Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Forges-les-Eaux, 7 juin–11 juin 2004

Jean-François Coulombel

Problèmes mixtes hyperboliques bien-posés

J. É. D. P. (2004), Exposé n° V, 13 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2004____A5_0>

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

GROUPEMENT DE RECHERCHE 2434 DU CNRS

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Forges-les-Eaux, 7 juin–11 juin 2004
GDR 2434 (CNRS)

Problèmes mixtes hyperboliques bien-posés

Jean-François Coulombel

Résumé

On présente une famille de problèmes mixtes hyperboliques linéaires bien-posés au sens de Hadamard. La nouveauté consiste à autoriser une perte de régularité entre les termes source et la solution. On montre ainsi que la condition de Lopatinskii faible est suffisante pour obtenir le caractère bien-posé des problèmes mixtes hyperboliques linéaires.

1. Introduction

On s'intéresse à des problèmes mixtes hyperboliques en plusieurs dimensions d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(t,x)\,\partial_{x_j} U + D(t,x)U = f(t,x)\,, & t \in]0,T[\,, \quad x \in \mathbb{R}^d_+\,, \\ B(t,y)\,U_{|x_d=0} = g(t,y)\,, & t \in]0,T[\,, \quad y \in \mathbb{R}^{d-1}\,, \\ U_{|t=0} = U_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}^d_+\,. \end{cases} \tag{1}$$

La variable d'espace x vit dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+ := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d / x_d > 0\}$, $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$ est un point générique de $\mathbb{R}^{d-1}$, et $t = x_0$ est la variable de temps. Les A_j et D sont des matrices carrées $n \times n$, B est une matrice $p \times n$ de rang maximal (l'entier p est précisé plus loin). Pour simplifier, on supposera le bord non-caractéristique, et même on supposera que la matrice $A_d(t,x)$ est inversible en tout point (et pas seulement sur la frontière). On renvoie à [8, 12, 20] pour des résultats sur le cas caractéristique (uniformément ou non), et les diverses applications physiques. Signalons également que nous ne supposerons pas les conditions au bord dissipatives (ou encore maximalement dissipatives), ce qui ôte tout recours aux méthodes d'énergie "classiques" (voir [10] et [21, chapitre 14]).

La raisonnement pour montrer que (1) est un problème bien-posé compte quatre étapes (on renvoie à [3, chapitre 7] pour un exposé complet) :

1. On montre des estimations d'énergie a priori pour des solutions supposées très régulières. Cette étape, menée à bien pour la première fois par Kreiss [9] et Sakamoto [19] (voir également [1] pour le cas scalaire), repose sur une condition dite *condition de Lopatinskii uniforme*. Cette condition traduit une sorte

MSC 2000 : 35L50, 35L40.

de compatibilité entre la matrice B et le système hyperbolique intérieur : les conditions au bord doivent exprimer les caractéristiques rentrantes en fonction des caractéristiques sortantes, ceci uniformément. (L'uniformité renvoie au caractère microlocal de cette condition. On trouvera dans [3, 9, 21] une définition précise).

2. A l'aide d'estimations d'énergie a priori pour le problème dual, on montre que (1) admet des solutions dites *faibles*. (On oublie provisoirement la donnée initiale, et on raisonne sur le problème global en temps). A ce stade, on ne sait pas si les solutions ainsi construites sont uniques ; on ne sait pas non plus si elles vérifient l'estimation d'énergie.
3. On montre que n'importe quelle solution *faible* (par exemple, celle construite plus haut), est une solution dite *forte*, au sens où elle est limite de solutions régulières. Les solutions faibles vérifient alors l'estimation d'énergie que l'on est en droit d'attendre. Cela implique trivialement l'unicité. Cette procédure "*faible=fort*" remonte au moins à [10].
4. On incorpore le problème de la donnée initiale. Tout d'abord, on résout (1) pour des données initiales nulles (on étend tout par zéro dans le passé et on utilise le point précédent). On traite pour finir le cas des données non nulles. Ce dernier point a été résolu par Rauch [17].

