 1.1, il nous suffit, par descente fidèlement plate, de le faire après extension des scalaires de \mathbf{R} à \mathbf{C} . Le \mathbf{C} -schéma $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ s'identifie à un sous- \mathbf{C} -schéma fermé de $X \times X^*$, localement défini par une équation. Il est donc projectif de dimension 1, et de Cohen-Macaulay.

Le morphisme (f, f^*) intervenant dans le carré cartésien (2) est fini et plat, de degré n^2 ; il en est donc de même de $g_{(\mathbf{C})}$ qui s'en déduit par changement de base.

Notons respectivement Y' et X' les \mathbf{C} -schémas $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et $X - f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$. Étant donné que $f' : X' \rightarrow Y'$ est un revêtement étale de

degré n , le morphisme $(f', f'^*) : X' \times X'^* \rightarrow Y' \times Y'$ est un revêtement étale de degré n^2 et $g'_{(C)} : \Gamma'_{(C)} \rightarrow Y'$ aussi puisqu’il s’obtient par le changement de base $Y' \rightarrow Y' \times Y'$. La courbe Y' étant lisse sur C , il en est de même de $\Gamma'_{(C)}$. À fortiori, la courbe $\Gamma'_{(C)}$ est réduite. La courbe $\Gamma_{(C)}$ est alors réduite puisqu’elle est de Cohen-Macaulay et possède un ouvert dense réduit. Ce qui termine la démonstration.

1.4. La normalisée $\tilde{\Gamma}$ de la courbe algébrique Γ .

Nous noterons $\tilde{\Gamma}$ la normalisée de Γ ; c’est une courbe algébrique projective et lisse sur \mathbf{R} . Nous noterons \tilde{g} le morphisme composé $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma \xrightarrow{g} \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$.

Le morphisme $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ définit par restriction un isomorphisme de $\tilde{\Gamma} - \tilde{g}^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ sur la courbe $\Gamma' = \Gamma - g^{-1}(\{0, 1, \infty\})$, puisque celle-ci est lisse (prop. 1.1), donc normale. On peut donc considérer $\tilde{\Gamma}$ comme la compactifiée lisse de la courbe affine Γ' .

Le morphisme $\tilde{g} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ est un revêtement ramifié fini de degré n^2 , non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Le revêtement étale induit au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ s’identifie à $g' : \Gamma' \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

1.5. Le dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$

Rappelons que nous notons D le dessin d’enfant associé au revêtement ramifié fini $f : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ (§ B.3.3). Notons (E, σ_0, σ_1) le dessin combinatoire associé (§ B.2.2) : E est l’ensemble des arêtes de D , *i.e.* l’ensemble des composantes connexes de $f^{-1}(]0, 1[)$; si a est une telle arête, les arêtes ayant même extrémité de type 0 (resp. de type 1) que a sont munies d’un ordre cyclique déduit de l’orientation de la surface $X(C)$ en ce point, et $\sigma_0(a)$ (resp. $\sigma_1(a)$) est le successeur de a pour cet ordre cyclique.

On associe de manière analogue un dessin d’enfant et un dessin combinatoire au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(C)} : \tilde{\Gamma}_{(C)} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.

Proposition 1.2. *Le dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(C)}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{E}, \Sigma_0, \Sigma_1)$, où $\mathcal{E} = E \times E$, $\Sigma_0 = \sigma_0 \times \sigma_0^{-1}$ et $\Sigma_1 = \sigma_1 \times \sigma_1^{-1}$.*

Soit D^* le dessin d’enfant associé au revêtement ramifié fini $f^* : X^* \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Si x est un point de $X(C)$, *i.e.* un morphisme de C -schémas de $\text{Spec}(C)$ dans X , le composé $x \circ \text{Spec}(c)$, où c est la conjugaison complexe, est un morphisme de C -schémas de $\text{Spec}(C)$ dans X^* , *i.e.* un point x^* de $X^*(C)$. L’application $x \mapsto x^*$ de $X(C)$ dans $X^*(C)$ est un homéomorphisme qui transforme la décomposition cellulaire et le bicoloriage du dessin d’enfant D en la décomposition cellulaire et le bicoloriage de D^* , mais renverse l’orientation. Cet homéomorphisme définit en particulier une bijection entre les arêtes de D et celles de D^* , qui permet d’identifier le dessin combinatoire associé à D^* à $(E, \sigma_0^{-1}, \sigma_1^{-1})$.

Le revêtement étale induit au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ par $\tilde{g}_{(\mathbf{C})}$ s'identifie à $g'_{(\mathbf{C})} : \Gamma'_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et donc, d'après le § 1.2, au produit (fibré) des revêtements étales $f' : X' \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et $f'^* : X'^* \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Il résulte alors des équivalences de catégories décrites dans l'annexe B que le dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(\mathbf{C})}$ s'identifie au produit des dessins combinatoires associés aux revêtements ramifiés f et f^* .

Remarque. Le revêtement ramifié $\tilde{g} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ est défini sur \mathbf{R} . La conjugaison complexe opère donc sur l'ensemble des arêtes du dessin d'enfant associé. Lorsqu'on identifie cet ensemble d'arêtes à $E \times E$ comme ci-dessus, la conjugaison complexe opère par $(a, b) \mapsto (b, a)$.

1.6. Points au-dessus de 0, 1 ou ∞ de $\Gamma(\mathbf{C})$ et de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$.

Le morphisme $g_{(\mathbf{C})} : \Gamma_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ (resp. $\tilde{g}_{(\mathbf{C})} : \tilde{\Gamma}_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$) définit, par passage aux points complexes, une application holomorphe $\Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ (resp. $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$). On dit qu'un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ (resp. $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$) est au-dessus de 0, 1 ou ∞ si son image par cette application est 0, 1 ou ∞ .

1.6.1. Points de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de 0.

On déduit de l'immersion fermée $\Gamma_{(\mathbf{C})} \rightarrow X \times X^*$, par passage aux points complexes, un plongement holomorphe $\Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$; l'image de $\Gamma(\mathbf{C})$ par ce plongement est l'ensemble des couples $(x, y) \in X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$ tels que $\underline{f}(x) = \underline{f}^*(y)$.

Par ce plongement, l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de 0 s'identifie à $\underline{f}^{-1}(0) \times \underline{f}^{*-1}(0)$. L'ensemble $\underline{f}^{-1}(0)$ est l'ensemble des sommets de type 0 de D ; on définit une bijection canonique

$$(3) \quad \underline{f}^{-1}(0) \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle \setminus E$$

en associant à $x \in \underline{f}^{-1}(0)$ l'ensemble des arêtes de D dont x est une extrémité. De même, $\underline{f}^{*-1}(0)$ est l'ensemble des sommets de type 0 de D^* , d'où une bijection canonique

$$(4) \quad \underline{f}^{*-1}(0) \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle \setminus E.$$

Par les bijections précédentes, l'application $x \mapsto x^*$ de $\underline{f}^{-1}(0)$ sur $\underline{f}^{*-1}(0)$ s'identifie à l'application identique de $\langle \sigma_0 \rangle \setminus E$. De ce qui précède, on déduit une bijection canonique

$$(5) \quad \{\text{points de } \Gamma(\mathbf{C}) \text{ au-dessus de } 0\} \longrightarrow \langle \sigma_0 \rangle \setminus E \times \langle \sigma_0 \rangle \setminus E.$$

1.6.2. Points de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 0.

Rappelons que $\tilde{g}_{(\mathbf{C})} : \tilde{\Gamma}_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}^1$ est un revêtement ramifié fini et que le revêtement étale qu'il induit au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ s'identifie à $g'_{(\mathbf{C})} : \Gamma'_{(\mathbf{C})} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Nous avons déterminé dans la prop. 1.2

le dessin combinatoire associé : il s'identifie à $(\mathcal{E}, \Sigma_0, \Sigma_1)$, où $\mathcal{E} = E \times E$, $\Sigma_0 = \sigma_0 \times \sigma_0^{-1}$ et $\Sigma_1 = \sigma_1 \times \sigma_1^{-1}$.

On en déduit une bijection canonique

$$(6) \quad \{\text{points de } \tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \text{ au-dessus de } 0\} \longrightarrow \langle \Sigma_0 \rangle \backslash \mathcal{E} = \langle \sigma_0 \times \sigma_0^{-1} \rangle \backslash (E \times E).$$

L'application qui à un point de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 0 associe son image dans $\Gamma(\mathbf{C})$ correspond, par les bijections (5) et (6), à l'application

$$(7) \quad \langle \sigma_0 \times \sigma_0^{-1} \rangle \backslash (E \times E) \longrightarrow \langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$$

déduite par passage aux quotients de l'identité de $E \times E$.

Soit P un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de 0. Il correspond par la bijection (5) à un couple (A, B) d'orbites de $\langle \sigma_0 \rangle$ dans E . Posons $k = \text{Card}(A)$ et $l = \text{Card}(B)$. On déduit de (6) une bijection de l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ sur $\langle \Sigma_0 \rangle \backslash (A \times B)$. Chaque orbite de $\Sigma_0 = \sigma_0 \times \sigma_0^{-1}$ dans $A \times B$ a $\text{ppcm}(k, l)$ éléments. Le nombre d'antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ est donc égal à $kl/\text{ppcm}(k, l) = \text{pgcd}(k, l)$.

Remarque. Conservons les notations précédentes. Soit $b \in B$. Chaque orbite de Σ_0 dans $A \times B$ rencontre $A \times \{b\}$, et son intersection avec $A \times \{b\}$ est de la forme $\Omega \times \{b\}$, où Ω est une orbite de $\langle \sigma_0^l \rangle$ dans A . On en déduit une paramétrisation de l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ par $\langle \sigma_0^l \rangle \backslash A$; elle dépend du choix de b . De même, le choix d'un élément $a \in A$ permet de définir une paramétrisation de l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ par $\langle \sigma_0^k \rangle \backslash B$.

1.6.3. Points de $\Gamma(\mathbf{C})$ et $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 1.

On obtient des résultats analogues à ceux de § 1.6.1 et § 1.6.2 pour les points de $\Gamma(\mathbf{C})$ et de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 1 en remplaçant partout σ_0 par σ_1 et Σ_0 par Σ_1 .

1.6.4. Points de $\Gamma(\mathbf{C})$ et $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de ∞ .

En ce qui concerne les points au-dessus de ∞ , il convient de modifier § 1.6.1 et § 1.6.2 comme suit. Par le plongement $\Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$, l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de ∞ s'identifie à $\underline{f}^{-1}(\infty) \times \underline{f}^{*-1}(\infty)$. Posons $\sigma_\infty = \sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}$. On a défini au § B.5.1, remarque, une bijection canonique

$$(8) \quad \underline{f}^{-1}(\infty) \rightarrow \langle \sigma_\infty \rangle \backslash E = \langle \sigma_1 \sigma_0 \rangle \backslash E.$$

De même, en posant $\sigma_\infty^* = \sigma_0 \sigma_1$, on a une bijection canonique

$$(9) \quad \underline{f}^{*-1}(\infty) \rightarrow \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E = \langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle \backslash E.$$

(On prendra garde que la permutation σ_∞^* n'est pas égale en général à $\sigma_\infty^{-1} = \sigma_1 \sigma_0$.) L'application $x \mapsto x^*$ de $\underline{f}^{-1}(\infty)$ sur $\underline{f}^{*-1}(\infty)$ s'identifie par

les bijections précédentes à l'application $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \rightarrow \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$ déduite par passage au quotient de σ_0 (ou ce qui revient au même de σ_1^{-1}).

Ce qui précède permet de définir une bijection canonique

$$(10) \quad \{\text{points de } \Gamma(\mathbf{C}) \text{ au-dessus de } \infty\} \longrightarrow \langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E.$$

Posons $\Sigma_\infty = \Sigma_0^{-1} \Sigma_1^{-1} = \sigma_\infty \times \sigma_\infty^*$. En utilisant la description du dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(\mathbf{C})}$ rappelée au § 1.6.2, on définit une bijection canonique

$$(11) \quad \{\text{points de } \tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \text{ au-dessus de } \infty\} \rightarrow \langle \Sigma_\infty \rangle \backslash \mathcal{E} = \langle \sigma_\infty \times \sigma_\infty^* \rangle \backslash (E \times E).$$

L'application qui à un point de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de ∞ associe son image dans $\Gamma(\mathbf{C})$ correspond, par les bijections (10) et (11), à l'application

$$(12) \quad \langle \sigma_\infty \times \sigma_\infty^* \rangle \backslash (E \times E) \rightarrow \langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$$

déduite par passage aux quotients de l'identité de $E \times E$.

Soit P un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de ∞ . Il correspond par la bijection (10) à un couple $(A, B) \in \langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$. Comme au § 1.6.2, on montre que l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ est paramétré par $\langle \Sigma_\infty \rangle \backslash (A \times B)$ et que son cardinal est $\text{pgcd}(k, l)$, où $k = \text{Card}(A)$ et $l = \text{Card}(B)$. Le choix d'un élément $b \in B$ (resp. $a \in A$) permet aussi de le paramétrer par $\langle \sigma_\infty^l \rangle \backslash A$ (resp. $\langle \sigma_\infty^{*k} \rangle \backslash B$).

1.6.5. Action de la conjugaison complexe sur les points de $\Gamma(\mathbf{C})$ et de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de $0, 1, \infty$.

Comme Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont des courbes algébriques réelles, la conjugaison complexe opère sur $\Gamma(\mathbf{C})$ et $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$. Si l'image d'un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ par le plongement $\Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$ est (x, y) , l'image de son conjugué est (y^*, x^*) . Si un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ ou $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ est au-dessus de $0, 1$ ou ∞ , il en est de même de son conjugué.

Proposition 1.3. *Lorsqu'on identifie l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ (resp. de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$) au-dessus de 0 à $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$ (resp. $\langle \sigma_0 \times \sigma_0^{-1} \rangle \backslash (E \times E)$) par la bijection (5) (resp. (6)), la conjugaison complexe opère sur cet ensemble comme l'involution déduite par passage au quotient de l'involution $(a, b) \mapsto (b, a)$ de $E \times E$.*

Rappelons (§ 1.5, remarque) que sur l'ensemble des arêtes du dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(\mathbf{C})}$, identifié à $E \times E$, la conjugaison complexe opère par $(a, b) \mapsto (b, a)$. L'application qui à une arête associe son unique extrémité de type 0 commute à l'action de la conjugaison complexe et s'identifie à la surjection canonique $E \times E \rightarrow \langle \sigma_0 \times \sigma_0^{-1} \rangle \backslash (E \times E)$. La prop. 1.3 en résulte en ce qui concerne $\tilde{\Gamma}$.

Comme le morphisme canonique $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est défini sur \mathbf{R} , l'application $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{C})$ commute à la conjugaison complexe; elle est surjective. Vu sa description, donnée au § 1.6.2, la prop. 1.3 pour Γ s'en suit.

Remarque. L'action de la conjugaison complexe sur l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ ou de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 1 se décrit de manière analogue, en remplaçant σ_0 par σ_1 dans la prop. 1.3.

Proposition 1.4. *Lorsqu'on identifie l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ (resp. de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$) au-dessus de ∞ à $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$ (resp. $\langle \sigma_\infty \times \sigma_\infty^* \rangle \backslash (E \times E)$) par la bijection (10) (resp. (11)), la conjugaison complexe opère sur cet ensemble comme l'involution déduite par passage au quotient de l'involution $(a, b) \mapsto (\sigma_0^{-1}(b), \sigma_0(a))$ de $E \times E$ (ou ce qui revient au même de l'involution $(a, b) \mapsto (\sigma_1(b), \sigma_1^{-1}(a))$).*

Comme dans la démonstration de la prop. 1.3, il suffit de traiter le cas de $\tilde{\Gamma}$. Cette fois, la surjection canonique $E \times E \rightarrow \langle \sigma_\infty \times \sigma_\infty^* \rangle \backslash (E \times E)$ s'interprète comme suit : à une arête du dessin combinatoire associé au revêtement ramifié $\tilde{g}_{(\mathbf{C})}$ correspond le sommet de type ∞ qui est adhérent à la même face positive que l'arête. Cette application n'est pas compatible à la conjugaison complexe (car la conjugaison complexe transforme les faces positives en faces négatives). Cependant, si $(a, b) \in E \times E$, le sommet de type ∞ qui est adhérent à la même face négative que l'arête paramétrée par (b, a) est aussi adhérent à la même face positive que l'arête paramétrée par $(\sigma_0^{-1}(b), \sigma_0(a))$. La prop. 1.4 en résulte.

1.6.6. Points de $\Gamma(\mathbf{R})$ au-dessus de 0, 1, ∞ .

Par construction, $\Gamma(\mathbf{R})$ s'identifie à l'image réciproque par f de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{R})$. Les points de $\Gamma(\mathbf{R})$ au-dessus de 0, 1, et ∞ sont donc les sommets de type 0, 1 et ∞ du dessin d'enfant D associé à f et sont paramétrés respectivement par $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E$, $\langle \sigma_1 \rangle \backslash E$, $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E$.

Le plongement de l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{R})$ au-dessus de 0 dans l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de 0 s'identifie via la bijection (5) à l'application diagonale $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$. On a un résultat analogue en ce qui concerne les points au-dessus de 1.

Le plongement de l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{R})$ au-dessus de ∞ dans l'ensemble des points de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de ∞ s'identifie via la bijection (10) à l'application $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \rightarrow \langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$ déduite par passage au quotient de $a \mapsto (a, \sigma_0(a))$ (ou ce qui revient au même de $a \mapsto (a, \sigma_1^{-1}(a))$).

Soit P un point de $\Gamma(\mathbf{R})$ au-dessus de 0 (resp. 1; resp. ∞). Soit k le cardinal de l'orbite de $\langle \sigma_0 \rangle$ (resp. $\langle \sigma_1 \rangle$; resp. $\langle \sigma_\infty \rangle$) qui le paramètre. Le nombre de points de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de P est égal à k : c'est un cas particulier des formules établies aux § 1.6.2 et § 1.6.4. Nous démontrerons au § 1.6.7 que ces k points sont tous réels.

1.6.7. Lien entre points réels de Γ et points réels de $\tilde{\Gamma}$.

Théorème 1. *Pour qu'un point de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ soit réel, il faut et il suffit que son image dans $\Gamma(\mathbf{C})$ soit un point réel.*

Le morphisme canonique $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de courbes algébriques réelles et définit par restriction un isomorphisme de $\tilde{g}^{-1}(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\})$ sur $g^{-1}(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 - \{0, 1, \infty\})$. Il en résulte que l'image d'un point réel de $\tilde{\Gamma}$ est un point réel de Γ et que la réciproque est vraie pour les points qui ne sont pas au-dessus de 0, 1 ou ∞ .

Il reste à démontrer que si Q est un point de $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ au-dessus de 0, 1, ∞ dont l'image dans $\Gamma(\mathbf{C})$ est réelle, Q est réel. Par symétrie, il nous suffit de traiter le cas où Q est au-dessus de 0. Par la bijection (6), Q correspond à l'orbite d'un point (a, b) de $E \times E$ pour l'action du groupe $\langle \Sigma_0 \rangle = \langle \sigma_0 \times \sigma_0^{-1} \rangle$. Son image dans $\Gamma(\mathbf{C})$ correspond par la bijection (5) à l'élément $(\langle \sigma_0 \rangle a, \langle \sigma_0 \rangle b)$ de $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$. Le fait que cette image soit réelle équivaut à dire, d'après § 1.6.5, que l'on a $\langle \sigma_0 \rangle a = \langle \sigma_0 \rangle b$, i.e. qu'il existe un entier k tel que $b = \sigma_0^k(a)$. Mais on a alors $(b, a) = \Sigma_0^k(a, b)$, ce qui d'après § 1.6.5 signifie que le point Q est réel.

1.7. Invariance de la courbe Γ par l'action de $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ sur les dessins d'enfant.

Soit $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ le groupe des permutations de $\{0, 1, \infty\}$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$, notons s_α l'unique automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ qui prolonge α ; il est en fait défini sur \mathbf{Q} . On a $s_{\alpha\beta} = s_\alpha \circ s_\beta$.

