Journal de l'École polytechnique
Mathématiques

Pascal Boyer

Principe de Mazur en dimension supérieure

Tome 6 (2019), p. 203-230.

<http://jep.centre-mersenne.org/item/JEP_2019__6__203_0>

Publié avec le soutien
du Centre National de la Recherche Scientifique

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques
Tome 6, 2019, p. 203–230 DOI: 10.5802/jep.92

PRINCIPE DE MAZUR EN DIMENSION SUPÉRIEURE

par Pascal Boyer

Résumé. — Le principe de Mazur pour GL_2 fournit des conditions simples pour qu'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible non ramifiée provenant d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(Np)$ provienne aussi d'une forme de niveau $\Gamma_0(N)$. L'objectif de ce travail est de proposer une généralisation de ce principe en dimension supérieure pour certaines formes intérieures étendues non quasi-déployées d'un groupe unitaire en étudiant la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor en lien avec la dégénérescence de la monodromie locale.

Abstract (Mazur's principle in higher dimension). — The Mazur principle for GL_2 gives simple conditions for an irreducible unramified $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-representation coming from a modular form of level $\Gamma_0(Np)$ to come from some modular form of level $\Gamma_0(N)$. The aim of this work is to give a generalization of this principle in higher dimension for some particular non quasi-split extended inner forms of a unitary group, by studying the torsion cohomology classes of Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type in relation with the local monodromy degeneracy.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie classique des formes modulaires, une question importante est la détermination du niveau optimal à partir duquel une représentation galoisienne modulo ℓ est modulaire : que l'on pense par exemple à son application à la preuve du

Classification Mathématique (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.
Mots-clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

grand théorème de Fermat. Les conjectures de Serre, désormais prouvées par Khare et Wintenberger dans [12], fournissent un cadre précis pour cette question dans le cas de GL_2. Avant que ne soient établies les conjectures de Serre, le principe de Mazur, rappelé ci-après, constituait le résultat le plus évolué sur ce thème et, par exemple, l'ingrédient principal dans la preuve du théorème de Ribet.

Théorème (Principe de Mazur cf. [14, Th. 6.1]). — *Soient N un entier, p un nombre premier ne divisant pas N et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ une représentation galoisienne provenant d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(Np)$. On suppose que*

- *$p \neq \ell$,*
- *$\overline{\rho}$ est irréductible et non ramifiée en p et*
- *ℓ ne divise pas $p-1$.*

Alors $\overline{\rho}$ provient d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(N)$.

L'objectif de ce travail est de proposer une version du principe de Mazur pour les représentations automorphes de GL_d autoduales pour un corps CM, en utilisant la cohomologie des variétés de Shimura. Il est bien connu qu'au delà du cas $d=2$, il n'y a pas de variété de Shimura pour GL_d et la solution usuelle consiste à remplacer GL_d par un groupe de similitudes $G/\mathbb{Q}$ qui, localement pour « la moitié » des premiers p, ressemble à $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$, au sens plus précis où, cf. (1.2.1), $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_d(F_v) \times \cdots$, où F est un corps CM et où $v|p$ sera une place de F jouant le rôle du premier p dans le principe de Mazur. Pour que la situation géométrique soit la plus simple possible et qu'on dispose donc d'un meilleur contrôle de la cohomologie, on choisit le groupe G de façon à nous retrouver dans la situation étudiée par Harris et Taylor dans [10], i.e., en signatures $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$. La formulation précise du principe de Mazur dans cette situation est donnée au théorème 1.3.2, donnons simplement dans cette introduction une idée de ce que devient l'hypothèse clef « $\overline{\rho}$ non ramifiée en p » dans notre situation.

Une représentation automorphe Π de G fournit des paramètres de Satake en ses places de non ramification et donc un idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}}$ d'une algèbre de Hecke « anémique », cf. la définition 1.2.4 : on note aussi $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal associé à la réduction modulo ℓ de ces paramètres de Satake. D'après [10], on associe à $\widetilde{\mathfrak{m}}$ une représentation $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ sa réduction modulo ℓ. Comme dans le cas de GL_2

– on part d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ s'écrivant comme la réduction modulo ℓ de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ où $\widetilde{\mathfrak{m}}$ est associé à une représentation automorphe Π de niveau I,

– et on cherche des conditions pour l'existence d'une représentation automorphe Π' de niveau I' avec $I_v \subsetneq I'_v$, quitte à augmenter I en des places annexes $w \neq v$, de sorte que si $\widetilde{\mathfrak{m}}'$ est l'idéal premier de l'algèbre de Hecke anémique associé à Π', alors $\widetilde{\mathfrak{m}}' \subset \mathfrak{m}$, autrement dit si $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}',v}$ est la représentation galoisienne construite par [10], alors sa réduction modulo ℓ est isomorphe à $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$.

Lorsque la composante en p du sous-groupe compact considéré est parahorique, la condition de non ramification en p dans le cas de GL_2, est remplacée par la dégénérescence de la monodromie au sens suivant. Le logarithme de la monodromie à la place v de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ définit un opérateur nilpotent $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ de GL_d dont la taille des blocs de Jordan fournit une partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ de d. En supposant $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ irréductible et en prenant $\ell \geqslant d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$, où $d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est l'indice de nilpotence de $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$, alors $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ possède une structure entière unique et admet donc une réduction modulo ℓ fournissant une partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ne dépendant pas du choix de Π. La condition de non ramification pour GL_2 devient alors : *pour la relation de dominance usuelle sur les partitions,* $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ *est strictement plus petite que* $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

La démonstration repose sur l'étude de la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor, et sur l'observation que cette torsion se relève, cf. le résultat principal de [7], en caractéristique 0 quitte à augmenter le niveau en une place annexe. L'idée consiste alors à jouer avec cette propriété

– en la place p où à l'aide des hypothèses du théorème 1.3.2, on parvient à diminuer le niveau en p tout en gardant une torsion non triviale,

– puis en augmentant le niveau en une place annexe quelconque, on relève cette torsion en caractéristique nulle.

On étudie en outre, cf. le corollaire 1.3.3, l'existence d'un Π tel que $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ ainsi, cf. le corollaire 3.4.2, que des conditions explicites sur $\widetilde{\mathfrak{m}}$ pour que $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ en v ne dégénère pas i.e., tel que la partition en bloc de Jordan de la réduction modulo ℓ de $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ soit égale à $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

Remerciements. — Nous remercions V. Sécherre pour nous avoir expliqué le lemme 1.1.7. ainsi que V. Lafforgue pour ses nombreuses remarques sur une première version de ce travail.

1. Dégénérescence de la monodromie et diminution du niveau

1.1. Rappels sur les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $\mathrm{GL}_d(K)$.

— Notons K un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance d'un nombre premier p. Une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π où l'action de $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in \mathrm{GL}_n(K) \mapsto q^{-\operatorname{val}(\det g)}$.

1.1.1. Définitions. — Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Levi M et de radical unipotent N. On note $\delta_P : P(K) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\mathrm{ad}(h)_{|\,\mathrm{Lie}\,N})|^{-1}.$$

Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations de respectivement $\mathrm{GL}_{n_1}(K)$ et $\mathrm{GL}_{n_2}(K)$, et P_{n_1,n_2} le parabolique standard de $\mathrm{GL}_{n_1+n_2}$ de Levi $M = \mathrm{GL}_{n_1} \times \mathrm{GL}_{n_2}$ et de radical unipotent N,

$$\pi_1 \times \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1,n_2}(K)$ à $\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(K) \to V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1,n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\big(f(g)\big), \quad \forall\, n \in N,\ \forall\, m \in M,\ \forall\, g \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

1.1.2. Notation. — Soient g un diviseur de $d=sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_g(K)$. L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\pi\{\frac{1-s}{2}\}\times\pi\{\frac{3-s}{2}\}\times\cdots\times\pi\{\frac{s-1}{2}\}$ est noté $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$).

Notons $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K et ϖ_K une uniformisante. Le sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_K)$ des éléments dont la réduction modulo ϖ_K est triangulaire supérieure, est le classique sous-groupe d'Iwahori. Rappelons que toute représentation irréductible de $\mathrm{GL}_d(K)$ admettant des vecteurs non nuls invariants sous le sous-groupe d'Iwahori est, avec les notations précédentes un sous-quotient d'une induite $\chi_1\times\cdots\times\chi_d$ où les χ_i sont des caractères de $K^\times$ uniquement définis à l'ordre près.

1.1.3. Notation. — Pour toute représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_d(K)$ ayant des vecteurs non nuls invariants par le sous-groupe d'Iwahori, on note[(1)]

$$V(\pi)=\{\chi_i(\varpi_K)\mid i=1,\dots,d\},$$

où les caractères χ_i sont tels que π est un sous-quotient de l'induite $\chi_1\times\cdots\times\chi_d$.

Remarque. — Avec les notations précédentes, on a

$$V(\mathrm{St}_t(\chi))=\bigl\{\chi(\varpi_K)q^{(1-t)/2},\chi(\varpi_K)q^{(1-t+2)/2},\dots,\chi(\varpi_K)q^{(t-1)/2}\bigr\}.$$

1.1.4. Définition. — Étant donnée une partition de d

$$\underline{m}=(m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_r\geqslant 1)\text{ avec }d=m_1+\cdots+m_r,$$

le sous-groupe parahorique standard associé $\mathrm{Iw}(\underline{m})$ est par définition l'ensemble des éléments de $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_K)$ dont la réduction modulo ϖ_K appartient au parabolique standard $P_{m_1,\dots,m_r}$ de Levi $\mathrm{GL}_{m_1}\times\mathrm{GL}_{m_2}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{m_r}$:

$$\mathrm{Iw}(\underline{m}):=\ker\bigl(\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_K)\to P_{m_1,m_2,\dots,m_r}(\mathscr{O}_K/(\varpi_K))\bigr).$$

Un sous-groupe parahorique est alors un conjugué d'un parahorique standard par un élément de $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_K)$.

Remarque. — Pour $m_1=m_2=\cdots=m_d=1$, on retrouve le classique sous-groupe d'Iwahori.

On associe habituellement à une partition $\underline{m}=(m_1\geqslant\cdots\geqslant m_r)$ de d, un diagramme de Ferrers dont la i-ème ligne est de longueur m_i. Les longueurs $t_1\geqslant\cdots\geqslant t_{m_1}$ des colonnes du diagramme de Ferrers définissent alors la partition

$$\underline{m}^*=(t_1\geqslant\cdots\geqslant t_{m_1})$$

conjuguée de $\underline{m}$.

(1) Plus précisément $V(\pi)$ est un multi-ensemble, c'est-à-dire qu'on garde en mémoire la répétition des $\chi(\varpi_K)$.

1.1.5. Notation. — Pour $\underline{m}$ une partition de conjuguée $\underline{m}^* = (t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_{m_1})$, on note $\underline{m}^{(1)}$ la partition dont la conjuguée est $(t_2 \geqslant t_3 \geqslant \cdots \geqslant t_{m_1})$.

Remarque. — Autrement dit $\underline{m}^{(1)}$ est la partition obtenue à partir de $\underline{m}$ en supprimant sa première colonne.