Pour mener à bien l'ensemble de ce programme, il est capital de disposer des estimations d'énergie du point 1. Sous l'hypothèse de la condition de Lopatinskii **uniforme**, ces estimations sont **sans perte** : des termes source f et g dans l'espace L^2 (ou H^k) permettent d'estimer la solution U dans L^2 (ou H^k). Ces estimations sont utilisées dans toutes les étapes successives. Rappelons qu'il y a équivalence entre condition de Lopatinskii uniforme et estimations d'énergie dans L^2 sans perte, voir [9].

Cependant, et cela a déjà été noté depuis bien longtemps, la condition de Lopatinskii uniforme n'est pas satisfaite par de nombreux exemples physiques (de nombreux exemples académiques existent également) : l'exemple certainement le plus célèbre est le cas de l'élastodynamique avec la présence des ondes de Rayleigh, voir [22, 18]. Un autre exemple est celui des ondes de choc et des discontinuités de contact (ou nappes de tourbillon) en mécanique des fluides compressibles, voir [11, 15, 21]. Pour le problème des chocs, i.e. pour les discontinuités non-caractéristiques, des estimations d'énergie **à perte** ont été montrées dans [4]. La perte est néanmoins fixe, et représente exactement une dérivée tangentielle (on ne perd pas de dérivée dans la direction normale au bord) : avec des termes source f et g dans H^1, on arrive à estimer U dans L^2. Pour le problème des discontinuités de contact (qui sont caractéristiques), des estimations similaires ont été prouvées dans [6]. Pour de telles estimations à perte, il n'existe pas de résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1). On se propose justement de montrer que (1) est bien-posé, pour des données initiales nulles, en supposant uniquement que (1) vérifie une estimation d'énergie avec perte d'une dérivée tangentielle. (On se propose donc de montrer les étapes 2 et 3 du programme ci-dessus en se donnant une version affaiblie de l'étape 1). Le lecteur intéressé trouvera dans [5] les preuves détaillées des résultats, ainsi que de plus amples remarques. On n'en donnera ici que les grandes lignes.

Un aperçu de calcul paradifférentiel (à paramètre) On rappelle très brièvement le calcul symbolique à coefficients "peu réguliers" que l'on doit à Bony [2] (voir également [14]). L'introduction d'un grand paramètre est faite dans [13, 16].

Pour $\gamma \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$, on munit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ de la norme :

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{2s,\gamma}(\xi)\, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \,, \quad \text{avec } \lambda^{s,\gamma}(\xi) := (\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2} \,.$$

On écrira $\|\cdot\|_0$ au lieu de $\|\cdot\|_{0,\gamma}$ pour la norme usuelle de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Un symbole paradifférentiel (à paramètre), de degré $m \in \mathbb{R}$ et de régularité $k \in \mathbb{N}$, est une fonction $a(x,\xi,\gamma) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[\rightarrow \mathbb{C}^{q\times q}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à ξ et de classe $W^{k,\infty}$ par rapport à x, avec les estimations suivantes :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d \,, \quad \forall\, (\xi,\gamma) \,, \quad \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi,\gamma)\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq C_\alpha \, \lambda^{m-|\alpha|,\gamma}(\xi) \,.$$

L'ensemble de tels symboles est noté $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$.