Soit $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$. Le morphisme $s_\alpha \circ f : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ est un morphisme fini, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. La triangulation de $X(\mathbf{C})$ associée à (X, f) est la même que celle associée à $(X, s_\alpha \circ f)$, à ceci près que les sommets de type 0, 1, ∞ de la première sont ceux de type $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(\infty)$ de la seconde.

La courbe algébrique réelle Γ associée au § 1.1 à (X, f) est la même que celle associée à $(X, s_\alpha \circ f)$: cela résulte du fait que l'automorphisme $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} s_\alpha$ de $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ transforme $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ en $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$.

1.8. Invariance de Γ par passage au dessin conjugué.

Soit (X^*, f^*) le conjugué complexe du revêtement (X, f) . La courbe algébrique réelle Γ associée au § 1.1 à (X, f) est canoniquement isomorphe à celle Γ' associée à (X^*, f^*) .

En effet, il existe un isomorphisme canonique ι de \mathbf{R} -schémas $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ sur $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X^*$ (§ A.2.6). Par ailleurs, il existe un unique automorphisme involutif τ de $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ qui, sur l'ensemble des points réels $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1)(\mathbf{R}) = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$,

opère comme la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. On a $\tau \circ \prod_{C/R} f = \prod_{C/R} f^* \circ \iota$ et τ transforme le sous-schéma fermé \mathbf{P}_R^1 en lui-même, donc ι transforme Γ en Γ' .

2. Composantes irréductibles de Γ

2.1. Composantes irréductibles et composantes connexes de $\Gamma_{(C)}$.

2.1.1. Une paramétrisation des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$.

L’application qui à une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$ associe sa trace sur $\Gamma'_{(C)}$ est une bijection de l’ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ sur l’ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma'_{(C)}$. On définit de même une bijection de l’ensemble des composantes irréductibles de $\tilde{\Gamma}_{(C)}$ sur l’ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma'_{(C)}$. Comme $\Gamma'_{(C)}$ et $\tilde{\Gamma}_{(C)}$ sont des courbes algébriques lisses, leurs composantes irréductibles ne sont autres que leurs composantes connexes.

Le dessin combinatoire associé au revêtement $\tilde{g}_{(C)} : \tilde{\Gamma}_{(C)} \rightarrow \mathbf{P}_C^1$ s’identifie à $(\mathcal{E}, \Sigma_0, \Sigma_1)$ (prop. 1.2) ; les composantes connexes de $\tilde{\Gamma}_{(C)}$ sont donc paramétrées par l’ensemble $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \backslash \mathcal{E}$ des orbites dans \mathcal{E} du groupe engendré par les permutations Σ_0 et Σ_1 .

On déduit des deux alinéas précédents une bijection canonique

$$(1) \quad \{ \text{composantes irréductibles de } \Gamma_{(C)} \} \longrightarrow \langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \backslash \mathcal{E}.$$

Explicitons cette bijection. Soient a, b deux éléments de E , *i.e.* deux composantes connexes de l’image réciproque de $]0, 1[$ par $\underline{f} : X(C) \rightarrow \mathbf{P}_C^1(C)$. Pour tout $t \in]0, 1[$, soit $\alpha(t)$ l’unique point de a tel que $\underline{f}(\alpha(t)) = t$ et $\beta(t)$ l’unique point de b tel que $\underline{f}(\beta(t)) = t$. Identifions $\Gamma(\bar{C})$ à l’ensemble des couples $(x, y) \in X(C) \times X^*(\bar{C})$ tels que $f(x) = f^*(y)$. L’ensemble des couples $(\alpha(t), \beta(t)^*)$, pour $t \in]0, 1[$, est alors une composante connexe de l’image réciproque de $]0, 1[$ par $\underline{g} : \Gamma(C) \rightarrow \mathbf{P}_C^1(C)$, et toute composante connexe de $\underline{g}^{-1}(]0, 1[)$ s’obtient ainsi. La bijection (1) associe à une composante irréductible C de $\Gamma_{(C)}$ l’ensemble des couples $(a, b) \in E \times E$ qui paramètrent les composantes connexes de $\underline{g}^{-1}(]0, 1[)$ contenues dans $C(C)$.

2.1.2. Points d’une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$ au-dessus de $0, 1, \infty$.

Soit C une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$. Notons \mathcal{O} l’orbite correspondante de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans \mathcal{E} . Les bijections décrites au § 1.6 permettent de paramétrer les points de C au-dessus de $0, 1, \infty$ par les classes des éléments de \mathcal{O} dans $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$, $\langle \sigma_1 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_1 \rangle \backslash E$ et $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \backslash E$ respectivement. Soient \tilde{C} la composante irréductible de $\tilde{\Gamma}_{(C)}$ normalisée de C . Les bijections décrites au § 1.6 permettent de paramétrer les points de \tilde{C} au-dessus de $0, 1, \infty$ par $\langle \Sigma_0 \rangle \backslash \mathcal{O}$, $\langle \Sigma_1 \rangle \backslash \mathcal{O}$ et $\langle \Sigma_\infty \rangle \backslash \mathcal{O}$ respectivement.

2.1.3. Condition d'intersection de deux composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$.

Soient C et C' deux composantes irréductibles distinctes de $\Gamma_{(C)}$, \mathcal{O} et \mathcal{O}' les orbites de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans \mathcal{E} qui leur correspondent par la bijection (1). Les composantes C et C' ne s'intersectent pas au-dessus de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

Pour que C et C' s'intersectent en un point au-dessus de 0, il faut et il suffit d'après le § 2.1.2 qu'il existe $(a, b) \in \mathcal{O}$ et $(a', b') \in \mathcal{O}'$ tels que $\langle \sigma_0 \rangle a = \langle \sigma_0 \rangle a'$ et $\langle \sigma_0 \rangle b = \langle \sigma_0 \rangle b'$. On peut en ce cas choisir a, b, a', b' de sorte que $a = a'$ (ou si l'on préfère de sorte que $b = b'$).

La condition pour que C et C' s'intersectent en un point au-dessus de 1 (resp. ∞) s'exprime de manière analogue en remplaçant les relations $\langle \sigma_0 \rangle a = \langle \sigma_0 \rangle a'$ et $\langle \sigma_0 \rangle b = \langle \sigma_0 \rangle b'$ par $\langle \sigma_1 \rangle a = \langle \sigma_1 \rangle a'$ et $\langle \sigma_1 \rangle b = \langle \sigma_1 \rangle b'$ (resp. $\langle \sigma_\infty \rangle a = \langle \sigma_\infty \rangle a'$ et $\langle \sigma_\infty^* \rangle b = \langle \sigma_\infty^* \rangle b'$).

2.1.4. Condition d'autointersection d'une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$.

Soit C une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$. Notons \mathcal{O} l'orbite de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans \mathcal{E} qui lui correspond par la bijection (1). Soit P un point complexe de C . Disons que C s'autointersecte en P si P possède plusieurs antécédents dans la normalisée \tilde{C} de C . Ceci ne se peut se produire que si P est au-dessus de 0, 1 ou ∞ .

Considérons pour commencer le cas où P est au-dessus de 0 et notons (A, B) l'élément de $\langle \sigma_0 \rangle \setminus E \times \langle \sigma_0 \rangle \setminus E$ correspondant. Le sous-ensemble $A \times B$ de $E \times E$ est stable par Σ_0 , et l'ensemble des antécédents de P dans \tilde{C} est paramétré par $\langle \Sigma_0 \rangle \setminus (\mathcal{O} \cap (A \times B))$.

Notons k le cardinal de A et l celui de B . Le nombre d'antécédents de P dans \tilde{C} est égal à $\text{Card}(\mathcal{O} \cap (A \times B)) / \text{ppcm}(k, l)$, puisque chaque orbite de $\langle \Sigma_0 \rangle$ dans $A \times B$ a $\text{ppcm}(k, l)$ éléments (§ 1.6.2)

Le choix d'un point b de B (resp. d'un point a de A) permet, comme dans la remarque du § 1.6.2, de paramétrer l'ensemble des antécédents de P dans \tilde{C} par $\langle \sigma_0^l \rangle \setminus A'$, où A' est l'ensemble des éléments $a' \in A$ tels que $(a', b) \in \mathcal{O}$ (resp. par $\langle \sigma_0^k \rangle \setminus B'$, où B' est l'ensemble des éléments $b' \in B$ tels que $(a, b') \in \mathcal{O}$).

Soit $(a, b) \in \mathcal{O} \cap (A \times B)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) La composante irréductible C s'autointersecte en P ;
- b) On a $\langle \Sigma_0 \rangle(a, b) \neq \mathcal{O} \cap (A \times B)$;
- c) Il existe $a' \in A$ tel que $(a', b) \in \mathcal{O}$ et $a' \notin \langle \sigma_0^l \rangle a$;
- d) Il existe $b' \in B$ tel que $(a, b') \in \mathcal{O}$ et $b' \notin \langle \sigma_0^k \rangle b$;
- e) On a $\text{Card}(\mathcal{O} \cap (A \times B)) \neq \text{ppcm}(k, l)$.

Lorsque P est au-dessus de 1, les résultats sont identiques, en remplaçant σ_0 par σ_1 et Σ_0 par Σ_1 . Lorsque P est au-dessus de ∞ , on note (A, B) l'élément de $\langle \sigma_\infty \rangle \setminus E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \setminus E$ correspondant ; on paramètre l'ensemble des antécédents de P dans \tilde{C} par $\langle \Sigma_\infty \rangle \setminus (\mathcal{O} \cap (A \times B))$, par $\langle \sigma_\infty^l \rangle \setminus A'$ lorsqu'un

point de B est choisi, et par $\langle \sigma_{\infty}^{*k} \rangle \backslash B'$ lorsqu'un point de A est choisi, d'où des critères analogues à $b)$, $c)$, $d)$ pour que C s'autointersecte en P .

2.1.5. Composantes connexes de $\Gamma_{(C)}$.

Soit C une composante connexe de $\Gamma_{(C)}$. Elle est contenue dans une composante connexe de la surface $X \times X^*$, *i.e.* dans le produit d'une composante connexe de X par une composante connexe de X^* . Or l'ensemble des composantes connexes de X (resp. X^*) est en bijection canonique avec $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E$ (resp. avec $\langle \sigma_0^{-1}, \sigma_1^{-1} \rangle \backslash E = \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E$). On définit ainsi une application canonique

$$(2) \quad \{\text{composantes connexes de } \Gamma_{(C)}\} \rightarrow (\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E) \times (\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E).$$

Proposition 2.1. *L'application (2) est bijective.*

Corollaire. *Le nombre de composantes connexes de $\Gamma_{(C)}$ est le carré du nombre de composantes connexes de X ; en particulier $\Gamma_{(C)}$ est connexe si et seulement si X l'est.*

Nous démontrons la prop. 2.1 en même temps que la suivante :

Proposition 2.2. *Si C et C' sont deux composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ qui sont contenues dans une même composante connexe de $\Gamma_{(C)}$, il existe une suite (C_0, C_1, \dots, C_r) de composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ telles que $C = C_0$, $C' = C_r$ et que, pour $0 \leq i < r$, C_i et C_{i+1} s'intersectent en un point au-dessus de 0 ou de 1.*

Soient C et C' deux composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$, \mathcal{O} et \mathcal{O}' les orbites de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $\mathcal{E} = E \times E$ qui leur correspondent par la bijection (1). Pour démontrer la prop. 2.1 et la prop. 2.2, il suffit de prouver que, si \mathcal{O} et \mathcal{O}' sont contenus dans un même élément de $(\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E) \times (\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \backslash E)$, la conclusion de la prop. 2.2 est satisfaite. Or sous cette hypothèse, il existe a, a' et b dans E tels que $(a, b) \in \mathcal{O}$, $(a', b) \in \mathcal{O}'$, et $a' \in \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle a$. On peut alors trouver une suite finie (a_0, a_1, \dots, a_r) d'éléments de E telle que $a = a_0$, $a' = a_r$ et que, pour $0 \leq i < r$, a_{i+1} appartienne à $\langle \sigma_0 \rangle a_i$ ou $\langle \sigma_1 \rangle a_i$. Prenons pour C_i la composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$ associée à l'orbite $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle (a_i, b)$. La conclusion de la prop. 2.2 résulte du § 2.1.3.

2.2. Une méthode pour déterminer les composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$.

Nous avons défini au § 2.1.1 une bijection canonique entre l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ et l'ensemble des orbites de $\mathcal{E} = E \times E$ pour l'action du groupe $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$. Déterminer les composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ revient donc à déterminer ces orbites. Nous indiquons pour cela deux méthodes.

2.2.1. Paramétrisation des orbites par des doubles classes d'un groupe libre à deux générateurs.

Dans ce numéro, nous supposons pour simplifier que X est connexe et non vide.

Notons F le groupe libre engendré par deux générateurs s_0 et s_1 , et θ l'automorphisme involutif de F défini par $\theta(s_0) = s_0^{-1}$ et $\theta(s_1) = s_1^{-1}$. On prendra garde à ne pas confondre θ avec l'anti-automorphisme de F qui associe à tout élément son inverse : en effet $\theta(s_0s_1)$ est égal à $s_0^{-1}s_1^{-1}$ et non à $(s_0s_1)^{-1} = s_1^{-1}s_0^{-1}$.

Faisons opérer F sur E en faisant agir s_0 par σ_0 et s_1 par σ_1 . Comme X est connexe, F opère transitivement sur E . Soient a un élément de E et H son stabilisateur dans F . L'application $f \mapsto fa$ de F dans E définit par passage au quotient une bijection de F/H sur E .

Faisons opérer F sur $\mathcal{E} = E \times E$ en faisant agir s_0 par Σ_0 et s_1 par Σ_1 : on a alors $f.(x, y) = (fx, \theta(f)y)$ pour $f \in F$ et $x, y \in E$. Les orbites de \mathcal{E} pour l'action de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ sont les orbites de \mathcal{E} pour l'action de F . Chacune de ces orbites rencontre $\{a\} \times E$, et son intersection avec $\{a\} \times E$ est de la forme $\{a\} \times \Omega$, où Ω est une orbite de E pour l'action de $\theta(H)$. Autrement dit :

Proposition 2.3. *L'application $x \mapsto (a, x)$ de E dans \mathcal{E} définit par passage au quotient une bijection de $\theta(H) \backslash E$ sur $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \backslash \mathcal{E}$. L'application $f \mapsto (a, fa)$ de F dans \mathcal{E} définit par passage au quotient une bijection de $\theta(H) \backslash F/H$ sur $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \backslash \mathcal{E}$.*

Remarque. En combinant la prop. 2.3 et le § 2.1.1, on obtient une bijection canonique de $\theta(H) \backslash E$ sur l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{\mathbb{C}}$.

Pour que la remarque précédente permette une détermination effective de l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{\mathbb{C}}$, il convient de connaître une famille génératrice finie d'éléments de H . Le théorème de Schreier en fournit : Pour tout $b \in E$, choisissons un élément t_b de F tel que $t_b a = b$; les éléments de $\mathcal{H} = \bigcup_{b \in E} \{t_{\sigma_0(b)}^{-1} s_0 t_b, t_{\sigma_1(b)}^{-1} s_1 t_b\}$ engendrent H .

En général, l'ensemble \mathcal{H} ainsi construit est de cardinal $2n$. On peut diminuer ce cardinal en choisissant convenablement les t_b , ce qui est intéressant d'un point de vue algorithmique. Nous préciserons cela au numéro suivant.

2.2.2. Utilisation des bases étoilées dans la méthode exposée au § 2.2.1.

Nous conservons les hypothèses et notations du § 2.2.1 : en particulier, X est connexe et non vide, F est le groupe libre à deux générateurs s_0 et s_1 , θ est l'anti-automorphisme de F qui applique s_0 sur s_0^{-1} et s_1 sur s_1^{-1} , a est un point de E et H son stabilisateur dans F .

Notons F_+ le sous-monoïde de F formé des éléments qui sont des produits de puissances positives de s_0 et de s_1 . Si f, f' et f'' sont des éléments de F_+ tels que $f = f' f''$, on dit que f' est un *préfixe* et f'' un *suffixe* de f .

Définition 1. On dit qu'un sous-ensemble T de F est étoilé par rapport à H si T vérifie les conditions suivantes :

- a) l'ensemble T est non vide et contenu dans F_+ ;
- b) l'application $t \mapsto tH$ de T dans F/H est injective ;
- c) tout suffixe d'un élément $t \in T$ est un élément de T .

La condition b) peut aussi se formuler en disant que l'application $t \mapsto ta$ de T dans E est injective. C'est pourquoi nous dirons aussi dans la suite qu'un ensemble étoilé par rapport à H est étoilé par rapport à a , ou simplement étoilé lorsque cela ne prête pas à confusion.

Remarque. Soit e l'élément neutre de F . L'ensemble $\{e\}$ est étoilé. Tout ensemble étoilé contient e et est de cardinal $\leq n$.

Définition 2. On appelle base étoilée de F (par rapport à H) un ensemble étoilé de cardinal n .

Proposition 2.4. L'ensemble F possède des bases étoilées. Plus précisément, tout élément maximal (pour la relation d'inclusion) de l'ensemble des parties étoilées de F est une base étoilée.

En effet, soit T un sous-ensemble étoilé maximal de F . Notons E_1 le sous-ensemble de E formé par les ta , pour $t \in T$, et E_2 son complémentaire dans E . S'il existe $x \in E_2$ tel que $\sigma_0^{-1}(x) \in E_1$, il existe $t \in T$ tel que $ta = \sigma_0^{-1}(x)$; l'ensemble $T' = T \cup \{s_0t\}$ est alors étoilé et contient T strictement, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité sur T . On a donc $\sigma_0^{-1}(E_2) \subset E_2$. Comme σ_0^{-1} est une bijection, on en déduit $\sigma_0^{-1}(E_2) = E_2$, ce qui s'écrit aussi $\sigma_0(E_2) = E_2$. De même, on a $\sigma_1(E_2) = E_2$. De ce fait, F laisse stable E_2 . Or les seuls sous-ensembles de E stables par F sont E et \emptyset , puisque F agit transitivement sur E . Comme E_1 n'est pas vide, on a $E_2 = \emptyset$ et T est de cardinal n .

Soit T une base étoilée. Pour tout $b \in E$, soit t_b l'unique élément de T tel que $t_b a = b$. Comme au § 2.2.1, considérons la partie génératrice $\mathcal{H} = \bigcup_{b \in E} \{t_{\sigma_0(b)}^{-1} s_0 t_b, t_{\sigma_1(b)}^{-1} s_1 t_b\}$ de H . On a $t_{\sigma_0(b)}^{-1} s_0 t_b = e$ si $s_0 t_b \in T$, et $t_{\sigma_1(b)}^{-1} s_1 t_b = e$ si $s_1 t_b \in T$. Le nombre d'éléments de \mathcal{H} distincts de e est donc inférieur au cardinal de $(s_0 T \cup s_1 T) - T$, qui est $n+1$ puisque $T - \{e\}$ est contenu dans $s_0 T \cup s_1 T$. En fait l'ensemble \mathcal{H} possède exactement $n+1$ éléments distincts de e , puisqu'il engendre H et que, d'après un théorème de Schreier, un groupe d'indice n d'un groupe libre à 2 générateurs est un groupe libre à $n+1$ générateurs.

2.3. Étude analytique locale des points singuliers de $\Gamma_{(C)}$.

L'ensemble $X(C) \times X^*(C)$ est une variété analytique complexe de dimension 2 et $\Gamma(C)$ en est un sous-espace analytique complexe de dimension 1.

Au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, ce sous-espace analytique est lisse (*i.e.* est une sous-variété analytique de dimension 1 de $X(\mathbb{C}) \times X^*(\mathbb{C})$).

Nous donnerons dans ce paragraphe une équation analytique locale de $\Gamma(\mathbb{C})$ au voisinage d'un de ses points P, lorsque celui-ci est au-dessus de 0, 1 et ∞ . (Noter que P est un point singulier de l'espace analytique $\Gamma(\mathbb{C})$ si et seulement si c'est un point singulier de la courbe algébrique $\Gamma(\mathbb{C})$.)

2.3.1. Le cas où P est au-dessus de 0.

Supposons que le point P de $\Gamma(\mathbb{C})$ soit au-dessus de 0. Il lui correspond, par la bijection décrite au § 2.1.2, un couple (A, B) d'orbites de $\langle \sigma_0 \rangle$ dans E. Notons k et l les cardinaux de A et B.