1.1.6. Définition. — On dira d'une partition $\underline{m} = (m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r)$ de n qu'elle est contenue dans une partition $\underline{m}' = (m'_1 \geqslant m'_2 \geqslant \cdots \geqslant m'_{r'})$ de n' si $r \leqslant r'$ et si pour tout $i = 1, \ldots, r$ on a $m_i \leqslant m'_i$.

On rappelle la relation de dominance usuelle sur les partitions

$$\underline{n} = (n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots) \leqslant \underline{m} = (m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots) \iff \forall\, k \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^k n_i \leqslant \sum_{i=1}^k m_i.$$

La relation $\underline{n} \leqslant \underline{m}$ est équivalente à $\underline{m}^* \leqslant \underline{n}^*$ sur les partitions conjuguées.

1.1.7. Lemme. — *Soit $\pi \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_s}(\chi_s)$ avec $t_1 + \cdots + t_s = d$ et où $\chi_1, \ldots, \chi_s$ sont des caractères de $K^\times$. L'ensemble des sous-groupes parahoriques P tels que π ait des vecteurs non nuls P-fixes, admet un plus grand élément dont les tailles des blocs sont, à conjugaison près, ceux de la partition $\underline{d}(\pi)$ conjuguée à $(t_1 \geqslant \cdots \geqslant t_s)$.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{K} = \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_K)$ le compact maximal de $\mathrm{GL}_d(K)$, puis $\mathscr{K}(1)$ son pro-p radical. Rappelons que π a des vecteurs non nuls P-fixes si et seulement si l'espace $\mathscr{K}(\pi)$ des vecteurs non nuls $\mathscr{K}(1)$-fixes de π vu comme représentation de $\mathscr{K}/\mathscr{K}(1)$ a des vecteurs non nuls fixes par $P' := P/\mathscr{K}(1)$, c'est-à-dire si $\mathscr{K}(\pi)^{U'}$, où U' le radical unipotent de P', contient le caractère trivial de $M' = P'/U'$.

En appliquant l'involution de Zelevinski Z, on se ramène à la propriété que $\mathscr{K}(Z(\pi))^{U'}$ contient un facteur non dégénéré, c'est-à-dire au fait que $Z(\pi)$ est λ-dégénérée, où λ désigne la partition de d donnée par les blocs de M', au sens de la théorie des modèles de Whittaker dégénérés, cf. [16, §V.5]. Le résultat découle alors de loc. cit. □

1.1.8. Définition. — À la représentation $\pi \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_s}(\chi_s)$ on associe $T(\pi)$, le diagramme de Ferrers étiqueté par $V(\pi)$, défini comme suit :

- les longueurs des lignes de ce tableau sont les $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_s$
- et on étiquette la i-ème ligne de gauche à droite avec dans l'ordre les

$$\chi_i q^{(1-t_i)/2}, \ldots, \chi_i q^{(t_i-1)/2}.$$

1.2. Représentation galoisienne associée à $\mathfrak{m}$. — Soient F^+ un corps totalement réel et $E/\mathbb{Q}$ une extension quadratique imaginaire : on considère alors le corps $F = EF^+$ qui est CM. Pour toute place w de F, on notera

- F_w son localisé en w,
- $\mathscr{O}_w$ son anneau des entiers d'uniformisante ϖ_w et
- q_w le cardinal du corps résiduel $\kappa(w) := \mathscr{O}_w/(\varpi_w)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes, noté G_τ dans [10], défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \mid gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{\mathrm{op}} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{\mathrm{op}})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{\mathrm{op}})^\times, \tag{1.2.1}$$

où, en identifiant les places de F^+ au-dessus de x avec les places de F au-dessus de y, $x = \prod_i z_i$ dans F^+. Dans [10, Lem. I.7.1], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel que pour tous tels d, E^+ et F :

– si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;

– les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier $p = uu^c$ décomposé dans E tel qu'il existe une place v de F au-dessus de u avec

$$(B_v^{\mathrm{op}})^\times \simeq \mathrm{GL}_d(F_v).$$

On note

$$v_1 = v,\ v_2, \ldots, v_r$$

les places de F au-dessus de u. Avec un abus coupable de notation, on utilisera $G(F_v)$ pour désigner le facteur en v de la formule (1.2.1), isomorphe donc à $\mathrm{GL}_d(F_v)$.

1.2.2. Définition. — Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »[(2)] de $G(\mathbb{A}^\infty)$, de la forme $U^v K_v$ avec

– $U^v = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \ker\big(\mathscr{O}_{B_{v_i}}^\times \to (\mathscr{O}_{B_{v_i}}/\mathscr{P}_{v_i}^{n_i})^\times\big)$ pour des entiers $n_2, \ldots, n_r$ positifs ou nuls,

– et où K_v est un sous-groupe parahorique.

– Pour $I = U^v K_v \in \mathscr{I}$ comme ci-avant, on notera $I^v = U^v$ et $I_v = K_v$.

On note alors, cf. le paragraphe 2.1, $(X_I)_{I \in \mathscr{I}}$ le système projectif des variétés de Shimura, dites de Kottwitz-Harris-Taylor, associé au groupe G au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_v$ tel qu'il est introduit dans [10].

1.2.3. Notation. — Pour $I \in \mathscr{I}$, on note $\mathrm{Spl}(I)$ l'ensemble des places w de F telles que $p_w := w_{|\mathbb{Q}}$ est décomposée dans E et, cf. la formule (1.2.1), la composante locale I_w de I à la place w est isomorphe à $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_w)$.

[(2)] tels qu'il existe une place $x \neq p$ pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [10, bas de la p. 90].

Fixons pour la suite un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$. Étant donnée une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation algébrique irréductible ξ de $G(\mathbb{Q})$, rappelons qu'une $\mathbb{C}$-représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ est dite ξ-cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i((\operatorname{Lie} G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \iota(\xi^\vee)) \neq (0),$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [10, p. 92]. Une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sera dit automorphe ξ-cohomologique s'il existe une $\mathbb{C}$-représentation ξ-cohomologique Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ telle que $\iota(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$ est une $\mathbb{C}$-représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.

Remarque. — Si $\iota' : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ est un autre choix d'isomorphisme et si Π^∞ est automorphe ξ-cohomologique relativement à ι, alors, d'après la formule de Matsushima, $(\iota')^{-1} \circ \iota(\Pi^\infty)$ l'est relativement à ι'.

1.2.4. Définition. — Pour ℓ un nombre premier distinct de p et $I \in \mathscr{I}$ un niveau fini, soit

$$\mathbb{T}_I := \mathbb{Z}_\ell\big[T_{w,i} \mid w \in \operatorname{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d\big],$$

l'algèbre de Hecke « anémique » associée à $\operatorname{Spl}(I)$, où $T_{w,i}$ est la fonction caractéristique de

$$\operatorname{GL}_d(\mathscr{O}_w) \operatorname{diag}(\overbrace{\varpi_w, \dots, \varpi_w}^{i}, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \operatorname{GL}_d(\mathscr{O}_w) \subset \operatorname{GL}_d(F_w).$$

Remarque. — L'algèbre $\mathbb{T}_I$ ne dépend que de $\operatorname{Spl}(I)$ au sens où si $J \in_I C$ est tel que $\operatorname{Spl}(J) = \operatorname{Spl}(I)$ alors $\mathbb{T}_J = \mathbb{T}_I$.

On fixe à présent une représentation algébrique ξ de $G(\mathbb{Q})$ et on note, cf. le paragraphe 2.3, $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local associé, défini sur tout X_I pour $I \in \mathscr{I}$. On note alors $\mathbb{T}_I(\xi)$ l'image de $\mathbb{T}_I$ dans les endomorphismes $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-linéaires du quotient libre $H^{d-1}_{\mathrm{free}}(X_{I,\overline{\eta}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ de la cohomologie en degré médian de la fibre générique géométrique de X_I, à coefficients dans $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$.

Remarque. — Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'aux systèmes de valeurs propres de Hecke $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}_I$ donnant lieu, cf. le début du paragraphe 1.3, à une représentation galoisienne $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ irréductible de sorte qu'il suffit de considérer l'image de $\mathbb{T}_I$ dans la cohomologie en degré médian. En outre on a vu dans [6] que tout système de valeurs propres de Hecke dans la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-cohomologie, se relevait, quitte à augmenter le niveau I, en une représentation automorphe tempérée entière, ce qui justifie de ne regarder que l'image de $\mathbb{T}_I$ dans le quotient libre de la cohomologie en degré médian.

Les idéaux premiers minimaux de $\mathbb{T}_I(\xi)$ sont les idéaux premiers de $\mathbb{T}_I(\xi)$ au-dessus de l'idéal nul de $\mathbb{Z}_\ell$ et sont donc en bijection naturelle avec les idéaux premiers de $\mathbb{T}_I(\xi) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Ainsi pour un tel idéal $\widetilde{\mathfrak{m}}$ premier minimal, $(\mathbb{T}_I(\xi) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell)/\widetilde{\mathfrak{m}}$ est une extension finie $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ de $\mathbb{Q}_\ell$.

Remarque. — Un idéal $\widetilde{\mathfrak{m}}$ premier minimal de $\mathbb{T}_I(\xi)$ est dit ξ-cohomologique au sens où il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation automorphe ξ-cohomologique Π de $G(\mathbb{A})$ possédant des vecteurs non nuls fixes sous I et telle que pour tout $w \in \mathrm{Spl}(I)$, les paramètres de Satake de Π_{p_w} sont donnés par les images des $T_w^{(i)} \in K_{\widetilde{\mathfrak{m}}} := (\mathbb{T}_I(\xi) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell)/\widetilde{\mathfrak{m}}$, où $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. On notera qu'un tel Π n'est pas nécessairement unique mais définit une unique classe d'équivalence proche au sens de [15] que l'on notera $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$.

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et on notera $\overline{\mathbb{T}}_I(\xi) := \mathbb{T}_I(\xi) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ de sorte que $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ s'injecte canoniquement dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell = (\overline{\mathbb{T}}_I(\xi) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)/\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

Dans la suite nous ne considérerons que des idéaux premiers ξ-cohomologiques, ce qui permet de définir leur représentation galoisienne associée au sens suivant.

1.2.5. Définition. — On note

$$\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

la représentation galoisienne associée à un tel Π d'après [10] et [15].

Remarque. — Pour toute place $w \in \mathrm{Spl}(I)$, les valeurs propres de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Frob}_w)$ sont données par les paramètres de Satake de Π_v et appartiennent donc à $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$.

La restriction de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ au groupe de Galois local en v s'identifie à une représentation de Weil-Deligne $(\sigma_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}, N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v})$ où $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est le logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale. Notons que cet opérateur nilpotent est défini via la somme finie

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}-1} \frac{x^k}{k},$$

où $d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est l'ordre de nilpotence de $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$. En particulier

– si $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est entière, i.e., s'il existe un réseau stable Γ et si $\ell \geqslant d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$, alors l'opérateur $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est défini sur Γ et on note $\overline{N}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v,\Gamma}$ sa réduction modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Dans la suite ℓ vérifiera toujours l'inégalité $\ell \geqslant d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$.

– Si en outre la réduction modulo ℓ de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est irréductible alors tous les réseaux stables Γ sont homothétiques et on notera simplement $\overline{N}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$.