Le résultat principal (et spectaculaire) du calcul paradifférentiel est que l'on peut construire un calcul symbolique pour de tels symboles. L'opérateur associé au symbole a est noté T_a^γ. Si a est de degré m, l'opérateur T_a^γ est d'ordre $\leq m$:

$$\forall\, u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d) \,, \quad \|T_a^\gamma u\|_{s,\gamma} \leq C\, \|u\|_{s+m,\gamma} \,,$$

la constante C étant indépendante de $\gamma \geq 1$. (Les normes sur les espaces de Sobolev ont été choisies pour cela). On prendra garde aux faits suivants :

- Pour un symbole différentiel, par exemple $a(x,\xi) = i a_1(x)\xi_1$, l'opérateur T_a^γ ne coïncide pas avec l'opérateur $a_1(x)\partial_{x_1}$, mais il en diffère par un opérateur d'ordre ≤ 0 (donc régularisant) dès que a_1 est une fonction lipschitzienne. Si la fonction a_1 est de classe $W^{2,\infty}$, la différence est d'ordre ≤ -1.
- Le calcul symbolique ainsi obtenu est **fini** : si a et b sont de régularité 1, on a seulement droit au premier terme T_{ab}^γ dans le développement de $T_a^\gamma \circ T_b^\gamma$. Idem pour les opérateurs adjoints. Si les symboles sont de régularité 2, on a droit à deux termes dans le développement, etc.

On peut étendre le calcul symbolique sur $\mathbb{R}^d$ en un calcul symbolique tangentiel dans un demi-espace. Dans ce qui suit, Ω désigne le demi-espace $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^{d+1}$. Le point générique de Ω est $(t,y,x_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$. L'espace $L^2(\mathbb{R}_{x_d}^+; H_{t,y}^s(\mathbb{R}^d))$ est muni de la norme

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{s,\gamma}^2 := \int_0^{+\infty} \|u(\cdot,x_d)\|_{s,\gamma}^2 \, dx_d \,.$$

On écrira $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_0$ au lieu de $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{0,\gamma}$ pour $s = 0$. On note $\Gamma_k^m(\Omega)$ l'ensemble des symboles (paradifférentiels) $a(x_0,\dots,x_d,\xi,\gamma)$ définis sur $\Omega \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[$, tels que l'application $x_d \mapsto a(\cdot,x_d,\cdot)$ soit à valeurs dans $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$ et bornée. On définit alors l'opérateur paradifférentiel T_a^γ par la formule :

$$\forall\, u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}) \,, \quad \forall\, x_d \geq 0 \,, \quad (T_a^\gamma u)(\cdot,x_d) := T_{a(x_d)}^\gamma u(\cdot,x_d) \,.$$

Si a est de degré m, alors T_a^γ est d'ordre $\leq m$ "tangentiellement". Le lecteur trouvera dans [13], ainsi que dans [5], un exposé plus détaillé des résultats.

2. Enoncé du résultat principal

On fait une première hypothèse sur les coefficients de (1) :

Hypothèse 1. *Les A_j sont définies sur Ω et appartiennent à $W^{2,\infty}(\Omega)$.*

Le système est symétrique hyperbolique : il existe une application $S \in W^{2,\infty}(\Omega)$ à valeurs matricielles, et un réel $\kappa > 0$ tels que

$$\forall (t,x) \in \Omega\,, \quad S(t,x) = S(t,x)^T\,, \quad S(t,x) \geq \kappa\, I\,, \quad S(t,x)\, A_j(t,x) = A_j(t,x)^T\, S(t,x)\,.$$

Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t,x) \in \Omega$, on a

$$|\det A_d(t,x)| \geq \delta\,.$$

La matrice B est définie sur $\mathbb{R}^d$ et appartient à $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Elle est de rang maximal p, où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de A_d (le nombre de caractéristiques rentrantes).