Considérons $\Gamma(\mathbb{C})$ comme plongé dans $X(\mathbb{C}) \times X^*(\mathbb{C})$ et notons x_1 et x_2 les projections de P sur $X(\mathbb{C})$ et $X^*(\mathbb{C})$. La fonction holomorphe $\underline{f} : X(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ a pour indice de ramification k en x_1 ; elle est donc la puissance k -ième d'une uniformisante analytique locale u de $X(\mathbb{C})$ au voisinage de x_1 . De même, $\underline{f}^* : X^*(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ est la puissance l -ième d'une uniformisante analytique locale v de $X^*(\mathbb{C})$ au voisinage de x_2 . Les fonctions u et v définissent un système de coordonnées locales de $X(\mathbb{C}) \times X^*(\mathbb{C})$ dans un voisinage de P dans lequel l'équation de $\Gamma(\mathbb{C})$ s'écrit

$$(3) \quad u^k - v^l = 0.$$

Posons $d = \text{pgcd}(k, l)$, $k' = k/d$ et $l' = l/d$. L'équation précédente s'écrit

$$(4) \quad \prod_{\zeta^d=1} (u^{k'} - \zeta v^{l'}) = 0.$$

Les d facteurs de cette dernière expression sont analytiquement irréductibles (*i.e.* irréductibles dans l'algèbre des séries convergentes en u et v). Les composantes irréductibles du germe en P de l'espace analytique $\Gamma(\mathbb{C})$ sont donc les d germes d'espaces analytiques irréductibles, dont les équations dans le système de coordonnées locales précédent s'écrivent $u^{k'} - \zeta v^{l'} = 0$, où ζ décrit l'ensemble μ_d des racines d -ièmes de l'unité; ces germes sont réduits. L'ensemble Φ de ces germes est muni d'un ordre cyclique, déduit de celui de μ_d , et qui ne dépend pas des choix de u et v .

Si Q est un antécédent de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C})$, notons I_Q l'image du germe de $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C})$ en Q par la surjection canonique $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{C})$. L'application $Q \mapsto I_Q$ est une bijection canonique de l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C})$ sur Φ , d'où, par transport de structure, un ordre cyclique sur l'ensemble de ces antécédents. Celui-ci peut-être décrit combinatoirement :

Proposition 2.5. *Lorsqu'on paramètre l'ensemble des antécédents de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C})$ par $\langle \Sigma_0 \rangle \setminus (A \times B)$ (cf. § 1.6.2), le successeur du point paramétré par $\langle \Sigma_0 \rangle(a, b)$ est celui paramétré par $\langle \Sigma_0 \rangle(\sigma_0(a), b)$.*

Soit $(a, b) \in A \times B$. La composante connexe de $\underline{g}^{-1}(]0, 1[)$ paramétrée par (a, b) possède au-dessus de chaque $t \in]0, 1[$ un unique point M_t . Soit Q l'antécédent de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ paramétré par $\langle \Sigma_0 \rangle(a, b)$, et $u^{k'} - \zeta v^{l'} = 0$ l'équation de I_Q . Lorsque t tend vers 0, M_t tend vers P en restant dans I_Q ; ses coordonnées $u(M_t)$ et $v(M_t)$ satisfont donc la relation $u(M_t)^{k'} - \zeta v(M_t)^{l'} = 0$.

Soit R l'antécédent de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$ paramétré par $\langle \Sigma_0 \rangle(\sigma_0(a), b)$, et $u^{k'} - \eta v^{l'} = 0$ l'équation de I_R . Soit N_t l'unique point au-dessus de t de la composante connexe de $\underline{g}^{-1}(]0, 1[)$ paramétrée par $(\sigma_0(a), b)$. On a, pour t suffisamment proche de 0, $u(N_t) = e^{2\pi i/k} u(M_t)$, $v(N_t) = v(M_t)$ et $u(N_t)^{k'} - \eta v(N_t)^{l'} = 0$, d'où $\eta = e^{2\pi i k'/k} \zeta = e^{2\pi i/d} \zeta$.

2.3.2. Le cas où P est au-dessus de 1 ou de ∞ .

Lorsque P est un point au-dessus de 1, on peut formuler des résultats analogues à ceux du § 2.3.1, en remplaçant partout σ_0 par σ_1 et Σ_0 par Σ_1 .

Lorsque P est un point au-dessus de ∞ , on peut formuler des résultats analogues à ceux du § 2.3.1, en prenant pour (A, B) l'élément de $\langle \sigma_\infty \rangle \setminus E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \setminus E$ correspondant à P , et en remplaçant partout σ_0 par σ_∞ et Σ_0 par Σ_∞ .

2.3.3. Conditions de lissité et de transversalité des composantes irréductibles du germe en P de $\Gamma(\mathbf{C})$.

Soit P un point de $\Gamma(\mathbf{C})$ au-dessus de 0, 1 ou ∞ . Soit Q un antécédent de P dans $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C})$. Adoptons les notations des § 2.3.1 et § 2.3.2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le germe d'espace analytique I_Q est lisse ;
- (ii) On a $k' = 1$ ou $l' = 1$;
- (iii) L'un des entiers k, l divise l'autre ;
- (iv) L'application composée $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$ est une immersion (au sens analytique) au voisinage de Q ;
- (v) Le morphisme composé $\tilde{\Gamma}(\mathbf{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{C}) \rightarrow X \times X^*$ est une immersion formelle au point Q .

On notera que la condition (iii) ne dépend pas du choix de l'antécédent Q de P . Lorsqu'elle est satisfaite, toutes les composantes irréductibles du germe en P de $\Gamma(\mathbf{C})$ sont des germes de courbes analytiques lisses de $X(\mathbf{C}) \times X^*(\mathbf{C})$. Pour que ces germes se croisent transversalement en P , il faut et il suffit que l'on ait $k = l$, comme on le constate sur leurs équations locales.

Exemple. Supposons que le point P soit un point réel de Γ . Le couple (A, B) qui le paramètre est alors tel que $B = A$ si P est au-dessus de 0 ou de 1, et tel que $B = \sigma_0(A)$ si P est au-dessus de ∞ (§ 1.6.5). Le cardinal k de A est donc égal au cardinal l de B . Par suite, les composantes irréductibles du germe en P de $\Gamma(\mathbf{C})$ sont lisses et se croisent transversalement en P .

2.4. Propriétés géométriques des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ et de leurs normalisées.

Soit C une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$ et soit \mathcal{O} l'orbite de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ qui lui est associée par la bijection (1) du § 2.1.1. Dans ce paragraphe, nous étudions certaines propriétés géométriques de C et de sa normalisée \tilde{C} en termes de la donnée combinatoire formée de l'ensemble \mathcal{O} muni de l'action de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$.

Rappelons que n désigne le degré du morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{P}_C^1$; c'est aussi le cardinal de E .

2.4.1. Le revêtement ramifié $\tilde{g}_{(C)} | \tilde{C}$, de \tilde{C} dans \mathbf{P}_C^1 .

Rappelons que $\tilde{g}_{(C)} : \tilde{\Gamma}_{(C)} \rightarrow \mathbf{P}_C^1$ est un revêtement ramifié, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_C^1 - \{0, 1, \infty\}$. Sa restriction à \tilde{C} est donc un revêtement ramifié $\tilde{C} \rightarrow \mathbf{P}_C^1$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_C^1 - \{0, 1, \infty\}$. Le dessin combinatoire qui lui est associé s'identifie à $(\mathcal{O}, \Sigma_0 | \mathcal{O}, \Sigma_1 | \mathcal{O})$ (§ 2.1.1). Le degré de ce revêtement est égal au cardinal de \mathcal{O} .

La somme des degrés des revêtements ramifiés $\tilde{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ ainsi définis, lorsque C parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$, est égale à n^2 .

2.4.2. Le morphisme canonique $\pi_C : C \rightarrow X$.

Considérons le morphisme $\pi_C : C \rightarrow X$, composé des plongements canoniques $C \rightarrow \Gamma_{(C)}$ et $\Gamma_{(C)} \rightarrow X \times X^*$ et de la projection de $X \times X^*$ sur le premier facteur. Il est fini et plat. Nous l'appellerons *le morphisme canonique de C dans X* . On a $f \circ \pi_C = g_{(C)} | C$.

Dans la suite de ce numéro, nous supposons X connexe. Le degré d_C de π_C est alors appelé *le degré de C sur X* . Le degré du revêtement ramifié $\tilde{g}_{(C)} | \tilde{C}$ est égal à nd_C . En particulier, c'est un multiple de n .

Remarques. 1) Ce dernier résultat peut aussi s'interpréter de manière combinatoire. En effet, soit F le groupe libre à deux générateurs s_0 et s_1 . Faisons opérer F sur $E \times E$ en faisant agir s_0 par Σ_0 et s_1 par Σ_1 , et sur E en faisant agir s_0 par σ_0 et s_1 par σ_1 . L'application $\text{pr}_1 : E \times E \rightarrow E$ est compatible à ces actions. Il en est de même de $\text{pr}_1 | \mathcal{O} : \mathcal{O} \rightarrow E$. Soit (a, b) un point de \mathcal{O} . Notons \mathcal{H} et H les stabilisateurs de (a, b) et a dans F . On a $\mathcal{H} \subset H$. Comme X est connexe, F opère transitivement sur E ; on a donc $n = \text{Card}E = [F : H]$. On a par suite $\text{Card}\mathcal{O} = [F : \mathcal{H}] = nd_C$, où $d_C = [H : \mathcal{H}]$. On a $d_C = \text{Card}\mathcal{O} \cap (\{a\} \times E)$ et de même $d_C = \text{Card}\mathcal{O} \cap (E \times \{b\})$.

2) Le morphisme $\pi'_C : C \rightarrow X^*$, composé des plongements canoniques $C \rightarrow \Gamma_{(C)}$ et $\Gamma_{(C)} \rightarrow X \times X^*$ et de la projection de $X \times X^*$ sur le second facteur, est aussi de degré d_C : en effet, on a $f \circ \pi_C = f^* \circ \pi'_C$ et $\text{deg}(f^*) = n$.

2.4.3. Le genre de \tilde{C} .

Proposition 2.6. *Le genre $g(\tilde{C})$ de \tilde{C} est donné par la formule*

$$2g(\tilde{C}) - 2 = \text{Card}(\mathcal{O}) - \text{Card}(\langle \Sigma_0 \rangle \setminus \mathcal{O}) - \text{Card}(\langle \Sigma_1 \rangle \setminus \mathcal{O}) - \text{Card}(\langle \Sigma_\infty \rangle \setminus \mathcal{O}).$$

En effet, le genre de \tilde{C} est le même que celui du dessin combinatoire $(\mathcal{O}, \Sigma_0 | \mathcal{O}, \Sigma_1 | \mathcal{O})$ (§ 2.4.1 et § B.3.2); or ce dernier est par définition donné par la formule ci-dessus (§ B.2.2, remarque).

Corollaire. *Supposons X connexe et notons g son genre. Soit d_C le degré de C sur X (égal à $\text{Card}\mathcal{O}/n$, d’après § 2.4.2). On a*

$$d_C(g - 1) + 1 \leq g(\tilde{C}) \leq \frac{n(d_C - 1)}{2} + g.$$

D’après la remarque du § 2.4.2, la restriction à \mathcal{O} de la première projection de $E \times E \rightarrow E$ est une application surjective de \mathcal{O} dans E , et ses fibres sont de cardinal d_C . L’application $\langle \Sigma_0 \rangle \setminus \mathcal{O} \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle \setminus E$ qui s’en déduit par passage au quotient est donc surjective, et ses fibres sont de cardinal $\leq d$. Cela prouve que l’on a $l_0 \leq \text{Card}(\langle \Sigma_0 \rangle \setminus \mathcal{O}) \leq d_C l_0$, où $l_0 = \text{Card}(\langle \sigma_0 \rangle \setminus E)$. On démontre de même les inégalités $l_1 \leq \text{Card}(\langle \Sigma_1 \rangle \setminus \mathcal{O}) \leq d_C l_1$ et $l_\infty \leq \text{Card}(\langle \Sigma_\infty \rangle \setminus \mathcal{O}) \leq d_C l_\infty$, où $l_1 = \text{Card}(\langle \sigma_1 \rangle \setminus E)$ et $l_\infty = \text{Card}(\langle \sigma_\infty \rangle \setminus E)$. En appliquant la prop. 2.6, on obtient

$$dn - d(l_0 + l_1 + l_\infty) \leq 2g(\tilde{C}) - 2 \leq dn - (l_0 + l_1 + l_\infty)$$

et le corollaire en résulte puisque l’on a $2g - 2 = n - (l_0 + l_1 + l_\infty)$.

2.4.4. Conditions nécessaires et suffisantes pour que C soit lisse.

Nous munirons la composante irréductible C de $\Gamma_{(C)}$ de son unique structure de sous-schéma fermé réduit de $\Gamma_{(C)}$. C’est une courbe projective. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu’elle soit lisse.

Théorème 2. *Pour que la composante irréductible C soit lisse, il faut et il suffit que, pour tout élément (A, B) de $\langle \sigma_0 \rangle \setminus E \times \langle \sigma_0 \rangle \setminus E$, de $\langle \sigma_1 \rangle \setminus E \times \langle \sigma_1 \rangle \setminus E$ et de $\langle \sigma_\infty \rangle \setminus E \times \langle \sigma_\infty^* \rangle \setminus E$, l’ensemble $\mathcal{O} \cap (A \times B)$ soit de cardinal $\leq \sup(k, l)$, où $k = \text{Card}(A)$ et $l = \text{Card}(B)$ (ce qui implique que $\mathcal{O} \cap (A \times B)$ est soit vide, soit de cardinal $\sup(k, l)$).*

La courbe C est lisse au-dessus de $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Soit P un point de C au-dessus de 0 . Un tel point est paramétré par un élément (A, B) de $\langle \sigma_0 \rangle \setminus E \times \langle \sigma_0 \rangle \setminus E$ tel que $\mathcal{O} \cap (A \times B) \neq \emptyset$. D’après § 2.1.4, le cardinal de $\mathcal{O} \cap (A \times B)$ est égal à $m \text{ppcm}(k, l)$, où m est le nombre d’antécédents de P dans la normalisée \tilde{C} de C , où $k = \text{Card}(A)$ et $l = \text{Card}(B)$. Pour que l’ensemble $\mathcal{O} \cap (A \times B)$ soit de cardinal $\leq \sup(k, l)$, il faut et il suffit que l’on ait $m = 1$ et que l’un des entiers k, l divise l’autre; dans ce cas, son cardinal est égal à $\sup(k, l)$.

La condition $m = 1$ signifie que P possède un unique antécédent Q dans \tilde{C} ; le fait que l'un des entiers k, l divise l'autre équivaut alors à dire que le morphisme canonique $\tilde{C} \rightarrow X \times X^*$ est une immersion formelle au point Q (§ 2.3.3). Ces deux conditions réunies signifient que C est lisse au point P . En traduisant de manière analogue la lissité de C en les points au-dessus de 1 et de ∞ , on obtient le théorème.

2.5. Composantes irréductibles de la courbe algébrique réelle Γ .

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux composantes irréductibles de la courbe algébrique réelle Γ . L'application qui à une telle composante associe sa trace sur Γ' est une bijection de l'ensemble des composantes irréductibles de Γ sur l'ensemble des composantes irréductibles de Γ' . On définit de même une bijection de l'ensemble des composantes irréductibles de $\tilde{\Gamma}$ sur l'ensemble des composantes irréductibles de Γ' . Par ailleurs, comme Γ' et $\tilde{\Gamma}$ sont des courbes algébriques lisses, leurs composantes irréductibles ne sont autres que leurs composantes connexes.

2.5.1. Composantes irréductibles, composantes géométriquement irréductibles de Γ .

Soit C une composante irréductible de Γ . Si C est géométriquement (= absolument) irréductible, sa complexifiée est une composante irréductible de $\Gamma_{(\mathbb{C})}$ fixée par la conjugaison complexe (et alors dite *définie sur \mathbf{R}*). Si C n'est pas géométriquement irréductible, sa complexifiée est réunion de deux composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbb{C})}$ échangées par la conjugaison complexe.

Ainsi, les composantes irréductibles de Γ correspondent bijectivement aux orbites de la conjugaison complexe dans l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbb{C})}$. Lorsqu'on identifie l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbb{C})}$ à $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \setminus (E \times E)$ par la bijection (1) du § 2.1.1, la conjugaison complexe s'identifie à l'involution c de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \setminus (E \times E)$ déduite par passage au quotient de $(a, b) \mapsto (b, a)$.

Les composantes irréductibles de Γ qui sont géométriquement irréductibles correspondent donc aux points fixes de c dans $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \setminus (E \times E)$ bijectivement.

2.5.2. Un exemple où Γ a une composante irréductible non géométriquement irréductible.

Soit (E, σ_0, σ_1) le dessin combinatoire défini par $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\sigma_0 = (ab)(cd)(ef)$ et $\sigma_1 = (bc)(de)(fa)$. Il est connexe de genre 0. Pour l'action du groupe $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$, $E \times E$ possède six orbites $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6$, sur lesquelles Σ_0 et Σ_1 opèrent comme suit (en écrivant xy l'élément (x, y) de $E \times E$ pour alléger les notations)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{aa, bb, cc, dd, ee, ff\} & \mathcal{O}_2 &= \{ab, ba, fc, ed, de, cf\} \\ \mathcal{O}_3 &= \{ef, fe, bc, cb, ad, da\} & \mathcal{O}_4 &= \{cd, dc, be, eb, af, fa\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_5 = \{ac, bd, ce, df, ea, fb\} \quad \mathcal{O}_6 = \{ae, bf, ca, db, ec, fd\}$$

Il leur correspond six composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$. Les quatre premières orbites sont stables par l'involution $xy \mapsto yx$; les quatre composantes irréductibles correspondantes de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ sont définies sur \mathbf{R} . Par contre l'involution $xy \mapsto yx$ échange \mathcal{O}_5 et \mathcal{O}_6 ; les deux composantes irréductibles correspondantes de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ sont conjuguées, et proviennent d'une composante irréductible de Γ non géométriquement irréductible.

Retrouvons ce résultat par un calcul direct. Le dessin (E, σ_0, σ_1) est isomorphe à celui qui est associé au revêtement ramifié $f : \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, où f est la fonction de Belyi définie par

$$f(z) = -\frac{(z^3 - 1)^2}{4z^3}.$$

L'égalité $f(z) = \overline{f(z)}$ se traduit, en posant $z = x + iy$, par l'équation (écrite sous forme d'un produit de facteurs irréductibles sur \mathbf{R})

$$4y(y - x\sqrt{3})(y + x\sqrt{3})(y^2 + x^2 - 1)((y^2 + x^2)^2 + y^2 + x^2 + 1) = 0.$$

Les quatre premiers facteurs sont irréductibles sur \mathbf{C} ; ils correspondent aux quatre composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ définies sur \mathbf{R} . Quant au dernier facteur de l'équation, il correspond à une composante irréductible de Γ qui n'est pas géométriquement irréductible (et n'a pas de points réels); il se décompose sur \mathbf{C} en produit de deux facteurs irréductibles conjugués

$$(y^2 + x^2)^2 + y^2 + x^2 + 1 = (y^2 + x^2 - j)(y^2 + x^2 - j^2),$$

où $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Les facteurs $y^2 + x^2 - j$ et $y^2 + x^2 - j^2$ correspondent aux composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ associées aux orbites \mathcal{O}_5 et \mathcal{O}_6 respectivement.

2.5.3. Composantes irréductibles de Γ sans points réels.

Proposition 2.7. *Une composante irréductible de Γ qui n'est pas géométriquement irréductible n'a pas de point réel.*

Soit C une telle composante et \tilde{C} sa normalisée. Soit P un point complexe de C et Q un point de \tilde{C} au-dessus de P . La courbe complexifiée de \tilde{C} a deux composantes irréductibles conjuguées, qui ne s'intersectent pas puisque \tilde{C} est lisse. Le point Q est situé sur l'une d'elle, et son conjugué sur l'autre. Il en résulte que Q n'est pas réel. D'après le th. 1, § 1.6.7, P n'est pas réel.