1.2.6. Notation. — Tout élément nilpotent de $\mathrm{GL}_d(F_v)$ admet une forme de Jordan associée à une unique partition de d donnée par la taille de ses blocs de Jordan. On note

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} \quad \text{resp. } \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$$

la partition associée à $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ (resp. à $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$).

On introduit alors les diagrammes de Ferrers étiquetés $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ et $T_{\mathfrak{m},v}$ associés respectivement à $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ et $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ dont les longueurs des lignes sont les tailles, classées par ordre décroissant, des blocs de Jordan de l'opérateur de monodromie associé. En particulier $d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est la longueur de la première ligne. On rappelle par ailleurs que les longueurs des colonnes de $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ sont les $\dim\ker N^{i+1}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v} - \dim\ker N^{i}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$. On a une formule analogue pour $T_{\mathfrak{m},v}$ de sorte qu'en particulier

$$\underline{d_{\mathfrak{m},v}} \leqslant \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}.$$

REMARQUE. — Avec les notations de la définition 1.1.8 et la description de la correspondance de Langlands locale, $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est le diagramme de Ferrers $T(\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}},v})$.

1.3. ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL. — À présent on notera simplement $\mathbb{T}_I$ pour $\mathbb{T}_I(\xi)$. Considérons un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}_I$ qui est ξ-cohomologique au sens où au moins un idéal premier minimal $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ l'est. Pour un tel $\widetilde{\mathfrak{m}}$, on a une injection $\mathbb{T}_I/\widetilde{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ où $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ désigne l'anneau des entiers de $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$: la composée de cette injection avec la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ coïncide alors avec la surjection $\mathbb{T}_I/\widetilde{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$. On peut ainsi parler de la réduction modulo $\mathfrak{m}$ des paramètres de Satake $S_{\widetilde{\mathfrak{m}}}(w)$ lesquels ne dépendent donc que de $\mathfrak{m}$ et sont donc donnés par le multi-ensemble des racines du polynôme de Hecke en w

$$P_{\mathfrak{m},w}(X) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i q_w^{i(i-1)/2}\, \overline{T_{w,i}}\, X^{d-i} \in \overline{\mathbb{F}}_\ell[X]$$

i.e.,

$$S_{\mathfrak{m}}(w) := \big\{\lambda \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_\ell \mid P_{\mathfrak{m},w}(\lambda) = 0\big\}.$$

Ainsi tout idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ qui est ξ-cohomologique, fournit une (ou des) représentation automorphe dont les paramètres de Satake modulo ℓ en toute place de $\mathrm{Spl}(I)$ sont donnés par $\mathfrak{m}$; pour deux tels idéaux premiers on obtient ainsi des représentations automorphes dites congruentes, au sens où elles partagent les mêmes paramètres de Satake en presque toutes les places.

1.3.1. DÉFINITION. — On dira que $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ est détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$ si, cf. la notation 1.1.5 et la définition 1.1.6, $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$ n'est pas contenu dans $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$.

1.3.2. THÉORÈME. — *Soient*

– *$I \in \mathscr{I}$ un sous-groupe compact ouvert tel que modulo ϖ_v, la composante I_v de I à la place v, cf. la formule* (1.2.1), *est un sous-groupe parahorique relativement à une partition $\underline{m} = (m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_r)$ de d avec $r > 1$,*

– *et, cf. la remarque suivant la définition* 1.2.4, *$\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{T}_I$,*

tels que $\underline{m}$ soit maximal relativement au fait qu'il existe un idéal premier minimal $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ ainsi qu'une représentation automorphe irréductible $\Pi \in \Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ possédant des vecteurs non nuls invariants sous I. On suppose alors que :

(1) *$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, est irréductible*
(2) *$\ell \geqslant d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$;*
(3) *la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ est strictement plus petite que la partition $\underline{m}^*$ conjuguée à $\underline{m}$;*
(4) *au choix*
  (i) *soit $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ est détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$,*

(ii) *soit la composante locale en* v *de* $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ *n'est pas de la forme* $\chi_{v,1} \times \chi_{v,2} \times ?$ *pour* $\chi_{v,1}$ *et* $\chi_{v,2}$ *des caractères de* $F_v^\times$ *tels que* $\chi_{v,2} \equiv \chi_{v,1}\nu \bmod \ell$ *où*

$$\nu : x \in F_v^\times \longmapsto q^{-\operatorname{val} x},$$

et ? *une représentation quelconque.*

Alors pour toute place $w \in \mathrm{Spl}(I)$ *distincte de* v*, il existe un sous-groupe parahorique* I'_v *(resp.* I'_w*) associée à une partition* $\underline{m}'_v > \underline{m}$ *(resp.* $\underline{m}'_w$*) ainsi qu'un idéal maximal* ξ*-cohomologique* $\mathfrak{m}'$ *de* $\mathbb{T}_{I'}$*, où* $I' := I'_v I'_w I^{v,w}$*, tel que*

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}'} \simeq \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}.$$

Autrement dit, $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ *provient d'une représentation automorphe de niveau* I'*.*

Remarque. — Comme $\ell \geqslant d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ est bien défini indépendamment du réseau stable. Par maximalité de $\underline{m}$, on a $d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v} = \underline{m}^*$ de sorte que l'hypothèse $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} < \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ est clairement nécessaire pour obtenir un énoncé de diminution du niveau.

Le principe de la démonstration consiste à calculer la cohomologie en niveau I de la variété de Shimura associée à G, cf. le paragraphe 2.1, en utilisant la suite spectrale de Rapoport-Zink en la place v. On constate alors

– $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ étant irréductible, sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ cette suite spectrale dégénère en E_1, tous les groupes de cohomologie étant concentrés en degré médian ;

– l'hypothèse $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} < \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ impose que certains des termes initiaux de cette suite spectrale ont de la torsion non triviale.

Ainsi la cohomologie de toute la variété de Shimura admet une filtration dont certains gradués sont de torsion et la partie la plus difficile de la preuve consiste, proposition 3.3.1,

– à montrer que la cohomologie elle-même admet de la torsion non triviale

– et que celle-ci subsiste en diminuant légèrement le niveau en v.

On utilise alors le résultat principal de [7] qui permet de relever une telle classe de torsion en caractéristique 0 quitte à augmenter le niveau en une place auxiliaire.

Une question naturelle est d'itérer ce résultat afin de construire un niveau $I' = I^{v,w} I'_v I'_w$ avec $I'_w \subset I_w$ et I'_v un sous-groupe parahorique associé à une partition $\underline{m}$, de sorte qu'il existe $\widetilde{\mathfrak{m}}$ avec

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{m}$$

et $\Pi \in \Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ ayant des vecteurs non nuls invariants sous I'. C'est clairement le cas si $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ n'admet pas plus d'une ligne de longueur 1 puisqu'alors la condition (4ii) est toujours vérifiée. Plus généralement on a l'énoncé suivant.

1.3.3. Corollaire. — *Supposons que l'ensemble des étiquettes des lignes de longueur* 1 *du diagramme de Ferrers étiqueté associé à* $\overline{d_{\mathfrak{m},v}}$*, ne contient aucun sous-ensemble de la forme* $\{\alpha, q\alpha\}$*. Alors pour toute place* $w \in \mathrm{Spl}(I)$ *distincte de* v*, il existe* *un sous-groupe parahorique I'_v (resp. I'_w) associée à la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}^*$ (resp. $\underline{m'_w}$) ainsi qu'un idéal maximal ξ-cohomologique $\mathfrak{m}'$ de $\mathbb{T}_{I'}$, où $I' := I'_v I'_w \overline{I^{v,w}}$, tel que*

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}'} \simeq \overline{\rho}_{\mathfrak{m}},$$

autrement dit $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ provient d'une représentation automorphe de niveau I'.

Remarque. — On notera que dans le cas $d=2$ si l'hypothèse (4ii) n'est pas vérifié alors il n'y a rien à démontrer puisqu'il existe alors un $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ non ramifié en v.

Au paragraphe 3.4, on donnera par ailleurs un énoncé de non dégénérescence de la monodromie, i.e., des conditions explicites sur $\mathfrak{m}$ et $\widetilde{\mathfrak{m}}$, pour que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$, cf. le corollaire 3.4.2.

2. Cohomologie des variétés de Kottwitz-Harris-Taylor

2.1. Rappels sur la géométrie. — On reprend les notations du paragraphe 1.2 où G est un groupe de similitudes sur $\mathbb{Q}$ et $p = uu^c$ un nombre premier décomposé dans E avec une place notée v de F au-dessus de u telle que $(B_v^{\mathrm{op}})^\times \simeq \mathrm{GL}_d(F_v)$. On note alors

$$(X_I)_{I\in\mathscr{I}}$$

le système projectif des variétés de Shimura associé au groupe G au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_v$ tel qu'il est introduit dans [10] : ces variétés de Shimura sont dites de Kottwitz-Harris-Taylor. Ce système projectif est muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty)\times\mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v)\in\mathbb{Z}$, avec $\deg = \mathrm{val}\circ\mathrm{Art}^{-1}$ où $\mathrm{Art}^{-1} : W_v^{\mathrm{ab}} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

2.1.1. Notation. — On note : X_{I,s_v} (resp. X_{I,η_v}) la fibre spéciale (resp. générique) de X_I en v et $X_{I,\bar{s}_v} := X_{I,s_v}\times\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique (resp. $X_{I,\overline{\eta}_v}$ la fibre générique géométrique).

Pour $I\in\mathscr{I}$ tel que, cf. la définition 1.2.2, sa composante I_v à la place v, est le sous-groupe parahorique standard associé à la partition $(m_1\geqslant\cdots\geqslant m_r)$ de d. Alors le morphisme $X_I\to X_{I^v}$ est le problème de modules correspondant à la donnée d'une chaîne d'isogénies

$$\mathscr{G}_A = \mathscr{G}_0 \longrightarrow \mathscr{G}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{G}_r = \mathscr{G}_A/\mathscr{G}_A[\varpi_v]$$

de $\mathscr{O}_v$-modules de Barsotti-Tate où :

– pour tout $i=1,\dots,r$, l'isogénie $\mathscr{G}_{i-1}\to\mathscr{G}_i$ est de degré q^{m_i} et

– la composée de ces r isogénies est égale à l'application canonique $\mathscr{G}_A \to \mathscr{G}_A/\mathscr{G}_A[\varpi_v]$,

où $\mathscr{G}_A$ est le module de Barsotti-Tate associé à la variété abélienne universelle sur X_{I^v}.

2.1.2. Notation. — Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on note $Y_{I,i}$ le sous-schéma fermé de $X_{I,\bar{s}_v}$ sur lequel $\mathscr{G}_{i-1} \to \mathscr{G}_i$ a un noyau connexe. Pour tout $S \subset \{1, \ldots, r\}$ non vide, on note

$$Y_{I,S} = \bigcap_{i \in S} Y_{I,i}, \qquad Y^0_{I,S} = Y_{I,S} \smallsetminus \bigcup_{S \subsetneq T} Y_{I,T}.$$

Pour tout $1 \leqslant m \leqslant r$, soit

$$Y_I^{(r)} := \coprod_{\sharp S = r} Y_{I,S} \quad \text{et} \quad a_r : Y_I^{(r)} \longrightarrow Y_I$$

la projection.