On fait maintenant une hypothèse de stabilité faible sur (1) qui consiste à postuler une estimation a priori avec perte d'une dérivée tangentielle :

Hypothèse 2. *Pour tout $D_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, et pour tout $D_2 \in \Gamma^0_1(\Omega)$, il existe deux constantes C et $\gamma_0 \geq 1$ telles que pour tout $U \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})$, et pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, on a*

$$\gamma\, \|\!|U|\!\|_0^2 + \|U_{|_{x_d=0}}\|_0^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3}\, \|\!|f|\!\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\, \|g\|_{1,\gamma}^2 \right)\,,$$
$$\text{où} \quad f := A_d^{-1} \left(\gamma U + \partial_{x_0} U + \sum_{j=1}^{d} A_j\, \partial_{x_j} U + D_1\, U \right) + T^\gamma_{D_2} U\,, \quad g := B\, U_{|_{x_d=0}}\,.$$

Rappelons que le cas *Lopatinskii uniforme* correspond à une estimation d'énergie du type :

$$\gamma\, \|\!|U|\!\|_0^2 + \|U_{|_{x_d=0}}\|_0^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma}\, \|\!|f|\!\|_0^2 + \|g\|_0^2 \right)\,,$$

où il n'y a pas de perte entre la solution et les seconds membres.

Avant de formuler notre dernière hypothèse, faisons quelques remarques. Quand on montre des estimations a priori pour (1), on commence traditionnellement par remplacer l'opérateur

$$U \longmapsto A_d^{-1} \left(\gamma U + \partial_{x_0} U + \sum_{j=1}^{d} A_j\, \partial_{x_j} U + D_1\, U \right) + T^\gamma_{D_2} U$$

par sa version paradifférentielle tangentielle :

$$U \longmapsto T^\gamma_{(\gamma+i\xi_0)A_d^{-1}} U + \sum_{j=1}^{d-1} T^\gamma_{i\xi_j A_d^{-1} A_j} U + \partial_{x_d} U + T^\gamma_{A_d^{-1} D_1} U + T^\gamma_{D_2} U\,,$$

et on traite les erreurs comme des termes source. Ces erreurs sont de la forme :

$$\gamma \left(A_d^{-1} U - T^\gamma_{A_d^{-1}} U \right) \,, \quad \text{ou} \quad A_d^{-1} A_j \, \partial_{x_j} U - T^\gamma_{i\xi_j A_d^{-1} A_j} U \,, \quad \text{ou} \quad A_d^{-1} D_1 \, U - T^\gamma_{A_d^{-1} D_1} U \,.$$

Pour absorber ces erreurs avec une estimation à perte d'une dérivée tangentielle, on a exactement besoin de la régularité formulée dans les hypothèses 1 et 2.

Le point crucial dans l'hypothèse 2 est l'indépendance de l'estimation d'énergie vis-à-vis du terme d'ordre zéro. Plus précisément, si l'estimation d'énergie est vraie pour $D_1 = D_2 = 0$, il n'est pas clair qu'elle soit encore vraie pour des D_1 et D_2 arbitraires. C'est la différence essentielle entre le cas *faiblement stable* abordé ici et le cas *Lopatinskii uniforme* traité dans la littérature. Dans notre étude, on ne peut pas négliger les termes d'ordre zéro dans l'opérateur hyperbolique.

On en vient à la dernière hypothèse, qui est l'analogue de l'hypothèse 2 pour un problème dual. On introduit la notion suivante :

Définition 1. *Un problème dual pour* (1) *est un problème de la forme :*

$$\begin{cases} \partial_t V + \sum_{j=1}^d A_j^T \, \partial_{x_j} V + D_\sharp V = f_\sharp(t,x) \,, & t \in]0,T[\,, \quad x \in \mathbb{R}^d_+ \,, \\ M_\sharp(t,y) \, V_{|x_d=0} = g_\sharp(t,y) \,, & t \in]0,T[\,, \quad y \in \mathbb{R}^{d-1} \,, \end{cases}$$

où $M_\sharp$ est une matrice $(n-p) \times n$ de rang maximal, vérifiant de plus

$$\forall \, (t,y) \in \mathbb{R}^d \,, \quad B_\sharp(t,y)^T \, B(t,y) + M_\sharp(t,y)^T \, M(t,y) = A_d(t,y,0) \,, \tag{2}$$

pour des matrices $B_\sharp$ et M de taille $p \times n$ et $(n-p) \times n$, de classe $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Notre dernière hypothèse est que l'estimation d'énergie à perte d'une dérivée tangentielle est également vérifiée par un problème dual[1], où γ est changé en $-\gamma$:

Hypothèse 3. *Il existe un problème dual (c'est-à dire, une matrice $M_\sharp$ vérifiant* (2)*) tel que pour tout $D_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, et pour tout symbole $D_2 \in \Gamma^0_1(\Omega)$, il existe deux constantes C et $\gamma_0 \geq 1$, telles que pour tout $V \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})$ et tout $\gamma \geq \gamma_0$, on a*

$$\gamma \, \| V \|_0^2 + \| V_{|x_d=0} \|_0^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \| f_\sharp \|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \| g_\sharp \|_{1,\gamma}^2 \right) \,,$$

$$\textit{avec} \quad f_\sharp := (A_d^T)^{-1} \left(\gamma V - \partial_{x_0} V - \sum_{j=1}^d A_j^T \, \partial_{x_j} V + D_1 \, V \right) + T^\gamma_{D_2} V \,, \quad g_\sharp := M_\sharp \, V_{|x_d=0} \,.$$

Dans la pratique, il est souvent possible de construire "à la main" la matrice $M_\sharp$ et le déterminant de Lopatinskii pour le problème dual obtenu est essentiellement un multiple du déterminant de Lopatinskii pour le problème initial (1). Montrer une estimation d'énergie pour un tel problème dual est alors plus ou moins équivalent à montrer une estimation d'énergie pour le problème initial.

Sous les hypothèses 1, 2 et 3, le résultat obtenu dans [5] est le suivant :

[1] Avec notre définition, le problème dual n'est pas défini de manière unique.

Théorème 1. *Soient $D \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $T > 0$. Alors, pour toutes fonctions $f(t,x)$ et $g(t,y)$ satisfaisant :*

$$f, \partial_t f, \partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_{d-1}} f \in L^2(\Omega_T)\,, \quad \Omega_T :=]-\infty, T[\times \mathbb{R}^d_+\,,$$
$$g \in H^1(\omega_T)\,, \quad \omega_T :=]-\infty, T[\times \mathbb{R}^{d-1}\,,$$

et telles que f and g s'annulent pour $t < 0$, il existe une unique fonction $U \in L^2(\Omega_T)$, dont la trace sur $\{x_d = 0\}$ est dans $L^2(\omega_T)$, qui s'annule pour $t < 0$, et qui est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(t,x)\, \partial_{x_j} U + D(t,x) U = f(t,x)\,, & t \in]-\infty, T[\,, \quad x \in \mathbb{R}^d_+\,, \\ B(t,y)\, U_{|x_d=0} = g(t,y)\,, & t \in]-\infty, T[\,, \quad y \in \mathbb{R}^{d-1}\,. \end{cases}$$

De plus, $U \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d_+))$ et on a l'inégalité suivante pour tout $t \in [0,T]$ et tout nombre γ assez grand :

$$\begin{aligned} & e^{-2\gamma t}\, \|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \gamma\, \|e^{-\gamma s} U\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|e^{-\gamma s} U_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\omega_t)} \\ & \le C \left(\frac{1}{\gamma} \|e^{-\gamma s} f\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \frac{1}{\gamma^3} \|e^{-\gamma s} \nabla_{t,y} f\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|e^{-\gamma s} g\|^2_{L^2(\omega_t)} + \frac{1}{\gamma^2} \|e^{-\gamma s} \nabla g\|^2_{L^2(\omega_t)} \right)\,. \end{aligned}$$

3. Quelques éléments de preuve

On donne les grandes lignes de la preuve du théorème 1. On commence par traiter le problème global en temps, avec des termes source f et g dans des espaces à poids : pour $\gamma \ge 1$, on note $L^2_\gamma(\Omega) := \exp(\gamma t) L^2(\Omega)$, $H^1_\gamma(\Omega) := \exp(\gamma t) H^1(\Omega)$, etc. On définit également