Proposition 2.8. *Soit C une composante irréductible de Γ qui est géométriquement irréductible. Si C a des points réels, elle en a au-dessus de 0 ou de 1.*

Si C a un point réel au-dessus de 0 ou de 1, c'est fini.

Supposons que C ait un point réel P au-dessus d'un point de $\mathbf{R} - \{0, 1\}$. Le point P appartient à une composante connexe (unique) de l'image réciproque par $g : \Gamma(C) \rightarrow \mathbf{P}_C^1(C)$ de $] \infty, 0[$, $]0, 1[$ ou $]1, \infty[$. Celle-ci est contenue dans l'ensemble des points complexes de C , et égale à sa conjuguée complexe vu son unicité; en d'autres termes, elle est contenue dans $C(\mathbf{R})$. Son adhérence contient alors un point de $C(\mathbf{R})$ au-dessus de 0 ou de 1.

Supposons enfin que C ait un point réel au-dessus de ∞ . Tout antécédent de P dans la normalisée \tilde{C} de C est alors réel (§ 1.6.7, th. 1). Comme la courbe \tilde{C} est lisse, le fait que l'ensemble $\tilde{C}(\mathbf{R})$ soit non vide implique qu'il est infini. Mais alors $C(\mathbf{R})$ est infini et C possède des points réels au-dessus de \mathbf{R} . On est ainsi ramené aux cas déjà traités.

Corollaire. *Soit C une composante irréductible de $\Gamma(C)$. Notons \mathcal{O} l'orbite de $E \times E$ pour l'action de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ qui lui est associée par la bijection (1) du § 2.1.1. Pour que C possède des points réels, il faut et il suffit qu'il existe $(a, b) \in \mathcal{O}$ tel que $b \in \langle \sigma_0 \rangle a$ ou $b \in \langle \sigma_1 \rangle a$.*

D'après les prop. 2.7 et 2.8, pour que C possède des points réels, il faut et il suffit qu'elle en possède au-dessus de 0 ou de 1. Les points complexes de C au-dessus de 0 sont paramétrés par les classes dans $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E \times \langle \sigma_0 \rangle \backslash E$ des éléments (a, b) de \mathcal{O} ; un tel point est réel si et seulement si $\langle \sigma_0 \rangle a = \langle \sigma_0 \rangle b$, i.e. $b \in \langle \sigma_0 \rangle a$. On décrit de même les points réels de C au-dessus de 1 en remplaçant σ_0 par σ_1 . Le corollaire en résulte.

2.5.4. *Un exemple où Γ a une composante géométriquement irréductible sans points réels.*

Considérons le dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) où $E = \{a, b, c, d\}$, $\sigma_0 = (ab)(cd)$ et $\sigma_1 = (ad)(bc)$. On a $\sigma_\infty = (ac)(bd)$. Il est connexe de genre 0.

Pour l'action du groupe $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$, $E \times E$ possède quatre orbites :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{aa, bb, cc, dd\}, \quad \mathcal{O}_2 = \{ab, ba, dc, cd\}, \\ \mathcal{O}_3 &= \{ad, bc, da, cb\}, \quad \mathcal{O}_4 = \{ac, bd, db, ca\} \end{aligned}$$

(en écrivant xy l'élément (x, y) de $E \times E$ pour alléger les notations).

Ces orbites sont stables par l'involution $xy \mapsto yx$. Il en résulte que Γ possède quatre composantes irréductibles, toutes géométriquement irréductibles. Celle qui correspond à \mathcal{O}_4 ne possède aucun point réel au-dessus de 0, de 1 ou de ∞ : elle ne possède donc aucun point réel, d'après la prop. 2.8

Ce résultat se retrouve par un calcul direct. Le dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) est isomorphe à celui qui est associé au revêtement ramifié $f : \mathbf{P}_C^1 \rightarrow \mathbf{P}_C^1$, où f est la fonction de Belyi définie par

$$f(z) = -\frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2}.$$

L'égalité $f(z) = \overline{f(z)}$ se traduit, en posant $z = x + iy$, par l'équation (écrite sous forme d'un produit de facteurs irréductibles sur \mathbf{R})

$$xy(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Les quatre facteurs sont irréductibles sur \mathbf{C} ; on retrouve ainsi le fait que Γ possède quatre composantes irréductibles, toutes géométriquement irréductibles.

2.6. Le cas des revêtements ramifiés (X, f) rationnels sur \mathbf{R} .

2.6.1. Critères de rationalité sur \mathbf{R} .

Le revêtement ramifié (X, f) de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ est dit *rationnel sur \mathbf{R}* s'il est isomorphe à son complexe conjugué (X^*, f^*) , c'est-à-dire si son corps de rationalité (§ B.4.3) est contenu dans \mathbf{R} .

Le dessin combinatoire associé à (X^*, f^*) s'identifie canoniquement à $(E, \sigma_0^{-1}, \sigma_1^{-1})$. On déduit de l'équivalence entre la catégorie des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, et celle des dessins combinatoires, une bijection canonique entre :

- a) l'ensemble des isomorphismes de revêtements ramifiés $\varphi: (X, f) \rightarrow (X^*, f^*)$;
- b) l'ensemble des permutations u de E telles que $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ et $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$.

En particulier, pour que (X, f) soit rationnel sur \mathbf{R} , il faut et il suffit qu'il existe une permutation u de E telle que $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ et $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$.

Proposition 2.9. *Supposons X connexe. Il existe alors des bijections canoniques entre les ensembles a) et b) ci-dessus et :*

c) l'ensemble des composantes irréductibles C de $\Gamma_{(C)}$ de degré 1 sur X (cf. § 2.4.2);

d) l'ensemble des orbites \mathcal{O} de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ de cardinal n .

Ces bijections sont caractérisées comme suit: si $\varphi, u, C, \mathcal{O}$ se correspondent par ces bijections, \mathcal{O} est le graphe de u , C est lisse et est le graphe de φ , et \mathcal{O} est l'image de C par la bijection (1) du § 2.1.1.

Si u est une permutation de E telle que $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ et $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$, son graphe, i.e. l'ensemble des éléments de $E \times E$ de la forme $(a, u(a))$, est une orbite de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ de cardinal n . Inversement, si \mathcal{O} est une telle orbite, les restrictions à \mathcal{O} des deux projections de $E \times E$ sur E sont des applications bijectives de \mathcal{O} sur E (§ 2.4.2, remarque 1), donc \mathcal{O} est le graphe d'une permutation u de E ; le fait que \mathcal{O} soit stable par Σ_0 (resp. Σ_1) se traduit alors par la relation $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ (resp. $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$). Cela fournit la bijection entre les ensembles b) et d).

La bijection (1) du § 2.1.1 définit par restriction une bijection entre les ensembles c) et d) d'après le § 2.4.2.

Soit C une composante irréductible de $\Gamma_{(C)}$ de degré 1 sur X . Les restrictions p_1 et p_2 à C des projections de $X \times X^*$ sur X et X^* sont des

morphismes finis et plats de degré 1 (§ 2.4.2), *i.e.* des isomorphismes, et l'on a $f^* \circ p_2 = f \circ p_1$. Par suite C est le graphe d'un isomorphisme φ de (X, f) sur (X^*, f^*) . Il est clair que φ est aussi l'image de C par la composée des bijections entre les ensembles $c)$ et $d)$, $d)$ et $b)$, $b)$ et $a)$ déjà définies.

Corollaire. *Supposons X connexe. Pour que (X, f) soit rationnel sur \mathbf{R} , il faut et il suffit que $\Gamma_{(C)}$ possède une composante irréductible C de degré 1 sur X , ou encore qu'une orbite de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ soit de cardinal n .*

2.6.2. Composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ lorsque le corps de rationalité de (X, f) est réel.

Supposons que le corps de rationalité de (X, f) soit réel. Il existe alors (§ 2.6.1), une permutation u de E telle que $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ et $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$; choisissons-en une. L'application $(a, b) \mapsto (a, u(b))$ de $E \times E$ dans $E \times E$ est bijective, et transforme les permutations $\sigma_0 \times \sigma_0$ et $\sigma_1 \times \sigma_1$ de $E \times E$ en Σ_0 et Σ_1 . Elle définit donc par passage aux quotients une bijection de $\langle \sigma_0 \times \sigma_0, \sigma_1 \times \sigma_1 \rangle \backslash (E \times E)$ sur $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle \backslash (E \times E)$, et par suite sur l'ensemble des composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ (§ 2.1.1).

Proposition 2.10. *Supposons que le corps de rationalité de (X, f) soit réel et que le degré de f soit ≥ 2 . La courbe $\Gamma_{(C)}$ possède alors au moins deux composantes irréductibles. Elle en possède exactement deux si et seulement si le groupe $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ opère doublement transitivement dans E .*

Le nombre de composantes irréductibles de $\Gamma_{(C)}$ est égal, d'après ce qui précède, au nombre d'orbites de $\langle \sigma_0 \times \sigma_0, \sigma_1 \times \sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$. La diagonale de $E \times E$ et son complémentaire sont deux ensembles stables par $\langle \sigma_0 \times \sigma_0, \sigma_1 \times \sigma_1 \rangle$, et non vides puisque $n \geq 2$. Pour que chacun de ces ensembles soit une orbite de $\langle \sigma_0 \times \sigma_0, \sigma_1 \times \sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$, il faut et il suffit que $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ opère doublement transitivement dans E . La prop. 2.10 en résulte.

2.6.3. Modèles réels de (X, f) .

Si φ est un isomorphisme de (X, f) dans (X^*, f^*) , φ est aussi un isomorphisme de (X^*, f^*) dans (X, f) (§ A.1.3), qu'il sera cependant commode de désigner par une autre lettre, disons $\bar{\varphi}$. Le composé $\bar{\varphi} \circ \varphi$ est alors un automorphisme de (X, f) . Nous dirons que φ est *involutif* si l'on a $\bar{\varphi} \circ \varphi = 1_X$; c'est le cas par exemple lorsque (X, f) n'a pas d'automorphismes non triviaux.

Rappelons (§ B.4.3) qu'un *modèle* réel de (X, f) est la donnée d'un couple $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$, où $X_{\mathbf{R}}$ est une courbe algébrique sur \mathbf{R} et $f_{\mathbf{R}} : X_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ un morphisme de \mathbf{R} -schémas, ce couple étant muni d'un isomorphisme de son complexifié sur (X, f) . Comme le \mathbf{C} -schéma $(X_{\mathbf{R}})_{(\mathbf{C})}$ est canoniquement isomorphe à son conjugué complexe (§ A.1.4), un modèle réel de (X, f) fournit un isomorphisme de (X, f) dans (X^*, f^*) ; cet isomorphisme est involutif. Inversement, tout isomorphisme involutif de (X, f) dans (X^*, f^*) provient

de cette manière d'un modèle réel de (X, f) , unique à isomorphisme unique près : c'est un cas particulier de la descente de Weil. En résumé, on a une bijection entre :

- l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles réels de (X, f) ;
- l'ensemble des isomorphismes involutifs de (X, f) dans (X^*, f^*) .

Remarque 1. Soient $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ et $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$ deux modèles réels de (X, f) . On appelle isomorphisme entre ces modèles un isomorphisme de \mathbf{R} -schémas $h : X_{\mathbf{R}} \rightarrow X'_{\mathbf{R}}$ tel que $f'_{\mathbf{R}} \circ h = f_{\mathbf{R}}$ et qui soit compatible avec les isomorphismes entre (X, f) et les complexifiés de $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ et de $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$; lorsqu'un tel isomorphisme existe, il est unique. Un isomorphisme de \mathbf{R} -schémas $h : X_{\mathbf{R}} \rightarrow X'_{\mathbf{R}}$ tel que $f'_{\mathbf{R}} \circ h = f_{\mathbf{R}}$ mais pour lequel on exige pas la dernière propriété de compatibilité est appelé un isomorphisme de revêtements ramifiés entre $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ et $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$; un tel isomorphisme n'est pas forcément unique.

Proposition 2.11. *Supposons X connexe. On déduit de ce qui précède et de la prop. 2.9 des bijections canoniques entre :*

- a) l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles réels de (X, f) ;
- b) l'ensemble des involutions u de E telles que $u \circ \sigma_0 = \sigma_0^{-1} \circ u$ et $u \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ u$;
- c) l'ensemble des composantes irréductibles réelles C de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$, de degré 1 sur X ;
- d) l'ensemble des orbites \mathcal{O} de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ de cardinal n stables par l'involution $(a, b) \mapsto (b, a)$.

C'est immédiat, compte tenu du § 2.5.1.

Corollaire. *Pour que \mathbf{R} soit un corps de définition de (X, f) , i.e. pour que (X, f) possède un modèle réel, il faut et il suffit que $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ possède une composante irréductible réelle C de degré 1 sur X .*

Remarque 2. Soit C une composante irréductible réelle de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ de degré 1 sur X . C'est la complexifiée d'une composante absolument irréductible $C_{\mathbf{R}}$ de Γ . Le couple $(C_{\mathbf{R}}, g|_{C_{\mathbf{R}}})$, muni de l'isomorphisme canonique $C \rightarrow X$, est un modèle réel de (X, f) . la classe d'isomorphisme de ce modèle est celle qui correspond à C par la bijection entre les ensembles c) et a) de la prop. 2.11.

Remarque 3. Soient $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ et $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$ deux modèles réels de (X, f) , u et u' les involutions de E correspondantes. On a une bijection canonique entre l'ensemble des isomorphismes de revêtements ramifiés de $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ dans $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$ et l'ensemble des permutations v de E qui commutent à σ_0 et σ_1 et sont telles que $v \circ u = u' \circ v$.

2.6.4. Modèles réels de (X, f) lorsque X est de genre 0.

Dans ce numéro, nous supposons que la courbe X est la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ sur \mathbf{C} . Si $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ est un modèle de (X, f) sur \mathbf{R} , la courbe algébrique

réelle $X_{\mathbf{R}}$ peut alors soit être isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ (et en ce cas, elle l'est canoniquement, cf. remarque 1 du § 2.6.3), soit être isomorphe à la conique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ dans $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$; on est dans le premier cas si et seulement si $X_{\mathbf{R}}$ a des points réels.

Proposition 2.12. *On déduit de la prop. 2.11 des bijections canoniques entre :*

- a) l'ensemble des modèles réels de $(\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1, f)$ de la forme $(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1, f_{\mathbf{R}})$;
- b) l'ensemble des composantes irréductibles réelles C de $\Gamma_{(C)}$, de degré 1 sur X , qui possèdent des points réels;
- c) l'ensemble des orbites \mathcal{O} de $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$ dans $E \times E$ de cardinal n contenant un point (a, b) tel que $b \in \langle \sigma_0 \rangle a$ ou $b \in \langle \sigma_1 \rangle a$.

Cela résulte de la remarque 2 de 2.6.3 et du cor. de la prop. 2.8.

En particulier, il existe des revêtements ramifiés (associés à un dessin d'enfant) rationnels sur \mathbf{R} et ne possédant aucun modèle réel, des revêtements ramifiés possédant un unique modèle réel $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ (à isomorphisme unique près) et tel que la courbe $X_{\mathbf{R}}$ n'ait pas de points réels et ne soit pas isomorphe à $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$, des revêtements ramifiés possédant exactement deux modèles réels $(X_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}})$ et $(X'_{\mathbf{R}}, f'_{\mathbf{R}})$ (à isomorphisme près) tels que l'une des courbes algébriques réelles $X_{\mathbf{R}}, X'_{\mathbf{R}}$ a des points réels et est isomorphe à $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ et l'autre non. Jean-Marc Couveignes a fourni un certain nombre d'exemples de tels revêtements [2].

2.7. Dessins conjugués sous $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

2.7.1. Propriétés de Γ invariantes par l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Pour tout $\tau \in \text{Aut}(\mathbf{C})$, on note $({}^{\tau}X, {}^{\tau}f)$ le revêtement ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ déduit de (X, f) par le changement de base $\text{Spec}(\tau)$ (§ B.4.3); il ne dépend que la restriction de τ à $\overline{\mathbf{Q}}$ (*loc. cit.*). Il est isomorphe à (X, f) si seulement si τ fixe le corps de rationalité de (X, f) (*loc. cit.*).

Soit $\tau \in \text{Aut}(\mathbf{C})$. Notons (E, σ_0, σ_1) et $(E_{\tau}, \sigma'_0, \sigma'_1)$ les dessins combinatoires associés aux revêtements ramifiés (X, f) et $({}^{\tau}X, {}^{\tau}f)$, Γ et Γ_{τ} les courbes algébriques réelles construites à partir de (X, f) et $({}^{\tau}X, {}^{\tau}f)$ comme dans le § 1.1.1.

La permutation σ_0 (resp. σ_1 ; resp. $\sigma_{\infty} = \sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}$) de E et la permutation σ'_0 (resp. σ'_1 ; resp. $\sigma'_{\infty} = \sigma'_0{}^{-1}\sigma'_1{}^{-1}$) de E_{τ} se décomposent en un même nombre de cycles, de mêmes longueurs (à permutation près). Il en résulte, vu les paragraphes 2.1 et 2.3, qu'il existe une bijection de l'ensemble des points de Γ au-dessus de 0 (resp. de 1; resp. de ∞) sur l'ensemble des points de Γ_{τ} au-dessus de 0 (resp. de 1; resp. de ∞) préservant les propriétés suivantes : la structure analytique locale de la courbe au voisinage du point, le nombre d'antécédents du point dans la normalisée de la courbe, l'action la conjugaison complexe sur les points, et en particulier le fait que les points soient réels; il n'y a en général pas de choix privilégié d'une telle bijection.

Nous donnerons au § 2.7.2 un exemple montrant que le nombre de composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ n'est pas toujours le même que celui de $(\Gamma_\tau)_{(\mathbf{C})}$; c'est cependant le cas lorsque τ est la conjugaison complexe (§ 1.8). Même lorsque $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ et $(\Gamma_\tau)_{(\mathbf{C})}$ ont le même nombre de composantes irréductibles, les normalisées de celles-ci n'ont pas nécessairement les mêmes genres. Toutefois :

Proposition 2.13. *La somme des caractéristiques d'Euler Poincaré des normalisées des composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ est égale à la somme analogue pour $(\Gamma_\tau)_{(\mathbf{C})}$.*

Rappelons que la caractéristique d'Euler Poincaré de la normalisée $\tilde{\mathbf{C}}$ d'une telle composante est par définition $2 - 2g(\tilde{\mathbf{C}})$. La prop. 2.13 résulte immédiatement des propriétés d'invariance énoncées au début de ce § 2.7 et de la prop. 2.6.

2.7.2. *Un exemple où le nombre de composantes irréductibles de $\Gamma_{(\mathbf{C})}$ n'est pas préservé par l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.*

Considérons, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, le polynôme

$$f_i(z) = \left(\left(1 - \frac{\alpha_i^2}{2} \right) z^2 - z + 1 \right)^2 \left((1 + \alpha_i^2) z^2 + 2z + 1 \right),$$

où $\alpha_0 = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}j$, et $\alpha_2 = \sqrt[3]{2}j^2$ (en notant j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$). On a

$$1 - f_i(z) = z^3 \left(z - (1 + \alpha_i^2) \right)^2 \left(\left(\frac{3\alpha_i}{2} - 2 \right) z + 2 - \alpha_i^2 \right).$$

Les morphismes $f_i : \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ sont des revêtements ramifiés finis de degré 6, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, conjugués par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. La fibre de chacun d'eux au-dessus de 0 contient quatre points d'indices de ramification 2, 2, 1, 1, celle au-dessus de 1 contient trois points d'indices de ramification 3, 2, 1, et celle au-dessus de ∞ un unique point d'indice de ramification 6. De plus, f_0 est défini sur \mathbf{R} , et f_2 est le conjugué complexe de f_1 .

Notons $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ les courbes algébriques réelles construites à partir des revêtements ramifiés f_0, f_1, f_2 par la méthode exposée au § 1.1.1.