De la théorie du modèle local de Rapoport-Zink, on déduit la description suivante, cf. par exemple [15].

2.1.3. Proposition. — *Le schéma X_I est de pure dimension d et a réduction semi-stable sur $\mathscr{O}_v$, i.e., pour tout point fermé x de $X_{I,\bar{s}_v}$, il existe un voisinage étale $V \to X_I$ de x et un $\mathscr{O}_v$-morphisme étale*

$$V \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathscr{O}_v[T_1, \ldots, T_d]/(T_1 \cdots T_m - \varpi_v)$$

pour $1 \leqslant m \leqslant d$. Le schéma X_I est régulier et le morphisme de restriction du niveau $X_I \to X_{I^v}$ est fini et plat. Tous les $Y_{I,S}$ sont lisses sur $\operatorname{Spec} \kappa(w)$ de pure dimension $d - \sharp S$ avec

$$X_{I,\bar{s}_v} = \bigcup_{i=1}^{r} Y_{I,i}$$

où pour $i \neq j$, les schémas $Y_{I,i}$ et $Y_{I,j}$ n'ont pas de composante connexe en commun.

La fibre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}_v}$, quel que soit le niveau I, admet une stratification dite de Newton : pour tout $1 \leqslant h \leqslant d$, on note

$$X^{\geqslant h}_{I,\bar{s}_v}, \quad \text{resp. } X^{=h}_{I,\bar{s}_v},$$

la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h, i.e., le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geqslant h$ (resp. égal à h).

2.1.4. Notation. — On note

$$j^{\geqslant h} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geqslant h}_{I,\bar{s}_v}, \qquad i^h : X^{\geqslant h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}$$

et $j^{=h} = i^h \circ j^{\geqslant h}$.

Lorsque le niveau I_v en v de I est de la forme $\ker\bigl(\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_v) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_v/\varpi_v^{m_1})\bigr)$, pour tout $1 \leqslant h < d$, la strate de Newton $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ est alors géométriquement induite au sens où il existe un sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1_h}$ muni d'une action de $P_{h,d-h}(\mathscr{O}_v/\mathscr{P}_v^{m_1})$ tel que :

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1_h} \times_{P_{h,d-h}(\mathscr{O}_v/\mathscr{P}_v^{m_1})} \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_v/\mathscr{P}_v^{m_1}).$$

2.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Passons provisoirement en niveau infini en v et notons X_{Iv^∞} la tour associée : à l'aide des variétés d'Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [10, p. 136], associent à toute représentation admissible ρ_v des inversibles de l'ordre maximal $\mathscr{D}_{v,h}$ de l'algèbre à division centrale $D_{v,h}$ sur F_v d'invariant $1/h$, un système local $\mathscr{L}_{1_h}(\rho_v)$ sur $X^{=h}_{Iv^\infty,\overline{s}_v,1_h}$ muni d'une action de $P_{h,d-h}(\mathscr{O}_v)$ agissant via la projection $P_{h,d-h}(\mathscr{O}_v) \to \mathbb{Z} \times \mathrm{GL}_{d-h}(\mathscr{O}_v)$. On note alors

$$\mathscr{L}(\rho_v) := \mathscr{L}_{1_h}(\rho_v) \times_{P_{h,d-h}(\mathscr{O}_v)} \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_v)$$

sa version induite sur $X^{=h}_{Iv^\infty,\overline{s}_v}$.

2.2.1. Notation. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_v)$ et pour $1 \leqslant t \leqslant d/g$, on note $\pi_v[t]_D$ la représentation de $D^\times_{tg,v}$ associé à la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ par la correspondance locale de Jacquet-Langlands. La représentation $\pi_v[t]_D$ de $D^\times_{v,tg}$ fournit alors un système local sur $X^{=tg}_{Iv^\infty,\overline{s}_v,1_{tg}}$

$$\mathscr{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\rho_{v,i})_{1_{tg}},$$

où $(\pi_v[t]_D)_{|\mathscr{D}^\times_{v,h}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible et muni d'une action de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ via son quotient $\mathrm{GL}_{d-tg} \times \mathbb{Z}$.

2.2.2. Définition. — Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont alors les

$$\widetilde{\mathrm{HT}}_{1_{tg}}(\pi_v, \Pi_t) := \mathscr{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{(tg-d)/2},$$

où Π_t est une représentation quelconque de $\mathrm{GL}_{tg}(F_v)$. La version induite est notée

$$\widetilde{\mathrm{HT}}(\pi_v, \Pi_t) := \big(\mathscr{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{(tg-d)/2}\big) \times_{P_{tg,d-tg}(F_v)} \mathrm{GL}_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ est triviale, et celle de

$$\big(g^{\infty,v}, \left(\begin{smallmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{smallmatrix}\right), \sigma_v\big) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{tg,d-tg}(F_v) \times W_v$$

est donnée

– par celle de g_v^c sur Π_t et $\deg(\sigma_v) \in \mathbb{Z}$ sur $\Xi^{(tg-d)/2}$ ainsi que

– celle de $(g^{\infty,v}, g_v^{et}, \mathrm{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathrm{GL}_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ sur $\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Xi^{(tg-d)/2}$, où $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ est défini par $\Xi(1/2) = q^{1/2}$.

On dit de l'action de $\mathrm{GL}_{tg}(F_v)$ qu'elle est *infinitésimale.*

Remarque. — En particulier le facteur Π_t n'intervient pas réellement ni dans le calcul des faisceaux de cohomologie, par exemple des extensions intermédiaires de la notation suivante, ni dans celui des groupes de cohomologie, par exemple de $H^i_c(X_{Iv^\infty,\overline{s}_v,1_{tg}}, \widetilde{\mathrm{HT}}_{1_{tg}}(\pi_v, \Pi_t))$. Précisément, d'après la description des actions rappelée ci-avant, en tant $\mathbb{T}_I \times \mathrm{GL}_{tg}(F_v) \times \mathrm{GL}_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$-module, un tel groupe de cohomologie s'écrit comme une extension de modules irréductibles de la forme $M \otimes \big(\Pi_t \otimes \chi \circ \mathrm{val} \circ \det\big) \otimes \Pi_v \otimes \chi^{-1}$, où M (resp. Π_v) est un $\mathbb{T}_I$-module (resp. une représentation de $\mathrm{GL}_{d-tg}(F_v)$) irréductible, et $\chi : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

2.2.3. Notations. — On pose
$$\mathrm{HT}(\pi_v,\Pi_t):=\widetilde{\mathrm{HT}}(\pi_v,\Pi_t)[d-tg],$$
et le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est
$$P(t,\pi_v):={}^p j^{=tg}_{!*}\,\mathrm{HT}(\pi_v,\mathrm{St}_t(\pi_v))\otimes\mathbb{L}(\pi_v),$$
où $\mathbb{L}^\vee$ désigne la correspondance locale de Langlands.

D'après [1], proposition 4.3.1 complétée par le corollaire 5.4.1, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers équivariants

$$\begin{aligned}(2.2.4)\quad j^{=tg}_!\,\mathrm{HT}(\pi_v,\Pi_t)&={}^p j^{=tg}_{!*}\,\mathrm{HT}(\pi_v,\Pi_t)\\&\quad+\sum_{k=1}^{\lfloor d/g\rfloor-t}{}^p j^{\geqslant(t+k)}_{!*}\,\mathrm{HT}\big(\pi_v,\Pi_t\{-k/2\}\times\mathrm{St}_k(\pi_v\{t/2\})\big)(k/2).\end{aligned}$$

On rappelle que π'_v est inertiellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta:\mathbb{Z}\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que $\pi'_v\simeq\pi_v\otimes(\zeta\circ\mathrm{val}\circ\det)$. Les faisceaux pervers $P(t,\pi_v)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de π_v et sont de la forme
$$P(t,\pi_v)=e_{\pi_v}\mathscr{P}(t,\pi_v),$$
où $\mathscr{P}(t,\pi_v)$ est un faisceau pervers irréductible.

2.2.5. Notation. — Pour $I\in\mathscr{I}$, on notera $\mathscr{P}_I(t,\pi_v):=\mathscr{P}(t,\pi_v)^{I_v}$ le faisceau pervers d'Harris-Taylor sur $X_{I,\bar{s}_v}$ et on ajoutera plus généralement un indice I pour les $\mathrm{HT}(\pi_v,\Pi_t)$ lorsqu'on les considère à niveau fini I.

Remarque. — Lorsque I_v est un sous-groupe parahorique, le faisceau pervers $P_I(t,\pi_v)$ est nul si π_v n'est pas un caractère.

Le résultat principal de [1] sur les faisceaux de cohomologies des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, dont on pourra trouver une preuve simplifiée dans [5] peut s'écrire comme suit sous la forme d'une résolution où on a posé $s=\lfloor d/g\rfloor$:

$$\begin{aligned}(2.2.6)\quad 0\longrightarrow j^{=sg}_!\,\mathrm{HT}_{1_{tg}}\big(\pi_v,\Pi_t\{(t-s)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{s-t}(\pi_v\{t/2\})\big)\otimes\Xi^{(s-t)/2}\longrightarrow\cdots\\ \cdots\longrightarrow j^{=t+1}_!\,\mathrm{HT}_{1_{tg}}(\pi_v,\Pi_t\{-1/2\}\otimes\pi_v\{t/2\})\otimes\Xi^{1/2}\\ \longrightarrow j^{=t}_!\,\mathrm{HT}_{1_{tg}}(\pi_v,\Pi_t)\longrightarrow{}^p j^{=t}_{!*}\,\mathrm{HT}_{1_{tg}}(\pi_v,\Pi_t)\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

où pour tout $tg\leqslant h\leqslant d$, Π_t (resp. Π_{h-tg}) une représentation de $\mathrm{GL}_{tg}(F_v)$ (resp. de $\mathrm{GL}_{h-tg}(F_v)$), on a noté
$$\mathrm{HT}_{1_{tg}}(\pi_v,\Pi_t\otimes\Pi_{h-tg}):=\mathrm{HT}_{1_h}(\pi_v,\Pi_t\otimes\Pi_{h-tg})\times_{P_{tg,h-tg,d-h}(F_v)}P_{tg,d-tg}(F_v).$$

Pour χ_v une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_1(F_v)$, i.e., un caractère de $F_v^\times$, le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-système local $\mathscr{L}_{1_h}(\chi_v)$ est isomorphe à $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ muni de l'action du groupe fondamental $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ qui se factorise par son quotient $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})\twoheadrightarrow\mathscr{D}^\times_{v,h}$ où l'action de $\mathscr{D}^\times_{v,h}$ est donnée par le caractère χ_v. En remarquant, cf. [3, Lem. 3.0.2], que l'adhérence $X^{\geqslant h}_{I,\bar{s}_v}$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ est lisse, on en déduit que $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[d-h]$ est un faisceau pervers sur $X^{\geqslant h}_{I,\bar{s}_v}$

qui s'identifie, avec l'action de $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})$ comme ci-avant, alors aux deux extensions intermédiaires

$$ {}^p j^{\geqslant h}_{!*} \mathscr{L}_{1_h}(\chi_v)[d-h] \simeq {}^{p+} j^{\geqslant h}_{!*} \mathscr{L}_{1_h}(\chi_v)[d-h]. \tag{2.2.7}$$

Remarque. — D'après le résultat principal de [3], la résolution précédente (2.2.6) est encore valide sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. En revanche l'isomorphisme (2.2.7) n'est valable que lorsque la réduction modulo ℓ de π_v est encore supercuspidale et pas seulement cuspidale. Dans ce texte nous ne considérerons que le cas $g=1$, i.e., les π_v qui sont des caractères χ_v.

2.2.8. Notation. — On notera Υ l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des caractères de $F_v^\times$.

2.3. Relèvement des classes de cohomologie de torsion. — Fixons un plongement $\sigma_0 : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et notons Φ l'ensemble des plongements $\sigma : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dont la restriction à E est σ_0. On rappelle alors qu'il existe une bijection explicite entre les représentations algébriques irréductibles ξ de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et les $(\sharp\Phi+1)$-uplets

$$\big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma\in\Phi}\big),$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\sigma \in \Phi$, on a $\overrightarrow{a_\sigma} = (a_{\sigma,1} \leqslant \cdots \leqslant a_{\sigma,d})$. Il existe alors une extension finie K de $\mathbb{Q}_\ell$ telle que la représentation $\iota^{-1}\circ\xi$ de plus haut poids $\big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma\in\Phi}\big)$, est définie sur K. On note $W_{\xi,K}$ l'espace de cette représentation et $W_{\xi,\mathscr{O}}$ un réseau stable sous l'action du sous-groupe compact maximal $G(\mathbb{Z}_\ell)$ et où $\mathscr{O}$ désigne l'anneau des entiers de K.

Remarque. — Si on suppose que ξ est ℓ-petit, i.e., que, pour tout $\sigma\in\Phi$, $a_{\sigma,d}-a_{\sigma,1}<\ell$, alors un tel réseau stable est unique à homothétie près.

Notons λ une uniformisante de $\mathscr{O}$ et soit pour $n\geqslant 1$, un sous-groupe distingué $I_n\in\mathscr{I}$ de $I\in\mathscr{I}$, compact ouvert agissant trivialement sur $W_{\xi,\mathscr{O}/\lambda^n} := W_{\xi,\mathscr{O}}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{O}/\lambda^n$. On note alors $V_{\xi,\mathscr{O}/\lambda^n}$ le faisceau sur X_I dont les sections sur un ouvert étale $T\to X_I$ sont les fonctions

$$f : \pi_0\big(X_{I_n}\times_{X_I} T\big) \longrightarrow W_{\xi,\mathscr{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout $k\in I$ et $C\in\pi_0\big(X_{I_n}\times_{X_I}T\big)$, on a la relation $f(Ck)=k^{-1}f(C)$.

2.3.1. Notations. — On note

$$V_{\xi,\mathscr{O}} = \varprojlim_n V_{\xi,\mathscr{O}/\lambda^n} \text{ et } V_{\xi,K} = V_{\xi,\mathscr{O}}\otimes_{\mathscr{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ et $V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ pour les versions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ respectivement ainsi que

$$\mathrm{HT}_\xi(\pi_v,\Pi_t) := \mathrm{HT}(\pi_v,\Pi_t)\otimes V_{{}_xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}.$$

Remarque. — La représentation ξ est dite *régulière* si son paramètre $\big(a_0,(\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma\in\Phi}\big)$ est tel que pour tout $\sigma\in\Phi$, on a $a_{\sigma,1}<\cdots<a_{\sigma,d}$.

On rappelle le résultat principal de [7] qui permet de relever en caractéristique nulle les classes de torsion.

2.3.2. Théorème (cf. [7, Cor. 2.9]). — *Soit i tel que le sous-module de torsion de $H^i(X_{I,\overline{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est non nul. Alors pour tout $v \in \mathrm{Spl}(I)$, il existe une représentation irréductible ξ-cohomologique $\Pi(v)$ non ramifiée en toute place $w \neq v$ ne divisant pas I et dont les paramètres de Satake modulo ℓ en w sont donnés par $S_{\mathfrak{m}}(w)$.*

Remarque. — La composante en v de $\Pi(v)$ est ramifiée et d'après loc. cit. en utilisant le lemme 1.1.7, possède des vecteurs non nuls invariants sous un certain sous-groupe parahorique associé à une partition de la forme $(m \geqslant 1 \geqslant 1 \geqslant \cdots \geqslant 1)$.

D'après le théorème précédent, pour prouver 1.3.2 il suffit alors de montrer, cf. la proposition 3.3.1, qu'il existe un niveau I' de la forme $I' = I^v I'_v$ où I'_v est un sous-groupe parahorique contenant strictement I_v tel que la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de $X_{I'}$ à coefficients dans V_ξ est non nulle et donc, par maximalité de $\underline{m}$ nécessairement de torsion.

3. Preuve du théorème principal

3.1. Suite spectrale de Rapoport-Zink. — On considère à présent un niveau $I \in \mathscr{I}$ tel que la composante I_v de I à la place v est le sous-groupe parahorique standard $\mathrm{Iw}_v(\underline{m})$ associé à la partition $\underline{m} = (m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r)$ de d. Avec les notations de 2.1.2, la variété de Shimura X_I admet une réduction semi-stable à la place v ce qui permet de reprendre les constructions de Rapoport-Zink, cf. par exemple [11, §3].

3.1.1. Notation. — On note $R\Psi_{I;v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ le complexe des cycles proches sur $X_{I,\overline{s}_v}$.

Rapoport et Zink construisent en particulier un bicomplexe $\mathscr{A}$ ainsi qu'un isomorphisme de complexes
$$R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \simeq s(\mathscr{A}),$$
où $s(\mathscr{A})$ est le complexe simple associé à $\mathscr{A}$ ainsi qu'un morphisme
$$\nu : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}[-1,1](-1)$$
qui via l'isomorphisme précédent fournit
$$(T-1) \otimes T^\vee : R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \longrightarrow R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)(-1).$$
Le bicomplexe $\mathscr{A}$ est ensuite muni d'une filtration croissante $W_\bullet \mathscr{A}$ de sorte que les gradués correspondant $\mathrm{gr}^W_\bullet\, s(\mathscr{A})$ sont les $\mathrm{gr}^W_\bullet\, s(\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est le bicomplexe à différentielles nulles, cf. les notations 2.1.2
$$\begin{array}{llll} a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell & & & \\ a_{r-1,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell & a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell(-1) & & \\ \cdots & & & \\ a_{1,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell & a_{2,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell(-1) & \cdots & a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell(-r+1) \end{array}$$
où le coin en bas à gauche correspond à $(0,0)$ et où $W_r\mathscr{B}$ est obtenu en appliquant le foncteur de troncation canonique $\tau_{\leqslant r+q}$ à la q-ième ligne de $\mathscr{B}$. Ainsi le gradué

$\mathrm{gr}_r^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ a pour faisceaux de cohomologie

$$(3.1.2)\quad \big(\mathscr{H}^i \mathrm{gr}_r^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)\big)_{i\geqslant 0} = \Big(\overbrace{0,\dots,0}^{r}, a_{|r|+1,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell(-|r|), a_{|r|+3,*}\overline{\mathbb{Z}}_\ell(-|r|-1),\dots\Big).$$

Rapoport et Zink montrent en outre que l'opérateur $(T-1)\otimes T^\vee$ défini plus haut, induit un isomorphisme

$$(3.1.3)\qquad ((T-1)\otimes T^\vee)^r : \mathrm{gr}_r^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)(-r).$$

Sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $(T-1)\otimes T^\vee$ est nilpotent ce qui permet de définir

$$N=\log T\otimes T^\vee : R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d-1] \longrightarrow R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d-1](-1),$$

lequel correspond alors à l'opérateur de monodromie usuel. Ainsi les $\mathrm{gr}_\bullet^W s(\mathscr{A})\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sont les gradués de la filtration de monodromie de $R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Remarque. — Les $\mathrm{gr}_r^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sont décrits explicitement en tout niveau dans [1].

Rappelons, cf. [4, §1.4], que $\mathscr{D} := D_c^b(X_{I,\bar{s}_v},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ est muni de deux structures perverses notées p et $p+$

$$A\in {}^p\mathscr{D}^{\leqslant 0} \iff \forall\, x\in X,\ \mathscr{H}^k i_x^* A=0,\ \forall\, k>-\dim\overline{\{x\}}$$
$$A\in {}^p\mathscr{D}^{\geqslant 0} \iff \forall\, x\in X,\ \mathscr{H}^k i_x^! A=0,\ \forall\, k<-\dim\overline{\{x\}}$$

où $i_x:\operatorname{Spec}\kappa(x)\hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}$, et

$$A\in {}^{p+}\mathscr{D}^{\leqslant 0} \iff \forall\, x\in X,\ \begin{cases}\mathscr{H}^i i_x^* A=0, & \forall\, i>-\dim\overline{\{x\}}+1\\ \mathscr{H}^{-\dim\overline{\{x\}}+1} i_x^* A & \text{de torsion}\end{cases}$$

$$A\in {}^{p+}\mathscr{D}^{\geqslant 0} \iff \forall\, x\in X,\ \begin{cases}\mathscr{H}^i i_x^! A=0, & \forall\, i<-\dim\overline{\{x\}}\\ \mathscr{H}^{-\dim\overline{\{x\}}} i_x^! A & \text{libre}\end{cases}$$

3.1.4. Notation. — On introduit le faisceau pervers

$$\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} := R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)[d-1]((d-1)/2)$$

qui est autodual et pervers pour les deux t-structures p et $p+$. On notera aussi

$$\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} := \mathrm{gr}_r^W R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)[d-1]((d-1)/2).$$

3.1.5. Lemme. — *Les $\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ sont pervers pour les deux t-structures p et $p+$.*

Démonstration. — De la description donnée plus haut de $\mathrm{gr}_r^W s(\mathscr{B})$, lequel à un décalage près correspond à $\mathrm{gr}_r^W \Psi_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$, et donc de (3.1.2), on en déduit que ce dernier appartient à ${}^p\mathscr{D}^{\leqslant 0}(X_{I,\bar{s}_v},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)\subset {}^{p+}\mathscr{D}^{\leqslant 0}(X_{I,\bar{s}_v},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$. De la lissité des $Y_{I,S}$ et donc des $Y_I^{(r)}$, on obtient de même, après application du foncteur de dualité de Grothendieck-Verdier, que $\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\in {}^{p+}\mathscr{D}^{\geqslant 0}(X_{I,\bar{s}_v},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)\subset {}^p\mathscr{D}^{\geqslant 0}(X_{I,\bar{s}_v},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$, d'où le résultat. □

Rappelons que $\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ étant pur, il est semi-simple et d'après [1, Th. 2.2.4] s'écrit

$$\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell} = \bigoplus_{\substack{1\leqslant h\leqslant d\\ h\equiv r+1 \bmod 2}} \bigoplus_{\chi_v\in\Upsilon} \mathscr{P}_I(h,\chi_v)(r/2),$$

où, cf. la notation 2.2.8, Υ désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des caractères de $F_v^\times$.