Proposition 2.14. *La courbe Γ_0 a deux composantes irréductibles ; celles-ci sont absolument irréductibles, et leurs normalisées sont de genres 0 et 1. Chacune des courbes Γ_1, Γ_2 est absolument irréductible, et sa normalisée est de genre 0.*

Le dessin combinatoire associé à D_0 est isomorphe à (E, σ_0, σ_1) , où

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad \sigma_0 = (ab)(cd)(e)(f), \quad \sigma_1 = (a)(bc)(def).$$

On a $\sigma_\infty = (abdfec)$ et $\sigma_\infty^* = (abdefc)$. Pour l'action du groupe $\langle \Sigma_0, \Sigma_1 \rangle$, l'ensemble $E \times E$ possède deux orbites : $\mathcal{O} = \{aa, bb, cc, dd, ef, fe\}$ et $\mathcal{O}' = \{ab, ba, ac, bd, ad, bc, ae, be, af, bf, ca, db, cb, da, cd, dc, ce, de\}$. Le nombre de cycles de Σ_0 (resp. Σ_1 ; resp. Σ_∞) sur \mathcal{O} est égal à 4 (resp. 3; resp. 1); et sur \mathcal{O}' , il est égal à 16 (resp. 9; resp. 5).

Ces orbites sont stables par l'involution $xy \mapsto yx$. Il en résulte que la courbe Γ_0 a deux composantes irréductibles et que celles-ci sont absolument irréductibles. D'après la prop. 2.6, les genres g_0 et g'_0 de leurs normalisées sont donnés par $2g_0 - 2 = 6 - 4 - 3 - 1$ et $2g'_0 - 2 = 30 - 16 - 9 - 5$, d'où $g_0 = 0$ et $g'_0 = 1$.

Quant au dessin combinatoire associé à D_1 , il est isomorphe à $(E, \sigma'_0, \sigma'_1)$, où

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad \sigma'_0 = (ae)(b)(cd)(f), \quad \sigma'_1 = (a)(bc)(def).$$

On a $\sigma'_\infty = \sigma'_0{}^{-1}\sigma'_1{}^{-1} = (aecbdf)$ et $\sigma'_\infty{}^* = \sigma'_0\sigma'_1 = (aefcbd)$. Le groupe $\langle \Sigma'_0, \Sigma'_1 \rangle$, où $\Sigma'_0 = \sigma'_0 \times \sigma'_0{}^{-1}$ et $\Sigma'_1 = \sigma'_1 \times \sigma'_1{}^{-1}$, opère transitivement sur $E \times E$. Le nombre de cycles de Σ'_0 (resp. Σ'_1 ; resp. Σ'_∞) sur $E \times E$ est égal à 20 (resp. 12; resp. 6). Il en résulte que la courbe Γ_1 est absolument irréductible, et que son genre g_1 est donné par $2g_1 - 2 = 36 - 20 - 12 - 6$, d'où $g_1 = 0$. Il en est de même de Γ_2 , puisque le revêtement ramifié f_2 est le conjugué complexe de f_1 .

Dans cet exemple, les complexifiées des courbes Γ_0 et Γ_1 n'ont donc pas le même nombre de composantes irréductibles, bien que les revêtements ramifiés f_0 et f_1 à partir desquels elles ont été construites soient conjugués par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$; on constate aussi que la relation $g_0 + g'_0 = g_1 + 1$ prédite par la prop. 2.13 est bien satisfaite.

Annexe A. Restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R}

A.1. C-schémas et R-schémas.

Soit \mathbf{C} le corps des nombres complexes. Un schéma au-dessus du schéma $\text{Spec}(\mathbf{C})$ est par définition un couple $X = (\underline{X}, p)$, où \underline{X} est un schéma et p un morphisme de schémas de \underline{X} dans $\text{Spec}(\mathbf{C})$. On dit que \underline{X} est le schéma sous-jacent à X et que p est le morphisme structural de X . La donnée de p équivaut à celle d'un homomorphisme d'anneaux de \mathbf{C} dans $H^0(\underline{X}, \mathcal{O}_{\underline{X}})$. Un schéma au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{C})$ est aussi appelé un schéma au-dessus de \mathbf{C} ou un \mathbf{C} -schéma.

Soient $X = (\underline{X}, p)$ et $X' = (\underline{X}', p')$ deux \mathbf{C} -schémas. Un morphisme de schémas au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{C})$ de X dans X' est par définition un morphisme de schémas $u : \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ tel que $p' \circ u = p$. Un tel morphisme est aussi appelé un morphisme de schémas au-dessus de \mathbf{C} ou un \mathbf{C} -morphisme. L'ensemble des \mathbf{C} -morphisms de X dans X' est noté $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, X')$.

Le produit (fibré au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{C})$) de deux \mathbf{C} -schémas X et X' est noté $X \times_{\mathbf{C}} X'$, ou $X \times X'$ lorsque cela ne prête pas à confusion.

On utilise une terminologie et des notations analogues pour les schémas au-dessus du spectre $\text{Spec}(\mathbf{R})$ du corps des nombres réels.

A.1.1. Restriction des scalaires de \mathbf{C} à \mathbf{R} .

Notons ι l’injection canonique de \mathbf{R} dans \mathbf{C} et $\text{Spec}(\iota) : \text{Spec}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{R})$ le morphisme de schémas correspondant.

Soit $X = (\underline{X}, p)$ un \mathbf{C} -schéma. Alors $(\underline{X}, \text{Spec}(\iota) \circ p)$ est un \mathbf{R} -schéma qui a même schéma sous-jacent que X . On le note $X_{[\mathbf{R}]}$ et on l’appelle *le \mathbf{R} -schéma déduit de X par restriction des scalaires*, ou encore *le \mathbf{R} -schéma sous-jacent à X* .

A.1.2. Extension des scalaires de \mathbf{R} à \mathbf{C} .

Soit $Y = (\underline{Y}, q)$ un \mathbf{R} -schéma. Alors $(\text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{Y}, \text{pr}_1)$ est un \mathbf{C} -schéma. On le note $Y_{(\mathbf{C})}$ et on l’appelle *le \mathbf{C} -schéma déduit de Y par extension des scalaires*, ou encore *le complexifié de Y* .

Le foncteur extension des scalaires de \mathbf{R} à \mathbf{C} est adjoint à droite du foncteur restriction des scalaires de \mathbf{C} à \mathbf{R} . Plus précisément, pour tout \mathbf{C} -schéma $X = (\underline{X}, p)$ et tout \mathbf{R} -schéma $Y = (\underline{Y}, q)$, on définit une bijection canonique, fonctorielle en X et Y ,

$$(1) \quad \text{Mor}_{\mathbf{R}}(X_{[\mathbf{R}]}, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y_{(\mathbf{C})})$$

de la manière suivante : un \mathbf{R} -morphisme $u : X_{[\mathbf{R}]} \rightarrow Y$ est par définition un morphisme de schémas $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ pour lequel le diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{u} & \underline{Y} \\ p \downarrow & \text{Spec}(\iota) \xrightarrow{\quad} & \downarrow q \\ \text{Spec}(\mathbf{C}) & & \text{Spec}(\mathbf{R}) \end{array}$$

est commutatif ; le morphisme de schémas $(p, u) : \underline{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{Y}$ est un \mathbf{C} -morphisme de X dans $Y_{(\mathbf{C})}$; c’est l’image de u par l’application (1). Le fait que l’application (1) soit bijective résulte de la propriété universelle des produits fibrés de schémas.

A.1.3. Conjugué d’un \mathbf{C} -schéma.

Soit $X = (\underline{X}, p)$ un \mathbf{C} -schéma. Notons c la conjugaison complexe de \mathbf{C} . On appelle *conjugué de X* le \mathbf{C} -schéma $X^* = (\underline{X}, \text{Spec}(c) \circ p)$. Les \mathbf{R} -schémas sous-jacents à X et X^* sont les mêmes, et l’on a $(X^*)^* = X$. Le carré

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{\text{Id}_{\underline{X}}} & \underline{X} \\ \text{Spec}(c) \circ p \downarrow & \text{Spec}(c) \xrightarrow{\quad} & \downarrow p \\ \text{Spec}(\mathbf{C}) & & \text{Spec}(\mathbf{C}) \end{array}$$

est cartésien (car il est commutatif et les deux flèches horizontales sont des isomorphismes). Il permet d'interpréter X^* comme le \mathbf{C} -schéma déduit de X par l'extension des scalaires $\text{Spec}(c) : \text{Spec}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C})$.

Soit X' un second \mathbf{C} -schéma. Tout \mathbf{C} -morphisme de X dans X' est aussi un \mathbf{C} -morphisme de X^* dans X'^* .

A.1.4. Relations entre un \mathbf{R} -schéma et son complexifié.

Soit $Y = (\underline{Y}, q)$ un \mathbf{R} -schéma. Le morphisme de schémas

$$(4) \quad \text{Spec}(c) \times \text{Id}_{\underline{Y}} : \text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{Y} \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{Y}$$

est un \mathbf{C} -isomorphisme canonique j de $Y_{(\mathbf{C})}$ sur son conjugué $Y_{(\mathbf{C})}^*$. C'est aussi un automorphisme involutif $j_{[\mathbf{R}]}$ du \mathbf{R} -schéma sous-jacent $(Y_{(\mathbf{C})})_{[\mathbf{R}]}$.

Le morphisme de schémas $\text{pr}_2 : \text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$ est un \mathbf{R} -morphisme, dit canonique, de $(Y_{(\mathbf{C})})_{[\mathbf{R}]}$ dans Y . Il correspond par adjonction (cf. A.1.2) au morphisme identique de $Y_{(\mathbf{C})}$. Il définit par passage au quotient un \mathbf{R} -isomorphisme de $(Y_{(\mathbf{C})})_{[\mathbf{R}]} / \{\text{Id}, j_{[\mathbf{R}]}\}$ sur Y .

A.1.5. L'isomorphisme canonique de $X \sqcup X^*$ sur $(X_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$.

Soient $X = (\underline{X}, p)$ un \mathbf{C} -schéma et $X_{[\mathbf{R}]}$ le \mathbf{R} -schéma sous-jacent (§ A.1.2). Le morphisme $\text{Id}_{\underline{X}}$ peut être considéré comme un \mathbf{R} -morphisme de $X_{[\mathbf{R}]}$ dans $X_{[\mathbf{R}]}$, ou de $(X^*)_{[\mathbf{R}]}$ dans $X_{[\mathbf{R}]}$. Les \mathbf{C} -morphisms

$$(5) \quad \alpha' : X \rightarrow (X_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})} \quad \text{et} \quad \alpha'' : X^* \rightarrow (X_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$$

qui s'en déduisent par adjonction (cf. A.1.2) sont les morphismes de schémas $(p, \text{Id}_{\underline{X}})$ et $(\text{Spec}(c) \circ p, \text{Id}_{\underline{X}})$ de \underline{X} dans $\text{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbf{R})} \underline{X}$.

Proposition A.1. *Notons $X \sqcup X^*$ la réunion disjointe de X et X^* . Le \mathbf{C} -morphisme $\alpha : X \sqcup X^* \rightarrow (X_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$ qui coïncide avec α' dans X et avec α'' dans X^* est un isomorphisme.*

La proposition équivaut à dire que le diagramme carré de schémas et morphismes de schémas

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \underline{X} \sqcup \underline{X} & \xrightarrow{\text{pr}_2 \circ \alpha} & \underline{X} \\ \text{pr}_1 \circ \alpha \downarrow & \text{Spec}(\iota) \searrow & \downarrow \text{Spec}(\iota) \circ p \\ \text{Spec}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{Spec}(\iota)} & \text{Spec}(\mathbf{R}) \end{array}$$

est cartésien ; dans ce diagramme, $\underline{X} \sqcup \underline{X}$ est la réunion disjointe de deux copies de \underline{X} , $\text{pr}_1 \circ \alpha$ coïncide avec p sur la première copie et avec $\text{Spec}(c) \circ p$ sur la seconde, et $\text{pr}_2 \circ \alpha$ coïncide avec $\text{Id}_{\underline{X}}$ sur chacune des deux copies de \underline{X} .

Le diagramme carré (6) est le composé des deux diagrammes carrés

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \underline{X} \sqcup \underline{X} & \xrightarrow{\text{pr}_1 \circ \alpha} & \underline{X} \\ p \sqcup p \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Spec}(\mathbf{C}) \sqcup \text{Spec}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\rho} & \text{Spec}(\mathbf{C}) \\ \rho' \downarrow & \text{Spec}(\iota) \searrow & \downarrow \text{Spec}(\iota) \\ \text{Spec}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{Spec}(\iota)} & \text{Spec}(\mathbf{R}) \end{array}$$

où ρ coïncide avec l’identité sur chacune des deux copies de $\text{Spec}(\mathbf{C})$, et ρ' coïncide avec l’identité sur la première copie de $\text{Spec}(\mathbf{C})$ et avec $\text{Spec}(c)$ sur la seconde. Le premier de ces carrés est clairement cartésien. Le second est cartésien parce que l’homomorphisme d’anneaux de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ qui à $a \otimes b$ associe $(ab, \bar{a}b)$ est bijectif.

L’isomorphisme α s’appelle *l’isomorphisme canonique de $X \sqcup X^*$ sur $(X_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$* .

A.2. Restriction de Weil à \mathbf{R} d’un \mathbf{C} -schéma.

A.2.1. Définition de la restriction de Weil, propriété universelle.

Soit X un \mathbf{C} -schéma. Considérons le foncteur contravariant

$$(8) \quad \mathfrak{R}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X) : \mathbf{T} \mapsto \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\mathbf{T}_{(\mathbf{C})}, X)$$

de la catégorie des \mathbf{R} -schémas dans celle des ensembles. Ce foncteur est un faisceau pour la topologie de Zariski ([1], § 7.6, prop. 3), mais n’est pas toujours représentable par un \mathbf{R} -schéma.

Définition 3. *On dit que X possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} lorsque le foncteur $\mathfrak{R}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$ est représentable. Il existe alors un \mathbf{R} -schéma*

$\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$, *unique à isomorphisme unique près, qui le représente. On l’appelle la restriction de Weil de X (de \mathbf{C} à \mathbf{R}).*

Supposons que X possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} . On dispose alors par définition, pour tout \mathbf{R} -schéma \mathbf{T} , d’une bijection canonique, fonctorielle en \mathbf{T} ,

$$(9) \quad \text{Mor}_{\mathbf{R}}(\mathbf{T}, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\mathbf{T}_{(\mathbf{C})}, X),$$

et en particulier, pour toute \mathbf{R} -algèbre A , d’une bijection canonique, fonctorielle en A ,

$$(10) \quad (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)(A) \rightarrow X(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} A).$$

En prenant $A = \mathbf{R}$, on obtient une bijection canonique

$$(11) \quad (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)(\mathbf{R}) \rightarrow X(\mathbf{C}).$$

Soit X' un second \mathbf{C} -schéma qui possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} , et soit $u : X \rightarrow X'$ un \mathbf{C} -morphisme. On déduit, pour tout \mathbf{R} -schéma T , de l'application

$$(12) \quad \text{Mor}(\text{Id}_{T_{(\mathbf{C})}}, u) : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X')$$

une application

$$(13) \quad \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X'),$$

qui dépend fonctoriellement de T , et donc s'écrit $\text{Mor}(\text{Id}_T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u)$ de manière unique, où

$$(14) \quad \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u : \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X'$$

est un \mathbf{R} -morphisme. On dit que $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u$ est le \mathbf{R} -morphisme déduit de u par restriction de Weil.

A.2.2. Conditions suffisantes d'existence de la restriction de Weil.

Proposition A.2. *Un \mathbf{C} -schéma affine possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} . Celle-ci est un \mathbf{R} -schéma affine.*

Soit X un \mathbf{C} -schéma affine. Il peut s'écrire $\text{Spec}(\mathbf{C}[\mathbf{z}]/\mathfrak{a})$, où $\mathbf{z} = (z_j)_{j \in J}$ est une famille d'indéterminées et \mathfrak{a} un idéal de $\mathbf{C}[\mathbf{z}]$. Soient $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in J}$ et $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in J}$ de nouvelles familles d'indéterminées. Notons $\varphi : \mathbf{C}[\mathbf{z}] \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ l'homomorphisme de \mathbf{C} -algèbres qui applique z_j sur $x_j + iy_j$ pour tout $j \in J$, et \mathfrak{b} l'idéal de $\mathbf{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ engendré par les parties réelles et imaginaires des éléments de $\varphi(\mathfrak{a})$. Le foncteur $\mathfrak{R}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$ est alors représenté par le schéma affine $\text{Spec}(\mathbf{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/\mathfrak{b})$ (cf. [1], § 7.6, démonstration de la prop. 2).

Exemple. Soit n un entier ≥ 0 . La restriction de Weil de l'espace linéaire affine $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^n$ est isomorphe à $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{2n}$.

Proposition A.3. *Soit X un \mathbf{C} -schéma. Si chaque paire de points de X est contenue dans un ouvert affine, X possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} .*

Cette proposition est un cas particulier de [1], § 7.6, th. 4 si toute partie finie de X est contenue dans un ouvert affine. La démonstration de *loc.cit.* montre qu'il suffit d'exiger cette hypothèse pour les parties de cardinal ≤ 2 : cela provient de ce que, si T est un \mathbf{R} -schéma et t un point de T , il existe au plus deux points de $T_{(\mathbf{C})}$ au-dessus de t , puisque $[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = 2$.

Corollaire. *Tout \mathbf{C} -schéma quasi-projectif possède une restriction de Weil à \mathbf{R} .*

En effet, toute partie finie d'un schéma quasi-projectif est contenue dans un ouvert affine.

A.2.3. *L'isomorphisme canonique de $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ sur $X \times_{\mathbf{C}} X^*$.*

Soit X un \mathbf{C} -schéma qui possède une restriction de Weil à \mathbf{R} . Au morphisme identique de $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ correspond, par la propriété universelle de la restriction de Weil, un \mathbf{C} -morphisme canonique

$$(15) \quad \beta' : (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} \rightarrow X.$$

En composant l'isomorphisme canonique $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} \rightarrow (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}^*$ (cf. A.1.4) avec β' , considéré comme \mathbf{C} -morphisme de $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}^*$ dans X^* (cf. A.1.3), on obtient un \mathbf{C} -morphisme

$$(16) \quad \beta'' : (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} \rightarrow X^*.$$

On notera

$$(17) \quad \beta : (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*$$

le \mathbf{C} -morphisme dont les projections sont β' et β'' .

Proposition A.4. *Le \mathbf{C} -morphisme β est un isomorphisme de $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ sur $X \times_{\mathbf{C}} X^*$.*

Pour prouver cela, il nous suffit de démontrer que, pour tout \mathbf{C} -schéma S , l'application $\text{Mor}(\text{Id}_S, \beta) : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X \times_{\mathbf{C}} X^*)$ est bijective.

Soit S un \mathbf{C} -schéma. Nous avons défini aux § A.1.2 et § A.2.1 des bijections canoniques

$$(18) \quad \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}) \xrightarrow{f} \text{Mor}_{\mathbf{R}}(S_{[\mathbf{R}]}, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X) \xrightarrow{g} \text{Mor}_{\mathbf{C}}((S_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}, X).$$

Au § A.1.5, nous avons défini un \mathbf{C} -isomorphisme canonique $\alpha : S \sqcup S^* \rightarrow (S_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$; par ailleurs, on a $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(S^*, X) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X^*)$ d'après § A.1.3; notons h l'application composée de la suite de bijections canoniques

$$(19) \quad \begin{aligned} & \text{Mor}_{\mathbf{C}}((S_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}, X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S \sqcup S^*, X) \rightarrow \\ & \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S^*, X) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X^*) \\ & \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X \times_{\mathbf{C}} X^*). \end{aligned}$$

La prop. A.4 résulte alors du lemme suivant :

Lemme. *L'application $\text{Mor}(\text{Id}_S, \beta)$ n'est autre que la bijection $h \circ g \circ f$.*

Notons α' et α'' les restrictions de α à S et S^* respectivement. Il s'agit de démontrer, pour tout \mathbf{C} -morphisme $u : S \rightarrow (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$, les deux relations

suivantes :

a) on a $\beta' \circ u = g(f(u)) \circ \alpha'$;

b) on a $\beta'' \circ u = g(f(u)) \circ \alpha''$. (Le premier membre est dans $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(S, X^*)$ et le second dans $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(S^*, X)$, mais ces deux ensembles sont égaux.)