3.1.6. Lemme. — *Sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, on a une décomposition*

$$\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} = \bigoplus_{\substack{1\leqslant h\leqslant d\\ h\equiv r+1 \bmod 2}} \mathrm{gr}_{r,h}^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell},$$

où $\mathrm{gr}_{r,h}^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{\chi_v\in\Upsilon} \mathscr{P}_I(h,\chi_v)(r/2)$.

Démonstration. — Le résultat découle d'après (2.2.7) du fait détaillé ci-dessous. Considérons une extension

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0,$$

où A_1 et A_2 sont des p-extensions intermédiaires de systèmes locaux sur respectivement $X_{I,\bar{s}_v}^{=h_1}$ et $X_{I,\bar{s}_v}^{=h_2}$ avec $h_1 > h_2$ et telle que $A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est scindée. Soit alors A_2' le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} A_2' \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & A \arrow[d, hook] \\ A_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \arrow[r, hook] & A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \end{tikzcd}$$

de sorte que

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & A_1 \arrow[d, hook] \\ A_2' \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A_1' \arrow[d, two heads] \\ A_2' \arrow[r, hook] & A_2 \arrow[r, two heads] & T \end{tikzcd}$$

Comme A_2 est une p-extension intermédiaire, si T était non nul, sa restriction à $X_{I,\bar{s}_v}^{=h_2}$ serait non nulle ce qui ne se peut pas puisque cette strate n'intersecte pas $X_{I,\bar{s}_v}^{\geqslant h_1}$. Ainsi donc A est scindée. $\square$

On fixe une fois pour toute une énumération de $\Upsilon = \{\chi_{v,1}, \chi_{v,2}, \ldots\}$ et on considère le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,1},h)(r/2) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & \mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \arrow[d, hook] \\ \mathscr{P}_I(\chi_{v,1},h)(r/2) \arrow[r, hook] & \mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \end{tikzcd}$$

Soit alors le quotient $\mathrm{gr}^W_{r,\geqslant 2}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} := \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}/\mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,1},h)(r/2)$. On procède alors comme précédemment en considérant le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,2},h)(r/2) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & \mathrm{gr}^W_{r,\geqslant 2}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \arrow[d, hook] \\ \mathscr{P}_I(\chi_{v,2},h)(r/2) \arrow[r, hook] & \mathrm{gr}^W_{r,\geqslant 2}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}, \end{tikzcd}$$

et ainsi de suite de façon à obtenir des structures entières $\mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v,h)(r/2)$ pour tout $h\equiv r+1 \bmod 2$ et $1\leqslant h\leqslant d$.

3.1.7. Lemme. — *Les structures entières $\mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v,h)(r/2)$ ne dépendent pas de r . Par ailleurs on a des isomorphismes*

$$(T-1)\otimes T^\vee : \mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v,h)(r/2) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}_{I,\Gamma_{r-2}}(\chi_v,h)((r-2)/2) \tag{3.1.8}$$

pour tout $2\leqslant h\leqslant d$, $h\equiv r-1 \bmod 2$ et $3-h\leqslant r\leqslant h-1$.

Démonstration. — D'après (3.1.3) et la décomposition du lemme 3.1.6, $(T-1)\otimes T^\vee$ induit des isomorphismes

$$(T-1)\otimes T^\vee : \mathrm{gr}^W_{r,h}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^W_{r-2,h}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(-1)$$

pour tout $2\leqslant h\leqslant d$, $h\equiv r-1 \bmod 2$ et $3-h\leqslant r\leqslant h-1$. Le résultat en découle alors puisqu'on utilise, pour tous ces r, la même numérotation de Υ pour construire les structures entières $\mathscr{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,i},h)(r/2)$. □

3.1.9. Notation. — On notera alors plus simplement $\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,t)$ la structure entière de $\mathscr{P}_I(\chi_v,t)$ fournie par $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ et le choix de l'énumération de Υ.

Remarque. — On ne cherche pas ici à préciser de quelle structure entière il s'agit. Lorsque le niveau en v est grand, on peut montrer que plusieurs telles structures coexistent pour les $\mathscr{P}_I(\pi_v,t)$ lorsqu'on filtre $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$.

La suite spectrale dite de Rapoport-Zink associée

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{-p} R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \tag{3.1.10}$$

peut alors se raffiner en utilisant les $\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,h)(r/2)$, ou comme dans [11], se décrire à l'aide des $Y_{I,S}$:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i\geqslant \max\{0,-p\}} \bigoplus_{\sharp S=p+2i+1} H^{q-2i}(Y_{I,S}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(-i)).$$

3.1.11. Proposition. — *Soit $I\in\mathscr{I}$ avec donc I_v un sous-groupe parahorique. Soit $\widetilde{\mathfrak{m}}$ un idéal premier de $\mathbb{T}_I$ tel qu'il existe r et $i\neq 0$ avec $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})_{\widetilde{\mathfrak{m}}}\neq 0$. Alors la représentation galoisienne $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ associée est réductible.*

Démonstration. — Le théorème 2.2.4 de [1] décrit les gradués[(3)] $\mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ en termes des faisceaux pervers d'Harris-Taylor lesquels sont indexés par les représentations irréductibles cuspidales d'un $\mathrm{GL}_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d. En niveau parahorique à la place v, seules les cuspidales (caractères) pour $g=1$ contribuent.

Les groupes de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor sont explicités au paragraphe 3 de [2]. Pour ce faire on décrit la partie Π^∞-isotypique de ces groupes de cohomologie pour Π une représentation automorphe cohomologique. On note alors que pour avoir de la cohomologie Π^∞-isotypique en dehors du degré médian il faut que la composante locale Π_v en v soit de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation tempérée, auquel cas Π^∞ est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ pour π cuspidale, ce qui en termes galoisiens signifie que la représentation galoisienne associée à Π par la correspondance de Langlands globale s'écrit $\rho\,|-|^{(1-s)/2}\oplus\cdots\oplus\rho\,|-|^{(s-1)/2}$, où ρ est la représentation galoisienne associé à π par la correspondance de Langlands globale. $\square$

3.1.12. Proposition. — *On suppose que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible et on choisit une partition $\underline{m}=(m_1\geqslant\cdots\geqslant m_r)$ de d maximale de sorte qu'il existe*

- *$I\in\mathscr{I}$ avec $I_v=\mathrm{Iw}_v(\underline{m})$ un sous-groupe parahorique associé à $\underline{m}$ et*
- *un idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ tel que $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est non nul.*

Si en outre, tous les $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}_r^W\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion, alors la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ associé à l'opérateur de monodromie est égale à celle $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

Démonstration. — D'après la proposition précédente si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible alors les $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}_r^W\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour tout $i\neq 0$ et la suite spectrale (3.1.10) de Rapoport-Zink dégénère en E_1. Par maximalité de $\underline{m}$, les idéaux premiers $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ tels qu'il existe $\Pi\in\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ contribuant à $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sont tels que, d'après le lemme 1.1.7 la composante locale Π_v est de la forme $\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_{m_1}}(\chi_{v,m_1})$ où $(t_1\geqslant\cdots\geqslant t_{m_1})$ est la partition conjuguée à $\underline{m}$ et où les $\chi_{v,i}$ sont des caractères de $F_v^\times$. En particulier tous les $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ fournissent la même partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}=(t_1\geqslant\cdots\geqslant t_{m_1})$.

On peut aussi bien entendu retrouver la partition $(t_1\geqslant\cdots\geqslant t_{m_1})$ à l'aide de la filtration de monodromie et plus particulièrement à partir de la dimension de ses groupes de cohomologie . En effet pour $i\geqslant 0$ et Π une représentation automorphe irréductible ξ-cohomologique de composante locale en v de la forme $\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_{m_1}}(\chi_{v,m_1})$, sa contribution $\big[H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}_i^W\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\big]\{\Pi\}$ à la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-cohomologie de $\mathrm{gr}_i^W\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ est égal à une constante $e_{\mathfrak{m},I}(\Pi)$ multipliée par le cardinal de l'ensemble suivant
$$\big\{k\mid t_k\geqslant i+1 \text{ et } t_k\equiv i+1 \bmod 2\big\},$$
où $e_{\mathfrak{m},I}(\Pi)$ est, pour une représentation ayant ses paramètres de Satake modulo ℓ donnés par $\mathfrak{m}$, essentiellement donnée par la dimension de l'espace des invariants $(\Pi^\infty)^I$ multipliée par une constante indépendante de Π, cf. [2, Déf. 3.3.3].

(3) On montre dans loc. cit. que les filtrations de monodromie et de poids de $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ coïncident à un décalage près.

Ainsi comme tous les Π tels que $e_{\mathfrak{m},I}(\Pi) \neq 0$ ont une composante locale en v de la forme $\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_{m_1}}(\chi_{v,m_1})$ pour la même partition $(t_1 \geqslant \cdots \geqslant t_{m_1})$, on en déduit qu'il existe une constante e telle que le nombre de lignes de taille i dans le diagramme de Ferrers de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ multiplié par e est égal à

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i-1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i+1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Supposons en outre que tous les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion. On a alors une filtration de $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ dont les gradués sont les $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ et où l'opérateur $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ induit, d'après (3.1.3), des isomorphismes

$$\overline{N}^r_{\mathfrak{m},v} : H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell \simeq H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{-r} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell.$$

Ainsi la décomposition de Jordan de l'opérateur de monodromie agissant sur $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ fournit un diagramme de Ferrers dont le nombre de lignes de longueur i est égal à

$$\begin{aligned}
&\dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i-1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell \\
&\qquad - \dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i+1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell \\
&= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i-1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\
&\qquad - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_{i+1} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.
\end{aligned}$$

Comme la représentation galoisienne $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est isotypique relativement à la représentation irréductible $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, le diagramme de Ferrers de

$$H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$$

est simplement un multiple de celui de $d_{\mathfrak{m},v}$ et donc finalement $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$. □

3.2. Construction d'une classe de torsion. — Soit $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ un idéal premier de $\mathbb{T}_I$ tel que, cf. la remarque suivant la définition 1.2.4, il existe $I \in \mathscr{I}$ avec I_v un sous-groupe parahorique associé à la partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^*$. *On choisit un tel $\widetilde{\mathfrak{m}}$ de sorte que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^*$ soit maximal.* Rappelons que nécessairement

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^* \leqslant \underline{d_{\mathfrak{m},v}}^*,$$

et qu'en cas d'égalité il n'y a plus rien à démontrer. Supposons donc l'inégalité précédente stricte de sorte que d'après la proposition 3.1.12, des isomorphismes 3.1.3 et de l'interprétation de l'opérateur de monodromie $N = \log T \otimes T^\vee$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, si tous les $E_{1,\mathfrak{m}}^{p,q}$ étaient libres alors on aurait $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ce qui n'est pas par hypothèse. Ainsi donc il existe r et i tel que

$$H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m},\mathrm{Tor}} \neq (0).$$

D'après [1] et comme remarqué à la fin du paragraphe 2.1, les faisceaux pervers d'Harris-Taylor des $\mathrm{gr}^W_r(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$ en niveau parahorique, sont les $\mathscr{P}_I(\chi_v, t)(\delta/2)$. Ainsi donc il existe un caractère χ_v de $F_v^\times$ et un entier $t \leqslant d$ tels que la cohomologie en niveau I de $\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,t)$ a de la torsion. On reprend alors les arguments de [7, §2] dans un cas plus général i.e., désormais I_v n'est plus le sous-groupe compact maximal mais un sous-groupe parahorique. Considérons pour ce faire t_0 maximal tel qu'il existe un caractère χ_v et $i_0 \in \mathbb{Z}$ que l'on choisit minimal, pour lesquels

$$H^{i_0}(X_{I,\overline{s}_v},\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,t_0)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m},\mathrm{Tor}} \neq (0).$$

3.2.1. Lemme. — *Pour tout $t_0 < t \leqslant d$, la torsion des*

$$H^i_c(X^{=t}_{I,\overline{s}_v},\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$$

est nulle.

Remarque. — Dans l'énoncé ci-avant et dans la suite $\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ désigne une structure entière quelconque de $\mathrm{HT}_I(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$, étant sous entendu que le résultat ne dépend pas du choix d'une telle structure.

Démonstration. — Commençons par noter que comme $X^{=d}_{I,\overline{s}_v}$ est ponctuel, on a nécessairement $t_0 < d$. On raisonne par récurrence sur t du cas trivial $t = d$ à $t_0 + 1$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas t. On considère la filtration par les poids de $j^{\geqslant t}_! \mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t)$ dont les gradués $\mathrm{gr}^W_k(!,\chi_v,t)$ sont, d'après (2.2.4), nuls pour $k > 0$ ou $-k < t-d$ et sinon donnés par

$$^p j^{\geqslant(t-k)}_{!*}\,\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t\{k/2\}\times \mathrm{St}_{-k}(\chi_v\{t/2\}))(-k/2):$$

on rappelle, cf. (2.2.7), que les p et $p+$ extensions intermédiaires coïncident pour les systèmes locaux d'Harris-Taylor associés à un caractère. On considère alors la suite spectrale associée, cf. [2], preuve de la proposition 5.1.1 :

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(X_{I,\overline{s}_v},\mathrm{gr}^W_{-i}(!,\chi_v,t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{I,\overline{s}_v},j^{\geqslant t}_!\,\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}).$$

Le résultat découle alors trivialement du fait que les $E^{i,j}_{1,\mathfrak{m}}$ sont

- sans torsion, d'après la définition de t_0 et
- nuls pour $i + j \neq 0$. □

3.2.2. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a $i_0 = 0$, autrement dit pour tout $i \neq 0, 1$, la torsion de $H^i(X_{I,\overline{s}_v},\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,t_0)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est triviale.*

Démonstration. — On reprend l'étude de la suite spectrale précédente pour $t = t_0$:

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(X_{I,\overline{s}_v},\mathrm{gr}^W_{-i}(!,\chi_v,t_0)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{I,\overline{s}_v},j^{\geqslant t_0}_!\,\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}).$$

Par définition de t_0, pour tout $i \neq 0$, les $E^{i,j}_{1,\mathfrak{m}}$ sont nuls pour $i + j \neq 0$ et sinon sans torsion. S'il existait $j < 0$ tel que la torsion de $E^{0,j}_{1,\mathfrak{m}}$ était non nul, alors celle de $E^j_{\infty,\mathfrak{m}} = H^j(X_{I,\overline{s}_v},j^{\geqslant t_0}_!\,\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ serait aussi non nulle ce qui n'est pas puisque, $X^{=t_0}_{I,\overline{s}_v}$ étant affine, les $H^i(X_{I,\overline{s}_v},j^{\geqslant t_0}_!\,\mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ sont nuls pour tout $i < 0$. On a ainsi $i_0 \geqslant 0$ et on conclut en utilisant la dualité de Verdier. □

On peut calculer les $H^i(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{\geqslant t_0} \mathrm{HT}_{I^v v^\infty,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ en utilisant la résolution 2.2.6. On remarque alors, d'après le lemme 3.2.1 et le fait que sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ la cohomologie est concentrée en degré 0, que la torsion de

$$H^0(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{\geqslant t_0} \mathrm{HT}_{I^v v^\infty,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$$

provient d'un morphisme non strict entre les $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-modules libres

$$(3.2.3)\quad H^0\big(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_{!*}^{=t_0+1} \mathrm{HT}_{1_{t_0}}\big(\chi_v,\Pi_{t_0}\{-1/2\}\otimes\chi_v\{t_0/2\}\otimes\Xi^{1/2}\big)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\big)_{\mathfrak{m}} \\ \longrightarrow H^0\big(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_{!*}^{=t_0} \mathrm{HT}_{1_{t_0}}(\chi_v,\Pi_{t_0})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\big)_{\mathfrak{m}}.$$

Comme par hypothèse $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, en niveau infini en v, les représentations automorphes Π qui contribuent à la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-cohomologie des deux termes de 3.2.3, ont leur composante locale en v, d'après [2, §5], de la forme

$$\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0})\times\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\mathrm{St}_{t_r}(\chi_{v,r}),$$

où les $\chi_{v,k}$ sont des caractères de $F_v^\times$ avec $\chi_{v,0}$ inertiellement équivalent à χ_v. D'après loc. cit. la contribution d'une telle représentation Π s'obtient en remplaçant dans l'écriture précédente de Π_v, le facteur $\mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0})$ par l'induite normalisée $\mathrm{St}_{t_0}(\chi_{v,0}\{-1/2\})\times\chi_{v,0}\{t_0/2\}$.

3.2.4. Lemme. — *Pour tout $t\leqslant t_0$, les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=t} \mathrm{HT}_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ vérifient les propriétés suivantes :*
- *les quotients libres sont nuls pour tout $i\neq 0$;*
- *ils sont nuls pour tout $i<t_0-t$;*
- *pour $i=t_0-t$, le sous-module de torsion est non nul.*

Démonstration. — Le premier point découle, comme déjà noté, du fait que $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible. Passons provisoirement en niveau infini en v et calculons les groupes de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{=t}\mathrm{HT}_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)$ à l'aide de la résolution 2.2.6. En ce qui concerne les $H^i(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=t}\mathrm{HT}_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ pour $i\leqslant t_0-t$, du fait que les strates de Newton sont affines et que donc les $H^\delta(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_!^{=h}\mathrm{HT}(\chi_v,\Pi_h)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ sont nuls pour $\delta<0$, seuls les t_0-t+2 premiers termes de la résolution interviennent, lesquels se retrouvent aussi, quitte à modifier les composantes infinitésimales, cf. la remarque suivant 2.2.2, dans la résolution de ${}^p j_{!*}^{=t_0}\mathrm{HT}_{1_{t_0}}(\chi_v,\Pi_{t_0})$. En utilisant les propriétés d'adjonction de $j_!^{\geqslant h+1}$ et i_*^{h+1}, les flèches

$$j_!^{=h+1}\mathrm{HT}_{1_t}\big(\chi_v,\Pi_t\{(t-h-1)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h+1-t}(\chi_v\{t/2\})\big)\otimes\Xi^{(h+1-t)/2} \\ \longrightarrow j_!^{=h}\mathrm{HT}_{1_t}\big(\chi_v,\Pi_t\{(t-h)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h-t}(\chi_v\{t/2\})\big)\otimes\Xi^{(h-t)/2}$$

dans la résolution de ${}^p j_{!*}^{=t}\mathrm{HT}_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)$ se déduisent de celles

$$j_!^{=h+1}\mathrm{HT}_{1_{t_0}}\big(\chi_v,\Pi_{t_0}\{(t_0-h-1)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h+1-t_0}(\chi_v\{t_0/2\})\big)\otimes\Xi^{(h+1-t_0)/2} \\ \longrightarrow j_!^{=h}\mathrm{HT}_{1_{t_0}}\big(\chi_v,\Pi_{t_0}\{(t_0-h)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h-t_0}(\chi_v\{t_0/2\})\big)\otimes\Xi^{(h-t_0)/2}$$

à modification des composantes infinitésimales près.

Remarque. — Notons, cf. [9, 3.1.4], que la réduction modulo ℓ de $\chi_v[d]_D$ est irréductible, de sorte que $\mathscr{L}(\chi_v[t]_D)$ admet un unique réseau stable. Il en est de même pour les $\mathrm{Speh}_t(\chi_v)$ de sorte que, pour Π_{t_0} bien choisi ne jouant aucun rôle, il n'y a pour chacun des faisceaux écrits dans les morphismes précédents, qu'un unique réseau stable.

D'après le lemme 3.2.1, les groupes de cohomologie des $j_!^{=h}\,\mathrm{HT}_{1_h}(\chi_v,\Pi_h))$ pour $h\geqslant t_0$ sont sans torsion de sorte que la torsion cherchée ne provient que des flèches entre les

$$H^0\Big(X_{I^vv^\infty,\bar s_v}, j_!^{=h+1}\,\mathrm{HT}_{1_t}\big(\chi_v,\Pi_t\{(t-h-1)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h+1-t}(\chi_v\{t/2\})\big)\otimes\Xi^{(h+1-t)/2}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\Big)$$
$$\longrightarrow H^0\Big(X_{I^vv^\infty,\bar s_v}, j_!^{=h}\,\mathrm{HT}_{1_t}\big(\chi_v,\Pi_t\{(t-h)/2\}\otimes\mathrm{Speh}_{h-t}(\chi_v\{t/2\})\big)\otimes\Xi^{(h-t)/2}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\Big)$$

et plus précisément, du fait qu'elles sont ou non strictes. Or comme remarqué ci-avant, cette propriété se lit aussi dans la suite spectrale associé au calcul des groupes de cohomologie de ${}^pj_{!*}^{=t_0}\,\mathrm{HT}_{1_{t_0}}(\chi_v,\Pi_{t_0})$, ce qui donne les propriétés de l'énoncé en niveau I^vv^∞. Pour redescendre en niveau I, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{i,j}=\mathrm{Ext}^i(I_v,H^j(X_{I^vv^\infty,\bar s_v},P))\Longrightarrow H^{i+j}(X_{I^vI_v,\bar s_v},P), \tag{3.2.5}$$

où P est un faisceau pervers quelconque : les propriétés sont alors clairement vérifiées en niveau I. $\square$

3.3. Diminution du niveau. — On reprend les notations du paragraphe précédent où $\underline{d}$ est la partition associée au sous-groupe parahorique I_v. On se propose dans un premier temps de montrer le résultat suivant.

3.3.1. Proposition. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.3.2, *il existe $i\in\mathbb{Z}$ ainsi qu'un niveau $J=I^vJ_v$ avec J_v un sous-groupe parahorique associé à une partition $\underline{m}'$ strictement plus grande que la partition $\underline{m}$ associée à I_v, tel que $H^i(X_{J,\bar\eta_v},V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est non nul et de torsion.*

Démonstration. — Considérons une représentation automorphe Π vérifiant les points suivants :

– elle est ξ-cohomologique avec pour composante locale en v

$$\Pi_v\simeq\mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0})\times\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\mathrm{St}_{t_r}(\chi_{v,r}),$$

où les $\chi_{v,k}$ sont des caractères de $F_v^\times$ avec $\chi_{v,0}$ inertiellement équivalent à χ_v ;

– en niveau I, le morphisme (3.2.3) en les $\Pi^{\infty,v}$-composantes isotypiques n'est pas stricte. En particulier la partition associée à $(t_0,1,t_1,\dots,t_r)$ doit être inférieure ou égale à $\underline{d}^*$.