Considérons le diagramme commutatif

$$(20) \quad \begin{array}{ccccc} S_{[\mathbf{R}]} & \xrightarrow{\text{Id}} & S_{[\mathbf{R}]} & \xrightarrow{f(u)} & \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow f(u) & & \downarrow \text{Id} \\ S_{[\mathbf{R}]} & \xrightarrow{f(u)} & \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X & \xrightarrow{\text{Id}} & \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X. \end{array}$$

Appliquons les bijections canoniques (1) du § A.1.2 aux flèches horizontales du premier carré, et les bijections canoniques (9) du § A.2.1 à celles du second carré. Nous obtenons le diagramme commutatif

$$(21) \quad \begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\alpha'} & (S_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{g(f(u))} & X \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow f(u)_{(\mathbf{C})} & & \downarrow \text{Id} \\ S & \xrightarrow{u} & (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{\beta'} & X \end{array}$$

Cela prouve la relation a). Tout morphisme entre \mathbf{C} -schémas étant aussi un morphisme entre les \mathbf{C} -schémas conjugués, on déduit de (21) le diagramme commutatif

$$(22) \quad \begin{array}{ccccccc} S^* & \xrightarrow{\alpha'} & (S_{[\mathbf{R}]})^*_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{j} & (S_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{g(f(u))} & X \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow f(u)_{(\mathbf{C})} & & \downarrow f(u)_{(\mathbf{C})} & & \downarrow \text{Id} \\ S^* & \xrightarrow{u} & (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)^*_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{j'} & (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{\beta'} & X \end{array}$$

où j et j' sont les isomorphismes canoniques (cf. A.1.4). La relation b) en résulte puisque $\beta' \circ j' = \beta''$ et $j \circ \alpha' = \alpha''$. Cela termine la démonstration du lemme.

On dit que β est l'isomorphisme canonique de $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ sur $X \times_{\mathbf{C}} X^*$.

Remarques. 1) Lorsqu'on identifie $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ à $X \times_{\mathbf{C}} X^*$ par β , l'isomorphisme canonique de $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ sur son conjugué (cf. A.1.4) s'identifie à $(\text{pr}_2, \text{pr}_1) : X \times_{\mathbf{C}} X^* \rightarrow X^* \times_{\mathbf{C}} X$.

2) Soit Y le \mathbf{R} -schéma sous-jacent à $X \times_{\mathbf{C}} X^*$. C'est aussi le \mathbf{R} -schéma sous-jacent à $X^* \times_{\mathbf{C}} X$, de sorte que $(\text{pr}_2, \text{pr}_1) : X \times_{\mathbf{C}} X^* \rightarrow X^* \times_{\mathbf{C}} X$ définit un automorphisme involutif σ de Y . Le \mathbf{R} -schéma quotient $Y/\{\text{Id}, \sigma\}$ existe

et est canoniquement isomorphe à $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$; cela résulte de la remarque 1 et du § A.1.4.

Exemple. Considérons le cas où X est la réunion d’un ensemble fini J de copies de $\text{Spec}(\mathbf{C})$: autrement dit $X = \text{Spec}(A)$, où $A = \mathbf{C}^J$. On a $X^* = \text{Spec}(A^*)$, où A^* est l’anneau \mathbf{C}^J , muni de la structure de \mathbf{C} -algèbre définie par l’homomorphisme $\lambda \mapsto (\bar{\lambda})_{j \in J}$. On a $X \times_{\mathbf{C}} X^* = \text{Spec}(A \otimes_{\mathbf{C}} A^*)$, et $A \otimes_{\mathbf{C}} A^*$ s’identifie à $\mathbf{C}^{J \times J}$ par l’isomorphisme qui à $(a_j)_{j \in J} \otimes (b_k)_{k \in J}$ associe $(a_j \bar{b}_k)_{(j,k) \in J \times J}$. Alors σ s’identifie à $\text{Spec}(s)$ où s est l’automorphisme $(a_{j,k})_{(j,k) \in J \times J} \mapsto (\bar{a}_{k,j})_{(j,k) \in J \times J}$ de la \mathbf{R} -algèbre sous-jacente à $\mathbf{C}^{J \times J}$. La restriction de Weil $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ de X s’identifie canoniquement à $\text{Spec}(B)$, où B est

la sous- \mathbf{R} -algèbre de $\mathbf{C}^{J \times J}$ formée des points fixes de s , i.e. des familles $(a_{j,k}) \in \mathbf{C}^{J \times J}$ telles que $a_{j,k} = \bar{a}_{k,j}$ pour j, k dans J . Le choix d’un ordre total sur J permet d’identifier B à $\mathbf{R}^J \times \mathbf{C}^{J'}$, où J' est l’ensemble des couples $(j, k) \in J \times J$ tels que $j < k$.

A.2.4. Construction de la restriction de Weil par descente galoisienne.

Soient X un \mathbf{C} -schéma. Supposons donnés un \mathbf{R} -schéma Y et un \mathbf{C} -isomorphisme $f : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*$ par lequel l’isomorphisme canonique $j_Y : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y^*_{(\mathbf{C})}$ correspond à $(\text{pr}_2, \text{pr}_1) : X \times_{\mathbf{C}} X^* \rightarrow X^* \times_{\mathbf{C}} X$.

Pour tout \mathbf{R} -schéma T , notons φ_T l’application $u \mapsto \text{pr}_1 \circ f \circ u_{(\mathbf{C})}$ de $\text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, Y)$ dans $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X)$. Elle dépend fonctoriellement de T .

Proposition A.5. *Les applications φ_T sont bijectives. En d’autres termes, X possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} , canoniquement isomorphe à Y .*

Soit $v : T_{(\mathbf{C})} \rightarrow X$ un \mathbf{C} -morphisme. Notons $v' : T_{(\mathbf{C})} \rightarrow X^*$ le composé de l’isomorphisme canonique $j_T : T_{(\mathbf{C})} \rightarrow T^*_{(\mathbf{C})}$ et de v (considéré comme \mathbf{C} -morphisme de $T^*_{(\mathbf{C})}$ dans X^*). Pour qu’un \mathbf{R} -morphisme $u : T \rightarrow Y$ soit tel que $\varphi_T(u) = v$, il faut et il suffit que l’on ait $f \circ u_{(\mathbf{C})} = (v, v')$. L’unicité de u en résulte et son existence provient, par descente galoisienne, de la commutativité du diagramme

$$(23) \quad \begin{array}{ccccc} T_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{(v, v')} & X \times_{\mathbf{C}} X^* & \xrightarrow{f^{-1}} & Y_{(\mathbf{C})} \\ j_T \downarrow & & (\text{pr}_2, \text{pr}_1) \downarrow & & j_Y \downarrow \\ T^*_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{(v, v')} & X^* \times_{\mathbf{C}} X & \xrightarrow{f^{-1}} & Y^*_{(\mathbf{C})}. \end{array}$$

Remarque. Soit $g : Y \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ l’isomorphisme déduit de ce qui précède. On a alors $f = \beta \circ g_{(\mathbf{C})}$, où $\beta : (\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})} \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*$ est l’isomorphisme défini au § A.2.3.

A.2.5. *Le \mathbf{R} -morphisme canonique $Y \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})})$.*

Soit Y un \mathbf{R} -schéma. Supposons que le \mathbf{C} -schéma $Y_{(\mathbf{C})}$ possède une restriction de Weil. Au morphisme identique $Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})}$ correspond alors, par propriété universelle de la restriction de Weil, un \mathbf{R} -morphisme canonique

$$(24) \quad \gamma : Y \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}).$$

Rappelons que nous avons défini au § A.2.3 un isomorphisme canonique

$$(25) \quad \beta : \left(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}) \right)_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})} \times_{\mathbf{C}} Y_{(\mathbf{C})}^*.$$

Proposition A.6. *Le \mathbf{C} -morphisme $\beta \circ \gamma_{(\mathbf{C})} : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})} \times_{\mathbf{C}} Y_{(\mathbf{C})}^*$ est égal à (Id, j) , où j est l'isomorphisme canonique $Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})}^*$ (cf. A.1.4).*

Appliquons les bijections canoniques (9) du § A.2.1 aux flèches horizontales du diagramme commutatif

$$(26) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\gamma} & \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \text{Id} \\ \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}) & \xrightarrow{\text{Id}} & \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}). \end{array}$$

Nous obtenons le diagramme commutatif

$$(27) \quad \begin{array}{ccc} Y_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{\text{Id}} & Y_{(\mathbf{C})} \\ \downarrow \gamma_{(\mathbf{C})} & & \downarrow \text{Id} \\ \left(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}) \right)_{(\mathbf{C})} & \xrightarrow{\text{pr}_1 \circ \beta} & Y_{(\mathbf{C})}. \end{array}$$

Cela démontre que l'on a $\text{pr}_1 \circ \beta \circ \gamma_{(\mathbf{C})} = \text{Id}_{Y_{(\mathbf{C})}}$; on en déduit que l'on a $\text{pr}_2 \circ \beta \circ \gamma_{(\mathbf{C})} = j$ par la remarque 1 du § A.2.3.

Corollaire. *Si le \mathbf{R} -schéma Y est séparé, γ est une immersion fermée.*

Supposons le \mathbf{R} -schéma Y séparé. Il en est alors de même du \mathbf{C} -schéma $Y_{(\mathbf{C})}$, ce qui signifie que le morphisme diagonal $\Delta_{Y_{(\mathbf{C})}} : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})} \times_{\mathbf{C}} Y_{(\mathbf{C})}$ est une immersion fermée. D'après la prop. A.6, $\gamma_{(\mathbf{C})}$ est le composé de $\Delta_{Y_{(\mathbf{C})}}$ et d'un \mathbf{C} -isomorphisme; c'est donc une immersion fermée. Cela implique que γ est une immersion fermée ([7], prop. 2.7.1).

Proposition A.7. *Soit T un \mathbf{R} schéma. L'application composée de*

$$(28) \quad \text{Mor}(\text{Id}_T, \gamma) : \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})}))$$

et de la bijection canonique $\text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(Y_{(\mathbf{C})})) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, Y_{(\mathbf{C})})$ n'est autre que $u \mapsto u_{(\mathbf{C})}$.

Lorsque $T = Y$, ces deux applications coïncident sur $u = \text{Id}_Y$, par définition de γ ; le cas général s’en déduit par functorialité.

Corollaire. *La composée de l’application $Y(\mathbf{R}) \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} (Y_{(\mathbf{C})})(\mathbf{R})$ déduite de γ , et des bijections canoniques $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} (Y_{(\mathbf{C})})(\mathbf{R}) \rightarrow Y_{(\mathbf{C})}(\mathbf{C}) \rightarrow Y(\mathbf{C})$, est l’injection canonique $Y(\mathbf{R}) \rightarrow Y(\mathbf{C})$.*

Cela résulte de la prop. A.7 en prenant $T = \text{Spec}(\mathbf{R})$.

A.2.6. *L’isomorphisme canonique $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X^*$.*

Soit X un \mathbf{C} -schéma qui possède une restriction de Weil. Soit T un \mathbf{R} -schéma. À tout morphisme de \mathbf{C} -schémas $u : T_{(\mathbf{C})} \rightarrow X$, associons le morphisme de \mathbf{C} -schémas $u^* : T_{(\mathbf{C})} \rightarrow X^*$ obtenu en composant l’isomorphisme canonique $T_{(\mathbf{C})} \rightarrow T^*_{(\mathbf{C})}$ (cf. A.1.4), avec u considéré comme un \mathbf{C} -morphisme de $T^*_{(\mathbf{C})}$ dans X^* . On a ainsi une bijection $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X^*)$, functorielle en T .

Il en résulte que X^* possède une restriction de Weil, canoniquement isomorphe à celle de X . L’isomorphisme canonique $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X^*$ correspond, par la propriété universelle de la restriction de Weil de X^* , à l’application β'' de la formule (16).

A.3. Propriétés de la restriction de Weil.

A.3.1. Restriction de Weil et produits fibrés.

Proposition A.8. *Soient X_1 et X_2 deux \mathbf{C} -schémas qui possèdent des restrictions de Weil à \mathbf{R} . Leur produit $X_1 \times_{\mathbf{C}} X_2$ possède une restriction de Weil à \mathbf{R} . Celle-ci s’identifie canoniquement au produit $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1 \times_{\mathbf{R}} \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2$ des restrictions de Weil de X_1 et X_2 .*

On a en effet, pour tout \mathbf{R} -schéma T , une suite de bijections, functorielles en T ,

$$\begin{aligned} & \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X_1 \times_{\mathbf{C}} X_2) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X_1) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X_2) \\ & \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1) \times \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{R}}(T, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1 \times_{\mathbf{R}} \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2). \end{aligned}$$

Cela prouve que le foncteur $T \mapsto \text{Mor}_{\mathbf{C}}(T_{(\mathbf{C})}, X_1 \times_{\mathbf{C}} X_2)$ est représenté par le \mathbf{R} -schéma $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1 \times_{\mathbf{R}} \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2$, d’où la proposition.

Remarques. 1) L’isomorphisme canonique $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} (X_1 \times_{\mathbf{C}} X_2) \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1 \times_{\mathbf{R}} \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2$ n’est autre que $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \text{pr}_1, \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \text{pr}_2)$.

2) La prop. A.8 se généralise comme suit (avec une démonstration analogue) : soient S un \mathbf{C} -schéma et X_1, X_2 deux S -schémas ; si S, X_1 et X_2

possèdent des restrictions de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} , le produit fibré $X_1 \times_S X_2$ en possède une aussi, et celle-ci s'identifie au produit fibré $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_1 \times \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}^S \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_2$.

A.3.2. Restriction de Weil et immersions ouvertes ou fermées.

Proposition A.9. *Soient X' et X des \mathbf{C} -schémas et $u : X' \rightarrow X$ une immersion ouverte (resp. fermée). Si X possède une restriction de Weil à \mathbf{R} , X' en possède une aussi et le \mathbf{R} -morphisme $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u : \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X' \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ est une immersion ouverte (resp. fermée).*

C'est un cas particulier de [1], § 7.6, prop. 2.

La prop. A.9 signifie que, si un \mathbf{C} -schéma X possède une restriction de Weil à \mathbf{R} , tout sous-schéma ouvert (resp. fermé) X' de X en possède une aussi, et qu'alors $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X'$ s'identifie à un sous-schéma ouvert (resp. fermé) de $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$.

Avec ces identifications, si U_1 et U_2 sont deux ouverts de X , on a

$$(29) \quad \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} (U_1 \cap U_2) = \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_1 \cap \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_2.$$

Cela résulte de la remarque 2 du § A.3.1, puisque $U_1 \cap U_2$ s'identifie au produit fibré $U_1 \times_X U_2$.

Cette propriété ne s'étend pas en général à la réunion. En effet :

Proposition A.10. *Soit X un \mathbf{C} -schéma qui possède une restriction de Weil à \mathbf{R} . Soit $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de X . Pour que les ouverts $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_j$ recouvrent $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$, il faut et il suffit que chaque paire de points de X soit contenue dans l'un des U_j .*

Pour que $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ soit recouvert par ses ouverts $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_j$, il faut et il suffit que $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ le soit par ses ouverts $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_j)_{(\mathbf{C})}$, ou encore (prop. A.4) que $X \times_{\mathbf{C}} X^*$ le soit par ses ouverts $U_j \times_{\mathbf{C}} U_j^*$.

Soit x un point de $X \times_{\mathbf{C}} X^*$, et soient x_1 et x_2 ses deux projections. Pour que x appartienne à $U_j \times_{\mathbf{C}} U_j^*$, il faut et il suffit que x_1 appartienne à U_j et x_2 à U_j^* . Par ailleurs tout couple formé d'un point de X et d'un point de X^* est formé des projections d'au moins un point de $X \times_{\mathbf{C}} X^*$.

De ce qui précède on déduit que, pour que $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ soit recouvert par ses ouverts $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U_j$, il faut et il suffit que pour tout point x_1 de X et tout point x_2 de X^* , il existe un indice $j \in J$ tel que x_1 appartienne à U_j et x_2 à U_j^* . Comme les schémas sous-jacents à X et X^* sont les mêmes, X et X^* ont mêmes ensembles de points, de même que U_j et U_j^* . La prop. A.10 en résulte.

Remarque. Soient X un \mathbf{C} -schéma qui possède une restriction de Weil à \mathbf{R} , F un sous-schéma fermé de X et U le sous-schéma ouvert de X complémentaire de F . On prendra garde qu'en général le complémentaire du sous-schéma fermé $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} F$ de $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ n'est pas le sous-schéma ouvert $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} U$.

A.3.3. Restriction de Weil et réunions disjointes.

Soit X un \mathbf{C} -schéma, réunion d'une famille finie $(X_j)_{j \in J}$ de sous-schémas ouverts deux à deux disjoints. Supposons que chacun des X_j possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} .

Choisissons un ordre total sur l'ensemble J et notons Y le \mathbf{R} -schéma somme (*i.e.* réunion disjointe) des $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_j$ pour $j \in J$, et des $(X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*)_{[\mathbf{R}]}$ pour j, k dans J tels que $j < k$.

Proposition A.11. *Le \mathbf{C} -schéma X possède une restriction de Weil de \mathbf{C} à \mathbf{R} , et celle-ci est canoniquement isomorphe à Y .*

Considérons le \mathbf{C} -morphisme

$$(30) \quad f : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*$$

défini comme suit : sa restriction à $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_j)_{(\mathbf{C})}$ est le composé

$$(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X_j)_{(\mathbf{C})} \rightarrow X_j \times_{\mathbf{C}} X_j^* \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*,$$

de l'isomorphisme canonique défini au § A.2.3 et de l'injection canonique ; sa restriction à $((X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*)_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})}$, pour $j < k$, est le composé

$$\begin{aligned} ((X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*)_{[\mathbf{R}]})_{(\mathbf{C})} &\rightarrow (X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*) \sqcup (X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*)^* \rightarrow \\ &(X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*) \sqcup (X_k \times_{\mathbf{C}} X_j^*) \rightarrow X \times_{\mathbf{C}} X^*, \end{aligned}$$

de l'isomorphisme canonique défini au § A.1.5, de $\text{Id} \sqcup u$ où u est l'isomorphisme canonique de $(X_j \times_{\mathbf{C}} X_k^*)^*$ sur $X_k \times_{\mathbf{C}} X_j^*$, et de l'injection canonique. Il est clair que f est un \mathbf{C} -isomorphisme par lequel l'isomorphisme canonique $j_Y : Y_{(\mathbf{C})} \rightarrow Y_{(\mathbf{C})}^*$ correspond à $(\text{pr}_2, \text{pr}_1) : X \times_{\mathbf{C}} X^* \rightarrow X^* \times_{\mathbf{C}} X$. La prop. A.11 résulte ainsi de la prop. A.5.

Exemple. Lorsque chacun des X_j est isomorphe à $\text{Spec}(\mathbf{C})$, on retrouve l'exemple déjà considéré au § A.2.3.

A.4. Propriétés stables par restriction de Weil.

A.4.1. Propriétés des schémas stables par restriction de Weil.

Soit \mathcal{P} une propriété des schémas au-dessus des corps de caractéristique 0, satisfaisant (pour k un tel corps) les 3 axiomes suivants :

(PS0) Si un k -schéma X a la propriété \mathcal{P} , tout k -schéma isomorphe à X a la propriété \mathcal{P} .

(PS1) Si deux k -schémas X_1 et X_2 ont la propriété \mathcal{P} , le k -schéma produit $X_1 \times_k X_2$ a la propriété \mathcal{P} .

(PS2) Soient X un k -schéma et k' une extension de degré fini de k . Si le k' -schéma $X_{(k')}$ a la propriété \mathcal{P} , le k -schéma X a la propriété \mathcal{P} .

Proposition A.12. *Soit X un \mathbf{C} -schéma qui a la propriété \mathcal{P} et possède une restriction de Weil à \mathbf{R} . Le \mathbf{R} -schéma $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ a la propriété \mathcal{P} .*

Le \mathbf{C} -schéma X^* a la propriété \mathcal{P} d'après (PS1) : en effet le \mathbf{C} -schéma déduit de X^* par l'extension des scalaires $\text{Spec}(c) : \text{Spec}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C})$ est isomorphe à X . D'après (PS2), le \mathbf{C} -schéma $X \times_{\mathbf{C}} X^*$ a la propriété \mathcal{P} , de même que le \mathbf{C} -schéma $(\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X)_{(\mathbf{C})}$ qui lui est isomorphe (prop. A.4). Il

résulte alors de (PS1) que le \mathbf{R} -schéma $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ a la propriété \mathcal{P} .

Voici quelques exemples de propriétés des schémas au-dessus des corps de caractéristique 0, pour lesquelles les axiomes (PS0), (PS1) et (PS2) sont satisfaits :

- être séparé (cf. [4], prop. 5.5.1 et [7], prop. 2.7.1);
- être réduit (cf. [7], prop. 4.6.5, cor. 4.6.11 et prop. 4.6.1);
- être affine (cf. [5], prop. 1.6.2 et [7], prop. 2.7.1);
- être quasi-affine (cf. [5], prop. 5.1.10 et [7], prop. 2.7.1);
- être de type fini (cf. [4], prop. 6.3.4 et [7], prop. 2.7.1);
- être localement de type fini (cf. [6], prop. 1.3.4 et [7], prop. 2.7.1);
- être projectif (cf. [5], prop. 5.5.5 et cor. 6.6.5);
- être quasi-projectif (cf. [5], prop. 5.3.4 et cor. 6.6.5);
- être géométriquement connexe (cf. [7], cor. 4.5.8 et déf. 4.5.2);
- être géométriquement irréductible (cf. [7], cor. 4.5.8 et déf. 4.5.2);
- être géométriquement intègre (cf. [7], prop. 4.6.5 et déf. 4.6.2);
- être propre (cf. [5], prop. 5.4.2 et [7], prop. 2.7.1);
- être lisse (cf. [8], prop. 17.3.3 et cor. 17.7.3).

Exemple. Une variété sur un corps k de caractéristique 0 n'est autre qu'un k -schéma réduit et de type fini. Pour une telle variété, on emploie "absolument irréductible" comme synonyme de "géométriquement irréductible" et "non-singulière" comme synonyme de "lisse". Si donc X est une variété sur \mathbf{C} qui possède une restriction de Weil à \mathbf{R} , $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ est une variété sur \mathbf{R}

(projective si X est projective, lisse si X est lisse, absolument irréductible si X est irréductible); si X est de dimension n , $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X$ est de dimension $2n$, puisque sa complexifiée est isomorphe à $X \times_{\mathbf{C}} X^*$.

A.4.2. Propriétés des morphismes de schémas stables par restriction de Weil.

Soit \mathcal{P} une propriété des morphismes de schémas au-dessus de corps de caractéristique 0, satisfaisant (pour k un tel corps) les 3 axiomes suivants :
 (PM0) Si un morphisme de k -schémas u a la propriété \mathcal{P} , tout composé, à droite ou à gauche, de u avec un k -isomorphisme a la propriété \mathcal{P} .

(PM1) Si deux morphismes de k -schémas $u_1 : X_1 \rightarrow X'_1$ et $u_2 : X_2 \rightarrow X'_2$ ont la propriété \mathcal{P} , le morphisme de k -schémas $u_1 \times u_2 : X_1 \times_k X_2 \rightarrow X'_1 \times_k X'_2$ a la propriété \mathcal{P} .

(PM2) Soient $u : X \rightarrow X'$ un morphisme de k -schémas et k' une extension de degré fini de k . Si le morphisme de k' -schémas $u_{(k')}$ déduit de u par extension des scalaires a la propriété \mathcal{P} , u a la propriété \mathcal{P} .

Proposition A.13. *Soient X et X' des \mathbf{C} -schémas qui possèdent des restrictions de Weil. Si un \mathbf{C} -morphisme $u : X \rightarrow X'$ a la propriété \mathcal{P} , le \mathbf{R} -morphisme $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u : \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X'$ a la propriété \mathcal{P} .*

La démonstration est analogue à celle de la prop. A.12.

Voici quelques exemples de propriétés des morphismes de schémas au-dessus de corps de caractéristique 0, satisfaisant les axiomes (PM0), (PM1) et (PM2) :

- être séparé (cf. [4], prop. 5.5.1 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être affine (cf. [5], prop. 1.6.2 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être quasi-affine (cf. [5], prop. 5.1.10 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être entier (cf. [5], prop. 6.1.5 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être fini (cf. [5], prop. 6.1.5 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être de type fini (cf. [4], prop. 6.3.4 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être localement de type fini (cf. [4], prop. 6.6.6 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être de présentation finie (cf. [6], prop. 1.6.2 et prop. 2.7.1) ;
- être localement de présentation finie (cf. [6], prop. 1.4.3 et prop. 2.7.1) ;
- être projectif (cf. [5], prop. 5.5.5 et cor. 6.6.5) ;
- être quasi-projectif (cf. [5], prop. 5.3.4 et cor. 6.6.5) ;
- être plat (cf. [7], cor. 2.1.7 et prop. 2.5.1) ;
- être propre (cf. [5], prop. 5.4.2 et [7], prop. 2.7.1) ;
- être lisse (cf. [8], prop. 17.3.3 et cor. 17.7.3) ;
- être étale (cf. [8], prop. 17.3.3 et cor. 17.7.3).

Exemple. Un morphisme de schémas est un *revêtement étale* s'il est fini et étale. Si X et X' sont des \mathbf{C} -schémas qui possèdent des restrictions de Weil, et $u : X \rightarrow X'$ un \mathbf{C} -morphisme qui est un revêtement étale, le \mathbf{R} -morphisme $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u : \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X \rightarrow \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} X'$ est un revêtement étale. Si de plus u est de degré n , $\prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} u$ est de degré n^2 , puisque $u_{(\mathbf{C})}$ s'identifie à canoniquement à $u \times u : X \times_{\mathbf{C}} X^* \rightarrow X' \times_{\mathbf{C}} X'^*$.

Annexe B. Dessins d'enfant

Bien qu'intuitive, la notion de dessin d'enfant est assez délicate à définir de manière précise. C'est ce que nous ferons dans cette annexe. La présentation est inspirée d'un cours de DEA de Joseph Oesterlé de 1994, dont des notes non publiées ont été prises par Alain Kraus ([9]). Nous nous contenterons d'énoncer ici les définitions et les résultats utilisés dans le corps de cette thèse.

B.1. Dessins d'enfant.

B.1.1. Surfaces topologiques orientées.

Définition 1. Une surface topologique est un espace topologique dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à \mathbf{R}^2 .

Soient S une surface topologique et s un point de S . Notons $H_s(S)$ le groupe d'homologie relative $H_2(S, S - \{s\}; \mathbf{Z})$. Si U est un voisinage ouvert de s homéomorphe à \mathbf{R}^2 , les homomorphismes canoniques $H_s(U) \rightarrow H_s(S)$ et $H_s(U) \rightarrow H_1(U - \{s\}, \mathbf{Z})$ sont bijectifs. Il en résulte que le groupe $H_s(S)$ est isomorphe (non canoniquement) à \mathbf{Z} . Notons $Or_s(S)$ l'ensemble des générateurs de $H_s(S)$. Il a deux éléments; chacun d'eux s'appelle une *orientation locale de S en s* .

Soit f une application continue de S dans une surface topologique T . Supposons que f induise un homéomorphisme d'un voisinage de s sur un voisinage de $t = f(s)$. On déduit alors de f un isomorphisme $H_s(f) : H_s(S) \rightarrow H_t(T)$, et par suite une bijection $Or_s(f) : Or_s(S) \rightarrow Or_t(T)$.

Soit (U, φ, E) une carte de S : U est un ouvert de S , E un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{R} et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert de E . Soit $s \in U$. On déduit de φ une bijection canonique entre l'ensemble $Or_s(S)$ des orientations de S en s et l'ensemble $Or(E)$ des orientations de l'espace vectoriel E (i.e. des demi-droites de $\Lambda^2(E)$).

Définition 2. Soit S une surface topologique. Une orientation de S est une application o qui à tout point s de S associe une orientation locale de S en s et qui possède la propriété de continuité suivante : si (U, φ, E) est une carte de S , la restriction de o à U correspond par les bijections définies dans l'alinéa précédent à une application localement constante de U dans $Or(E)$.

Il suffit bien entendu de vérifier cette dernière condition pour les cartes d'un atlas.

Définition 3. Une surface topologique orientée est une surface topologique munie d'une orientation.

B.1.2. Décompositions cellulaires.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, notons B_n la boule unité ouverte et \bar{B}_n la boule unité fermée de l'espace euclidien \mathbf{R}^n .

Nous dirons qu'une partie Y d'un espace topologique séparé X est une cellule de X s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ et un homéomorphisme $B_n \rightarrow Y$ qui se prolonge en une application continue $\varphi : \bar{B}_n \rightarrow X$. L'entier n est alors unique; il s'appelle la dimension de la cellule Y ; on a $\varphi(\bar{B}_n) = \bar{Y}$ et $\varphi(\bar{B}_n - B_n) = \bar{Y} - Y$.

Définition 4. Soit X un espace topologique séparé. Une partition finie (e_α) de X en cellules est appelé une décomposition cellulaire finie de X si la frontière $\bar{e}_\alpha - e_\alpha$ de toute cellule e_α est réunion de cellules e_β de dimensions strictement inférieures à celle de e_α .

B.1.3. Dessins d'enfant.

Soient S une surface topologique compacte et (e_α) une décomposition cellulaire finie de S . Les cellules de cette décomposition sont toutes de dimension ≤ 2 . Celles de dimension 0, 1 et 2 sont respectivement appelées sommets, arêtes et faces.

Chaque sommet est un singleton $\{s\}$; par abus, on appelle encore sommet l'élément s . Si e_α est une arête, l'ensemble $\bar{e}_\alpha - e_\alpha$ comporte soit 1, soit 2 éléments; ceux-ci sont des sommets et sont appelés les extrémités de l'arête e_α . On dit dans le premier cas que e_α a deux extrémités confondues, et dans le second que e_α a deux extrémités distinctes. Si e_α a deux extrémités distinctes, tout homéomorphisme de B_1 sur e_α se prolonge en un homéomorphisme de \bar{B}_1 sur \bar{e}_α .

Définition 5. On appelle bicoloriage d'un ensemble E une application b de E dans $\{0, 1\}$. Un point de E est dit de type 0 ou 1 suivant que son image par b est 0 ou 1.

Définition 6. Un dessin d'enfant est un triplet $(S, (e_\alpha), b)$ où S est une surface topologique compacte orientée, (e_α) une décomposition cellulaire finie de S et b un bicoloriage de l'ensemble des sommets, ces données satisfaisant les conditions suivantes :

- a) toute arête a deux extrémités distinctes, l'une de type 0 et l'autre de type 1;
- b) tout sommet est extrémité d'au moins une arête.

Remarque. La condition b) est conséquence des autre hypothèses, sauf lorsqu'une composante connexe C de S est homéomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 et a pour seules cellules un sommet s et la face $C - \{s\}$.

Soit $D = (S, (e_\alpha), b)$ un dessin d'enfant. On appelle composante connexe de D tout dessin d'enfant obtenu en munissant une composante connexe de S de la décomposition cellulaire et du bicoloriage induits par (e_α) et b . On

dit que D est *connexe* si S est connexe. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de D celle de S : c'est l'entier $\chi = |\text{sommets}| - |\text{arêtes}| + |\text{faces}|$. Si D est connexe et non vide, on appelle genre de D le genre de S , *i.e.* l'entier naturel g tel que $\chi = 2 - 2g$.

B.1.4. Morphismes de dessins d'enfant.

Définition 7. Soient $D = (S, (e_\alpha), b)$ et $D' = (S', (e'_\alpha), b')$ deux dessins d'enfant. Soit A l'ensemble des applications continues f de S dans S' possédant les propriétés suivantes :

a) La restriction de f à toute cellule e_α de S est un homéomorphisme de e_α sur une cellule de S' ; si $\dim e_\alpha = 2$, cet homéomorphisme préserve l'orientation.

b) Si s est un sommet de type 0 (resp. de type 1), $f(s)$ en est un également.

Munissons A de la topologie de la convergence compacte. On appelle morphisme de dessins d'enfant de D dans D' une classe d'isotopie d'éléments de A , *i.e.* une composante connexe par arcs de A .

Remarque. Soient φ une telle classe d'isotopie et $f \in \varphi$. La cellule $f(e_\alpha)$ ne dépend pas du choix de f ; elle est notée $\varphi(e_\alpha)$.

B.2. Dessins combinatoires.

B.2.1. Définition d'un dessin combinatoire.

Définition 8. Un dessin combinatoire est un triplet (E, σ_0, σ_1) , où E est un ensemble fini et σ_0, σ_1 sont des permutations de E .

Soit (E, σ_0, σ_1) un dessin combinatoire. Notons $\langle \sigma_0 \rangle$ le groupe de permutations de E engendré par σ_0 . On appelle *sommets de type 0* du dessin combinatoire les orbites de σ_0 dans E , *i.e.* les éléments de $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E$. De même, on appelle *sommets de type 1* les éléments de $\langle \sigma_1 \rangle \backslash E$. Notons $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ le groupe de permutations de E engendré par σ_0 et σ_1 . Ses orbites dans E sont appelées les *composantes connexes* de E ; une telle composante connexe C est la plupart du temps considérée comme un dessin combinatoire, en la munissant des permutations induites par σ_0 et σ_1 . On dit que le dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) est *connexe* si $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ opère transitivement dans E .

Remarque. On pose $\sigma_\infty = \sigma_0^{-1} \sigma_1^{-1}$. On appelle sommets de type ∞ du dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) les éléments de $\langle \sigma_\infty \rangle \backslash E$. Cette terminologie sera justifiée dans la remarque du § B.5.1.

Définition 9. Un morphisme d'un dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) dans un dessin combinatoire $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$ est une application f de E dans E' telle que $\sigma'_0 \circ f = f \circ \sigma_0$ et $\sigma'_1 \circ f = f \circ \sigma_1$.

B.2.2. Dessin combinatoire associé à un dessin d'enfant.

Soit $D = (S, (e_\alpha), b)$ un dessin d'enfant. Notons E l'ensemble des arêtes de D . On définit une permutation σ_0 de E de la manière suivante : soit $a \in E$ une arête de D ; notons s son unique extrémité de type 0, A l'ensemble des arêtes dont s est une extrémité et m le cardinal de A . Il existe un voisinage ouvert V de s dans S et un homéomorphisme $h : V \rightarrow \mathbf{C}$ transformant s en 0, tel que les ensembles $h(b \cap V)$ pour $b \in A$ soient les demi-droites $]\zeta, +\infty[$, où ζ parcourt l'ensemble des racines m -ièmes de l'unité. L'unique élément b de A tel que $h(b \cap V) = e^{2\pi i/m} h(a \cap V)$ est par définition $\sigma_0(a)$; il ne dépend pas des choix de V et de h . On définit de manière analogue une permutation σ_1 de E en se servant des sommets de type 1.

Définition 10. Soit $D = (S, (e_\alpha), b)$ un dessin d'enfant. On appelle dessin combinatoire associé à D le triplet (E, σ_0, σ_1) où E est l'ensemble des arêtes de D et σ_0, σ_1 les permutations de E définies ci-dessus.

Pour tout sommet s de D , soit A_s l'ensemble des arêtes dont s est une extrémité. L'application $s \mapsto A_s$ est une bijection de l'ensemble des sommets de type 0 (resp. de type 1) du dessin d'enfant D sur l'ensemble des sommets de type 0 (resp. de type 1) du dessin combinatoire associé (E, σ_0, σ_1) . Les composantes connexes de (E, σ_0, σ_1) sont les dessins combinatoires associés aux composantes connexes de D . Le dessin d'enfant D est connexe si et seulement si le dessin combinatoire associé est connexe.

Soient $D = (S, (e_\alpha), b)$ et $D' = (S', (e'_{\alpha'}), b')$ deux dessins d'enfant et $(E, \sigma_0, \sigma_1), (E', \sigma'_0, \sigma'_1)$ les dessins combinatoires associés. Si φ est un morphisme de dessins d'enfant de D dans D' , l'application $a \mapsto \varphi(a)$ de l'ensemble des arêtes de D dans l'ensemble des arêtes de D' est un morphisme de dessins combinatoires de (E, σ_0, σ_1) dans $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$.

Proposition B.1. *Le foncteur défini ci-dessus, de la catégorie des dessins d'enfant dans celle des dessins combinatoires, est une équivalence de catégorie.*

Pour la démonstration, cf. [9], page 52.

Remarque. Soit (E, σ_0, σ_1) un dessin combinatoire. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de ce dessin l'entier $\chi = n_0 + n_1 + n_\infty - |E|$, où n_0 (resp. n_1 , resp. n_∞) est le nombre d'orbites dans E de σ_0 (resp. σ_1 , resp. σ_∞) : si le dessin combinatoire est associé à un dessin d'enfant D , χ n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré de D : en effet, D a $n_0 + n_1$ sommets, $|E|$ arêtes et n_∞ faces. Lorsque le dessin combinatoire est connexe et non vide, on a $\chi = 2 - 2g$, où g est un entier naturel appelé le *genre* du dessin combinatoire.

B.3. Revêtements topologiques de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$.

B.3.1. Revêtements ramifiés de surfaces topologiques.

Définition 11. Soit S une surface topologique compacte. On appelle revêtement ramifié fini de S un couple (X, p) où X est une surface topologique compacte et $p : X \rightarrow S$ une application continue telle que, pour tout point $x \in X$, il existe un entier $e(x) \geq 1$, un voisinage ouvert V de x dans X , un voisinage ouvert W de $p(x)$ dans S et des homéomorphismes φ et ψ de V et W sur le disque unité ouvert de \mathbf{C} tels que $\varphi(x) = 0$ et $\psi \circ p \circ \varphi^{-1}(z) = z^{e(x)}$.

L'entier $e(x)$ s'appelle l'indice de ramification du revêtement en x ; on dit que le revêtement est ramifié en x si $e(x) \geq 2$. L'ensemble des points de X en lesquels le revêtement est ramifié est fini. Pour $s \in S$, posons $n(s) = \sum_{x \in p^{-1}(s)} e(x)$. La fonction n est localement constante sur S . Si elle est constante (ce qui est le cas lorsque S est connexe et non vide), sa valeur s'appelle le degré du revêtement.

Soit (X, p) un revêtement ramifié de degré n de S . Les caractéristiques d'Euler-Poincaré de S et de X sont liées par la formule de Riemann-Hurwitz

$$\chi(X) = n\chi(S) - \sum_{x \in X} (e(x) - 1).$$

Définition 12. Soient S une surface topologique compacte et $(X, p), (X', p')$ deux revêtements ramifiés finis de S . Un morphisme de revêtements ramifiés de (X, p) dans (X', p') est une application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $p' \circ f = p$.

B.3.2. Revêtement ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ associé à un dessin combinatoire.

Notons \mathfrak{H}_+ (resp. \mathfrak{H}_-) le demi-plan de \mathbf{C} formé des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive (resp. strictement négative), et $\overline{\mathfrak{H}}_+$ (resp. $\overline{\mathfrak{H}}_-$) son adhérence dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$.

Soit (E, σ_0, σ_1) un dessin combinatoire. Notons Y l'espace topologique formé des triplets (a, ε, z) où $a \in E, \varepsilon \in \{+, -\}$ et $z \in \overline{\mathfrak{H}}_{\varepsilon}$. On munit Y de la topologie induite par celle de $E \times \{+, -\} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$. Considérons dans Y la relation d'équivalence \mathcal{R} la moins fine pour laquelle

$$\begin{aligned} (a, +, z) &\text{ est équivalent à } (\sigma_0(a), -, z) && \text{ si } z \in [\infty, 0], \\ (a, +, z) &\text{ est équivalent à } (a, -, z) && \text{ si } z \in [0, 1], \\ (a, +, z) &\text{ est équivalent à } (\sigma_1^{-1}(a), -, z) && \text{ si } z \in [1, \infty]. \end{aligned}$$

L'espace topologique quotient $X = Y/\mathcal{R}$ est une surface topologique compacte. La troisième projection de $Y \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ définit par passage au quotient une application continue $p : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$. Le couple (X, p) est un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ de degré $|E|$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$.

Définition 13. On dit que (X, p) est le revêtement ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ associé au dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) .

L'application $a \mapsto (a, +, 0)$ (resp. $a \mapsto (a, +, 1)$) de E dans Y définit par passage aux quotients une bijection de l'ensemble $\langle \sigma_0 \rangle \backslash E$ des sommets de type 0 (resp. de l'ensemble $\langle \sigma_1 \rangle \backslash E$ des sommets de type 1) du dessin combinatoire (E, σ_0, σ_1) sur la fibre $p^{-1}(0)$ (resp. $p^{-1}(1)$) du revêtement ramifié (X, p) .