On choisit une telle représentation Π de sorte que la partition associée à $(t_0+1,t_1,\dots,t_r)$ soit minimale. D'après la preuve du lemme précédent,

– en utilisant la suite spectrale (3.2.5) pour $P=\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,1)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$, on obtient que la torsion de $H^{1-t_0}(X_{I^vI'_v},\mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,1)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est non nulle où I'_v est un sous-groupe parahorique associé à la partition $(d'_{\mathfrak{m},v})^*$ duale de $(\overbrace{1,\dots,1}^{t_0+1},t_1,\dots,t_r)$;

– pour tout $t>1$ et en notant $I':=I^vI'_v$, les groupes de cohomologie $H^i(X_{I^vI'_v,\overline{s}_v},\mathscr{P}_{I',\Gamma}(\chi_v,t)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion.

À partir de la torsion construite dans $H^{1-t_0}(X_{I^vI'_v},\mathscr{P}_{I',\Gamma}(\chi_v,1)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$, on cherche à construire de la torsion dans un des $H^i(X_{I'},V_\xi)_{\mathfrak{m}}$. Pour ce faire il suffit que I' contienne strictement I puisqu'alors tous les quotients libres de la suite spectrale de Rapoport-Zink (3.1.10) sont nuls. Comme

$$(\overbrace{1,\dots,1}^{t_0+1},t_1,\dots,t_r)\leqslant(t_0,1,t_1,\dots,t_r)\leqslant\underline{d}^*$$

avec égalité dans la première si et seulement si $t_0=1$, on en déduit le lemme suivant.

3.3.2. Lemme. — *Si le diagramme de Ferrers étiqueté $T_{\mathfrak{m},v}$ ne contient pas deux blocs de taille 1 d'étiquettes $\{\lambda,q\lambda\}$ ou si $t_0>1$ alors I'_v contient strictement I_v i.e., $(d'_{\mathfrak{m},v})^*$ est strictement plus grande que $d^*_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$.*

On suppose à présent que $t_0=1$, de sorte que tous les

$$H^i(X_{I,\overline{s}_v},\mathscr{P}_{I,\Gamma}(t,\chi_v)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$$

sont libres dès que $t>1$.

3.3.3. Lemme. — *Dans le cas $t_0=1$ et si $I'_v=I_v$, alors $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$ au sens de la définition 1.3.1.*

Démonstration. — Notons suivant [4], $\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ l'image du morphisme d'adjonction

$$j^{=1}_!j^{=1,*}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}\longrightarrow\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}.$$

– C'est un faisceau pervers qui correspond au noyau de l'opérateur de monodromie.

– Son conoyau $\mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ est libre, et $\mathscr{P}_{I,\Gamma}(1,\chi_v)$ n'en est pas un constituant quel que soit le caractère χ_v.

Les groupes de cohomologie $H^i(X_{I,\overline{s}_v},\mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ peuvent alors se calculer en utilisant une filtration de stratification quelconque de sorte que ses gradués sont les $\mathscr{P}_{I,\Gamma}(t,\chi_v)(\frac{t-1}{2}-k)$ pour $1<t\leqslant d$ et $0\leqslant k<t-1$. Par hypothèse les termes $E_1^{p,q}$ de cette suite spectrale sont sans torsion et concentrés sur la droite $p+q=0$. Comme dans la preuve de la proposition 3.1.12, par maximalité de I et d'après (3.1.8), l'opérateur de monodromie sur $H^0(X_{I,\overline{s}_v},\mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ a pour diagramme de Ferrers un multiple de celui de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$ où $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ est un idéal premier quelconque tel qu'il existe $\Pi\in\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ contribuant à $H^0(X_{I,\overline{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$. L'absence de torsion des $H^0(X_{I,\overline{s}_v},\mathscr{P}_{I,\Gamma}(t,\chi_v)(\frac{t-1}{2}-k)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ pour tout $1<t\leqslant d$ et $0\leqslant k<t-1$,

nous fournit comme dans la preuve de 3.1.12, que le diagramme de Ferrers associé à $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ sur

$$H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \simeq H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}} \;/\; H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_\ell})\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$$

est un multiple de celui de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$. Ainsi en particulier $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré. $\square$

Ainsi sous les hypothèses du théorème 1.3.2, on a construit une classe de torsion dans la cohomologie en niveau $J=I^vJ_v$ avec I_v strictement contenu dans J_v. $\square$

Remarque. — En reprenant la description précédente de l'apparition de la torsion, il est aussi possible d'augmenter le niveau en une place de ramification de I autre que v.

3.4. Un énoncé de non dégénérescence de la monodromie. — On change à présent de point de vue : considérant qu'il est à priori difficile d'avoir des informations sur la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$, on cherche des conditions pour que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}=\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ou au moins pour que $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ne soit pas trop « éloignée » de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$. L'idée est de reprendre les arguments précédents, i.e., d'étudier la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura. Pour résumer la preuve précédente, sous les hypothèses 1-2-3) du théorème 1.3.2, on montre

– tout d'abord que, quitte à diminuer le niveau en v, un des groupes de cohomologie d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor de la forme $\mathscr{P}(1,\chi_v)$ a de la torsion

– puis en utilisant une des hypothèses 4), on vérifie que cette torsion se propage à la cohomologie de la fibre générique de la variété de Shimura.

Prenons alors comme point de départ des conditions explicites sur $\mathfrak{m}$ ou $\widetilde{\mathfrak{m}}$, pour que, quel que soit le niveau en v, la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de la fibre générique de la variété de Shimura à coefficients dans V_ξ soit sans torsion. D'après [6, Th. 4.4], cf. aussi [8] dans un cadre plus général, il suffit qu'il existe une place $w\in\mathrm{Spl}(I)$ vérifiant la propriété suivante

$$\alpha\in S_{\mathfrak{m}}(w)\Longrightarrow q_w\alpha\notin S_{\mathfrak{m}}(w), \tag{3.4.1}$$

auquel cas la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ est concentrée en degré médian et sans torsion.

3.4.2. Corollaire. — *Avec les notations et sous les hypothèses 1-2) de* 1.3.2*, on suppose en outre qu'il existe une place $w\in\mathrm{Spl}(I)$ telle l'implication de* (3.4.1) *soit vérifiée. Alors $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$. Si en outre, cf. l'hypothèse* (4ii) *de* 1.3.2*, la composante locale en v de $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ n'est pas de la forme $\chi_{v,1}\times\chi_{v,2}\times ?$ pour $\chi_{v,1}$ et $\chi_{v,2}$ des caractères de $F_v^\times$ tels que $\chi_{v,2}\equiv\chi_{v,1}\nu \bmod \ell$ alors*

$$\underline{d_{\mathfrak{m},v}}=\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}.$$

Remarque. — Pour s'assurer que la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie n'a pas de torsion, on peut aussi utiliser [13], et demander que

– le paramètre ξ soit très régulier au sens de la définition 7.18 de loc. cit.,

– que ℓ soit bon, cf. la définition 2.3 de loc. cit.,
– et que le niveau I soit maximal en ℓ.

Démonstration. — On reprend les arguments du paragraphe précédent et donc l'étude de la torsion dans la localisation en $\mathfrak{m}$ de la suite spectrale de Rapoport-Zink. Rappelons que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ étant supposé irréductible, sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, cette suite spectrale dégénère en E_1 de sorte que si aucun de ses termes $E_1^{p,q}$ n'a de la torsion alors $d_{\mathfrak{m},v} = d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$. Si au contraire un des termes a de la torsion alors, cf. le lemme 3.2.2, il existe $1 \leqslant t_0 \leqslant d$ que l'on choisit minimal tel que la torsion de $H^0(X_{I,\overline{s}_v}, \mathscr{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, t_0) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_\ell})_{\mathfrak{m}}$ est non nulle. En reprenant le raisonnement de la preuve de la proposition 3.3.1, on en déduit que, comme par hypothèse la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de la variété de Shimura est sans torsion, que nécessairement $t_0 = 1$. Pour que cette torsion n'apparaisse pas dans l'aboutissement de la suite spectrale de Rapoport-Zink, il faut donc nécessairement,

– avec les notations du lemme 3.3.3, que $I'_v = I_v$ et donc $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$,

– et que, cf. le lemme 3.3.2, que la composante locale en v de $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ n'est pas de la forme $\chi_{v,1} \times \chi_{v,2} \times ?$ pour $\chi_{v,1}$ et $\chi_{v,2}$ des caractères de $F_v^\times$ tels que $\chi_{v,2} \equiv \chi_{v,1}\nu \bmod \ell$.

Les deux résultats de l'énoncé en découle alors trivialement. □

Références

[1] P. Boyer – « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples », *Invent. Math.* **177** (2009), no. 2, p. 239–280.

[2] ______, « Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications », *Compositio Math.* **146** (2010), no. 2, p. 367–403.

[3] ______, « La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre », soumis, `arXiv:1309.1946`, 2013.

[4] ______, « Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples », *Bull. Soc. math. France* **142** (2014), no. 4, p. 777–814.

[5] ______, « Groupe mirabolique, stratification de Newton raffinée et cohomologie des espaces de Lubin-Tate », `arXiv:1611.02082`, 2016.

[6] ______, « Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor », *J. Inst. Math. Jussieu* (2017), `doi:10.1017/S1474748017000093`, `arXiv:1503.03303`.

[7] ______, « Torsion classes in the cohomology of KHT Shimura's varieties », *Math. Res. Lett.* **25** (2019), no. 5, p. 1547–1566.

[8] A. Caraiani & P. Scholze – « On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties », *Ann. of Math. (2)* **186** (2017), no. 3, p. 649–766.

[9] J.-F. Dat – « Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo ℓ », *Proc. London Math. Soc. (3)* **104** (2012), no. 4, p. 690–727.

[10] M. Harris, R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[11] L. Illusie – « Autour du théorème de monodromie locale », in *Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988)*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, Paris, 1994, p. 9–57.

[12] C. Khare & J.-P. Wintenberger – « Serre's modularity conjecture, I & II », *Invent. Math.* **178** (2009), no. 3, p. 485–504 & 505–586.

[13] K. Lan & J. Suh – « Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties », *Duke Math. J.* **161** (2012), no. 6, p. 951–1170.

[14] K. A. Ribet – « On modular representations of Gal($\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$) arising from modular forms », *Invent. Math.* **100** (1990), no. 2, p. 431–476.

[15] R. Taylor & T. Yoshida – « Compatibility of local and global Langlands correspondences », *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), p. 467–493.
[16] M.-F. Vignéras – « Induced R-representations of p-adic reductive groups », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, p. 549–623.

Manuscrit reçu le 24 janvier 2018
accepté le 25 mars 2019

Pascal Boyer, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539
F-93430, Villetaneuse, France
E-mail : boyer@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~boyer/