Soient (E, σ_0, σ_1) et $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$ deux dessins combinatoires, (X, p) et (X', p') les revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ associés. Si f est un morphisme de dessins combinatoires de (E, σ_0, σ_1) dans $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$, l'application $f \times \text{Id} \times \text{Id}$ de $E \times \{+, -\} \times \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ dans $E' \times \{+, -\} \times \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ définit par restriction et passage aux quotients un morphisme de revêtements ramifiés de (X, p) dans (X', p') .

Proposition B.2. *Le foncteur défini ci-dessus, de la catégorie des dessins combinatoires dans celle des revêtements ramifiés finis de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, est une équivalence de catégories.*

Pour la démonstration, cf. [9], p. 52 et 53 via la catégorie notée C 13.

Par ce foncteur, aux composantes connexes d'un dessin combinatoire correspondent les composantes connexes du revêtement ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ associé. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un dessin combinatoire est égale à celle du revêtement ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ associé, d'après la formule de Riemann-Hurwitz. Un dessin combinatoire est connexe si et seulement si le revêtement ramifié associé est connexe. Lorsque le dessin combinatoire est connexe et non vide, son genre est égal à celui du revêtement ramifié associé.

B.3.3. *Dessin d'enfant associé à un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$.*

Soit (X, p) un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Il existe une unique décomposition cellulaire (e_α) de X dont les sommets sont les éléments de $p^{-1}(0) \cup p^{-1}(1)$, les arêtes sont les composantes connexes de $p^{-1}(]0, 1[)$ et les faces sont les composantes connexes du complémentaire dans X de $p^{-1}([0, 1])$. L'application p définit par restriction un bicolriage b de l'ensemble des sommets. Le triplet $(X, (e_\alpha), b)$ est un dessin d'enfant. On dit que c'est le *dessin d'enfant associé au revêtement ramifié* (X, p) de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$.

Soient (X, p) et (X', p') deux revêtements ramifiés finis de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, D et D' les dessins d'enfant associés. Si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de revêtements ramifiés, sa classe d'isotopie (au sens de la déf. 7) est un morphisme de dessins d'enfant de D dans D' .

Proposition B.3. *Le foncteur défini ci-dessus, de la catégorie des revêtements ramifiés finis de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, dans celle des dessins d'enfant, est une équivalence de catégories.*

Pour la démonstration, cf. [9], p. 53.

Remarques. 1) Soient \mathcal{C}_1 la catégorie des dessins combinatoires, \mathcal{C}_2 celle des dessins d'enfant et \mathcal{C}_3 celle des revêtements ramifiés finis de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Nous avons défini, dans les prop. B.2, B.3 et B.1 des équivalences de catégories de \mathcal{C}_1 dans \mathcal{C}_3 , de \mathcal{C}_3 dans \mathcal{C}_2 , et de \mathcal{C}_2 dans \mathcal{C}_1 respectivement. Leur composée diffère du foncteur identique de \mathcal{C}_1 par une transformation naturelle.

2) Soit (X, p) un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$. La surface $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ possède une décomposition cellulaire canonique dont les sommets sont $0, 1, \infty$, les arêtes $]0, 1[,]\infty, 0[,]1, \infty[$ et les faces \mathfrak{H}_+ et \mathfrak{H}_- . Les composantes connexes des images réciproques de ces cellules par p forment une décomposition cellulaire de X . Si c est une cellule de dimension 2 au-dessus de \mathfrak{H}_+ (resp. \mathfrak{H}_-), p définit par restriction un homéomorphisme de \bar{c} sur $\bar{\mathfrak{H}}_+$ (resp. $\bar{\mathfrak{H}}_-$). Nous dirons que cette décomposition cellulaire est la triangulation canonique de X . (On prendra garde que la notion de triangulation considérée ici est légèrement plus générale que celle considérée usuellement, en ce sens qu'une arête n'est pas nécessairement déterminée par la donnée de ses extrémités.)

B.4. Revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

Dans ce numéro, $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ désigne la droite projective, vue comme courbe algébrique sur \mathbf{C} . Un *revêtement (algébrique) ramifié* de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ est un couple (X, f) , où X est une courbe algébrique projective et lisse sur \mathbf{C} , et $f : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ un morphisme fini (de schémas sur \mathbf{C}). On dit que f est non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ si sa restriction à $p^{-1}(\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\})$ est un morphisme étale.

Si (X, f) et (X', f') sont deux revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, un morphisme de (X, f) dans (X', f') est un morphisme $u : X \rightarrow X'$ (de schémas sur \mathbf{C}) tel que $f' \circ u = f$.

B.4.1. Revêtement topologique associé à un revêtement algébrique.

Soit (X, f) un revêtement (algébrique) ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Notons $X(\mathbf{C})$ l'ensemble des points complexes de X et $p : X(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ l'application déduite de f . Le couple $(X(\mathbf{C}), p)$ est un revêtement (topologique) ramifié de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$, dit *associé* à (X, f) .

On définit ainsi un foncteur de la catégorie des revêtements (algébriques) ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, dans celle des revêtements (topologiques) ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C})$ non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Ce foncteur est une équivalence de catégories.

Soit (X, f) comme ci-dessus. Les composantes connexes de $X(\mathbf{C})$ sont les $Y(\mathbf{C})$, où Y est une composante connexe (ou ce qui revient au même

irréductible) de X . Ainsi la courbe X est irréductible si et seulement si $X(\mathbf{C})$ est connexe et non vide; dans ce cas le genre de X (*i.e.* la dimension sur \mathbf{C} de l'espace vectoriel des formes différentielles régulières sur X) est égal au genre de la surface topologique $X(\mathbf{C})$.

B.4.2. Revêtements étales de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

Un revêtement (algébrique) étale de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ est un couple (Y, g) , où Y est un schéma sur \mathbf{C} , et $g : Y \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ un morphisme fini et étale (de schémas sur \mathbf{C}); cela implique que Y est une courbe algébrique affine et lisse sur \mathbf{C} .

Le foncteur de la catégorie des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, dans celle des revêtements étales de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, qui à (X, f) associe (Y, g) , où $Y = f^{-1}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ et où g est induit par f , est une équivalence de catégories.

Le foncteur de la catégorie revêtements étales de $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ dans celle des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, qui à (Y, g) associe (X, f) , où X est la compactifiée lisse de la courbe affine Y et où $f : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ est l'unique morphisme prolongeant g , est une équivalence de catégories inverse de la précédente à transformation naturelle près.

B.4.3. Corps de définition, corps de rationalité.

Soit (X, f) un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Soit E un sous-corps de \mathbf{C} . Notons \mathbf{P}_E^1 la droite projective, vue comme courbe algébrique sur E . Un modèle de (X, f) sur E est la donnée d'un couple (X_E, f_E) , où X_E est une courbe algébrique sur E et $f_E : X_E \rightarrow \mathbf{P}_E^1$ un morphisme de schémas sur E , muni d'un isomorphisme de (X, f) sur le couple déduit de (X_E, f_E) par extension des scalaires de E à \mathbf{C} ; la courbe X_E est alors projective et lisse sur E et le morphisme f_E est non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_E^1 - \{0, 1, \infty\}$.

Le revêtement (X, f) possède, d'après un théorème d'Abhyankar, un modèle sur $\overline{\mathbf{Q}}$ unique à isomorphisme unique près : le foncteur extension des scalaires de $\overline{\mathbf{Q}}$ à \mathbf{C} , de la catégorie des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, dans celle des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, est une équivalence de catégories. Comme un modèle de (X, f) sur $\overline{\mathbf{Q}}$ peut être décrit par des équations dont les coefficients sont en nombre fini, (X, f) possède un modèle sur un corps de nombres. Un tel corps de nombres s'appelle un corps de définition de (X, f) .

Pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{C})$, notons $(\sigma X, \sigma f)$ le revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ déduit de (X, f) par le changement de base $\text{Spec}(\sigma)$. Si τ est un second élément de $\text{Aut}(\mathbf{C})$, $\sigma(\tau X)$ et $\sigma(\tau f)$ s'identifient canoniquement à $\sigma\tau X$ et $\sigma\tau f$. Dire que $(\sigma X, \sigma f)$ est isomorphe à (X, f) équivaut à dire qu'il existe

un isomorphisme $u_\sigma : X \rightarrow \sigma X$ de schémas sur \mathbf{C} tel que $f = \sigma f \circ u_\sigma$. L'ensemble des σ possédant cette propriété est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{C})$ de la forme $\text{Aut}_K(\mathbf{C})$ où K est un corps de nombres. On appelle K le *corps de rationalité* ou *corps des modules* du revêtement ramifié (X, f) .

Remarque. Le corps de rationalité n'est pas forcément un corps de définition ; c'est cependant le cas si le groupe des automorphismes de (X, f) est réduit à l'identité (cf. [3]). P. Dèbes et J-C. Douai ont démontré que le corps de rationalité est l'intersection de tous les corps de définitions (cf. [3]).

B.5. Triangulations adaptées et subdivisions barycentriques.

B.5.1. Dessins d'enfant triangulés.

Soit S une surface topologique compacte. Appelons *triangulation* de S une décomposition cellulaire finie (e_α) de S possédant la propriété suivante : l'adhérence de chaque face est homéomorphe à $\overline{\mathbf{B}}_2$ et contient exactement trois sommets (donc aussi trois arêtes).

Soit S une surface topologique compacte orientée, munie d'une triangulation. Une application b de l'ensemble de ses sommets dans $\{0, 1, \infty\}$ est appelée un *tricoloriage* si les trois sommets appartenant à l'adhérence de chaque face sont de types distincts (un sommet étant dit *de type* 0, 1, ou ∞ suivant que son image par b est 0, 1, ou ∞). Une arête est alors dite *de type* $\{0, 1\}$ (resp. $\{1, \infty\}$, resp. $\{\infty, 0\}$) si ses extrémités sont de type 0 et 1 (resp. 1 et ∞ , resp. ∞ et 0). Une face dite *positive* ou *négative* suivant que sur son bord orienté, le sommet qui succède à celui de type 0 est de type 1 ou ∞ .

Définition 14. *Un dessin d'enfant triangulé est un triplet $(S, (e_\alpha), b)$ où S est une surface topologique compacte orientée, (e_α) une triangulation de S et b un tricoloriage de l'ensemble des sommets.*

La définition des morphismes de dessins d'enfant triangulés est analogue à la déf. 7.

À tout dessin d'enfant triangulé \mathcal{D} , on associe le dessin d'enfant D caractérisé comme suit : D et \mathcal{D} ont même surface topologique sous-jacente, mêmes sommets de type 0 et de type 1, et les arêtes de D sont les arêtes de \mathcal{D} de type $\{0, 1\}$. Chaque face de D contient alors un unique sommet s de \mathcal{D} de type ∞ , et est la réunion des cellules de \mathcal{D} dont l'adhérence contient s .

Le foncteur ainsi défini, de la catégorie des dessins d'enfant triangulés dans celle des dessins d'enfant, est une équivalence de catégorie.

Si D est un dessin d'enfant, il existe un dessin d'enfant triangulé \mathcal{D} , unique à isomorphisme unique près, dont le dessin d'enfant associé est D . On dit que \mathcal{D} est un dessin d'enfant triangulé adapté à D , ou encore que sa triangulation est adaptée à D . (Noter que la donnée de la triangulation détermine le tricoloriage, et donc \mathcal{D} .)

Exemple. Soit (X, p) un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Soit D le dessin d'enfant associé (cf. § B.3.3). La triangulation canonique de X , définie dans la remarque 2 du § B.3.3, est adaptée à D .

Remarque. Soient \mathcal{D} un dessin d'enfant triangulé, D le dessin d'enfant associé à \mathcal{D} , (E, σ_0, σ_1) le dessin combinatoire associé à D (cf. B.2.2). Rappelons que l'on pose $\sigma_{\infty} = \sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}$. Toute arête a de \mathcal{D} de type $\{0, 1\}$ appartient à l'adhérence d'une et d'une seule face positive de \mathcal{D} . Notons $s(a)$ le sommet de type ∞ de cette face positive. L'application $s : E \rightarrow \{\text{sommets de type } \infty \text{ de } \mathcal{D}\}$ définit par passage au quotient une application bijective $\langle \sigma_{\infty} \rangle \backslash E \rightarrow \{\text{sommets de type } \infty \text{ de } \mathcal{D}\}$.

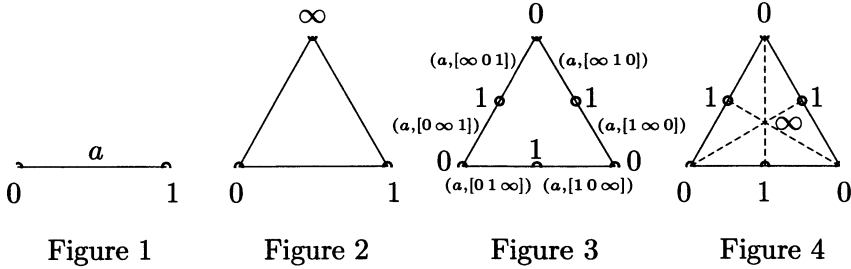
En effet, soit t un sommet de \mathcal{D} de type ∞ . Considérons les faces de \mathcal{D} dont t est un sommet. Elles sont alternativement positives et négatives. Plus précisément, lorsqu'on tourne autour de t dans le sens positif, à une face positive dont l'arête de type $\{0, 1\}$ est a , succède la face négative dont l'arête de type $\{0, 1\}$ est $\sigma^{-1}(a)$, puis la face positive dont l'arête de type $\{0, 1\}$ est $\sigma_0^{-1}\sigma^{-1}(a) = \sigma_{\infty}(a)$. Cela montre bien que les arêtes de type $\{0, 1\}$ des faces positives dont t est un sommet forment une orbite de E pour $\langle \sigma_{\infty} \rangle$.

B.5.2. Subdivision barycentrique d'un dessin d'enfant.

Soit D un dessin d'enfant. Un dessin d'enfant D' est appelé une *subdivision barycentrique* de D s'il possède les propriétés suivantes : il a même surface topologique sous-jacente que D ; il existe un dessin d'enfant triangulé adapté à D dont les faces sont les faces de D' , dont les sommets sont les sommets de type 0 de D' et dont chaque arête contient exactement un sommet de type 1 de D' . (Ce dessin d'enfant triangulé, s'il existe, est forcément unique.)

Tout dessin d'enfant possède une subdivision barycentrique. Celle-ci est unique à isomorphisme unique près (si on exige que l'isomorphisme induise l'isomorphisme identique de D).

Description graphique. — La subdivision barycentrique d'un dessin D se visualise aisément. On choisit une triangulation adaptée à D . Soit a une arête de D (Figure 1). Il existe une unique face positive de la triangulation dont le bord contient a (Figure 2). On subdivise cette face en six et on rebaptise 0 ses sommets, on choisit un sommet de type 1 sur chaque arête et un sommet de type ∞ au centre de la face (Figure 3). On ne conserve ensuite que les arêtes de type $\{0, 1\}$ et les nouveaux sommets de type 0 et 1.



B.5.3. *Subdivision barycentrique d'un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$.*

Le couple $(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}), h)$, où

$$h(z) = \frac{27z^2(z-1)^2}{4(z^2-z+1)^3}$$

est un revêtement ramifié de degré 6 de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$. On a

$$h(z) - 1 = -\frac{(z+1)^2(z-1/2)^2(z-2)^2}{(z^2-z+1)^3}.$$

Les points de $h^{-1}(0)$ sont 0, 1, ∞ , d'indices de ramification 2, ceux de $h^{-1}(1)$ sont $-1, 1/2, 2$, d'indices de ramification 2 et ceux de $h^{-1}(\infty)$ sont $\rho = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\rho}$, d'indices de ramification 3.

L'image réciproque de $[0, 1]$ est la droite $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$. Le dessin d'enfant associé à $(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}), h)$ est une subdivision barycentrique du dessin d'enfant associé à $(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}), \text{Id})$:

Soit (X, p) un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Soit D le dessin d'enfant associé (cf. 3.3). Le couple $(X, h \circ p)$ est un revêtement ramifié fini de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifié au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, dont le dessin d'enfant associé est une subdivision barycentrique de D . On l'appelle *la subdivision barycentrique* de (X, p) .

Remarques. 1) Soient n, n_0, n_1, n_{∞} le degré et les cardinaux des fibres $p^{-1}(0), p^{-1}(1)$, et $p^{-1}(\infty)$. Alors :

- i) le degré du revêtement ramifié $h \circ p$ est $6n$;
- ii) sa fibre au-dessus de 1 a $3n$ points, d'indices de ramification 2 ;
- iii) sa fibre au-dessus de ∞ a $2n$ points, d'indices de ramification 3 ;
- iv) sa fibre au-dessus de 0 a $n_0 + n_1 + n_{\infty}$ points, d'indices de ramification

pairs.

2) Deux revêtements ramifiés finis (X, p) et (X', p') de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, ont même subdivision barycentrique si et seulement si l'on a $X' = X$ et $p' = p \circ s$, où s est un automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ qui stabilise $\{0, 1, \infty\}$.

B.5.4. Subdivision barycentrique d'un dessin combinatoire.

Définition 15. Soit (E, σ_0, σ_1) un dessin combinatoire. On appelle subdivision barycentrique de (E, σ_0, σ_1) le dessin combinatoire $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$ défini par

$$\begin{aligned} E' &= E \times \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}} \\ \sigma'_0(x, u) &= \begin{cases} (x, u \circ \tau_{1\infty}) & \text{si } u \text{ est paire} \\ (\sigma_{u(0)}(x), u \circ \tau_{1\infty}) & \text{si } u \text{ est impaire} \end{cases} \\ \sigma'_1(x, u) &= (x, u \circ \tau_{01}) \end{aligned}$$

où $\sigma_\infty = \sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}$ et où, pour $i, j \in \{0, 1, \infty\}$, τ_{ij} est la transposition de $\{0, 1, \infty\}$ qui échange i et j .

Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante : si (E, σ_0, σ_1) est le dessin combinatoire associé à un dessin d'enfant D , $(E', \sigma'_0, \sigma'_1)$ s'identifie au dessin combinatoire associé à une subdivision barycentrique D' de D lorsque les arêtes D et D' sont indexées comme suit (en reprenant les figures 1, 2, 4 de la description graphique donnée au § B.5.2, et en notant $[i j k]$ la permutation de $\{0, 1, \infty\}$ qui applique 0 sur i , 1 sur j et ∞ sur k).

Il résulte de la remarque 1 du § B.5.3 que les cycles de σ'_0 sont de longueur paire et que leur nombre est la somme des nombres de cycles de σ_0, σ_1 et σ_∞ , que les cycles de σ'_1 sont de longueur 2 et ceux de $\sigma'_\infty = \sigma'^{-1}_0 \sigma'^{-1}_1$ sont de longueur 3 (assertions qui se démontrent aussi facilement à partir de la déf. 15).

Bibliographie

- [1] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron Models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **21**, Springer-Verlag, (1990).
- [2] J.-M. COUVEIGNES, *Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0*. Annales de l'Institut Fourier, **44** (1) (1994), p. 1–38.
- [3] P. DÈBES, J.-C. DOUAI, *Algebraic covers : field of moduli versus field of definition*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup, tome **30** (1997), p. 303–338.
- [4] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique : I, Le langage des schémas*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **4** (1960).
- [5] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique : II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **8** (1961).
- [6] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique : IV, Étude locale des schémas et morphismes de schémas (Première Partie)*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **20** (1964).
- [7] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique : IV, Étude locale des schémas et morphismes de schémas (Seconde Partie)*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **24** (1965).
- [8] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique : IV, Étude locale des schémas et morphismes de schémas (Quatrième Partie)*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **32** (1967).

- [9] J. OESTERLÉ, *Revêtements de $\mathbb{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$* . Notes du cours de DEA prises par A. Kraus, année 1993–1994, non publiées.

Layla PHARAMOND DIT D'COSTA
Institut de mathématiques de Jussieu
Équipe de théorie des nombres (case 247)
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
E-mail : pharamond@math.jussieu.fr