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \partial_t v, \partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_{d-1}} v \in L^2(\Omega)\} = L^2(\mathbb{R}^+_{x_d}; H^1(\mathbb{R}^d_{t,y}))\,, \\ \mathcal{H}_\gamma(\Omega) &:= \exp(\gamma t) \mathcal{H}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ t.q. } \exp(-\gamma t) v \in \mathcal{H}(\Omega)\}\,, \\ \mathbb{H}(\Omega) &:= \{v \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ t.q. } \partial_t v, \partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_d} v \in \mathcal{H}(\Omega)\}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Les espaces $L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)$ et $H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$ sont définis de façon similaire. L'espace $L^2_\gamma(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|v\|_{L^2_\gamma(\Omega)} := \|\!| \exp(-\gamma t) v \|\!|_0\,,$$

et $\mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{H}_\gamma(\Omega)} := \|\!| \tilde{v} \|\!|_{1,\gamma} \quad \text{où } \tilde{v} := \exp(-\gamma t) v\,.$$

De même, la norme sur $H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$ est $\|w\|_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)} := \|\tilde{w}\|_{1,\gamma}$, où $\tilde{w} := \exp(-\gamma t) w$.

On se fixe un coefficient d'ordre zéro $D \in W^{1,\infty}(\Omega)$, et on s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} LU := \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(t,x)\, \partial_{x_j} U + D(t,x) U = f(t,x)\,, & (t,x) \in \Omega\,, \\ B(t,y)\, U_{|x_d=0} = g(t,y)\,, & (t,y) \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases} \tag{4}$$

pour des termes source f et g dans $\mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ et $H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$, avec γ grand. En vue de l'hypothèse 2, on est en droit d'attendre une solution $U \in L^2_\gamma(\Omega)$, dont la trace sur $\{x_d = 0\}$ appartient à $L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)$. C'est effectivement ce que l'on montre dans [5], grâce aux estimations préliminaires que l'on détaille maintenant.

3.1. Estimations préliminaires

On aura besoin par la suite d'estimations d'énergie dans $L^2(H^{-1})$ (espace dual de $\mathcal{H}(\Omega)$), à la fois pour le problème (4) et pour le problème dual :

Lemme 1. *Soient $D_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $D_2 \in \Gamma_1^0(\Omega)$. Il existe deux constantes C et $\gamma_1 \geq 1$, telles que pour tout $U \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ et tout $\gamma \geq \gamma_1$, on a*

$$\gamma \, \|\!|U|\!\|_0^2 + \|U_{|x_d=0}\|_0^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \|\!|f_1|\!\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|g_1\|_{1,\gamma}^2 \right) ,$$

$$\text{où} \quad f_1 := T^\gamma_{(\gamma+i\xi_0)A_d^{-1}} U + \sum_{j=1}^{d-1} T^\gamma_{i\xi_j A_d^{-1} A_j} U + \partial_{x_d} U + T^\gamma_{A_d^{-1} D_1 + D_2} U \, , \quad g_1 := T^\gamma_B U_{|x_d=0} \, ,$$

et on a également

$$\gamma \, \|\!|U|\!\|_{-1,\gamma}^2 + \|U_{|x_d=0}\|_{-1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \|\!|f_2|\!\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|g_2\|_0^2 \right) ,$$

$$\text{où } f_2 := A_d^{-1} \left(\gamma U + \partial_{x_0} U + \sum_{j=1}^{d} A_j \, \partial_{x_j} U + D_1 \, U \right) , \quad g_2 := B \, U_{|x_d=0} \, . \quad (5)$$

La preuve de la première inégalité est assez claire si l'on se souvient, par exemple, que l'erreur entre un opérateur de la forme $a\partial_{x_k}$ et sa version paradifférentielle $T^\gamma_{ia\xi_k}$ est d'ordre ≤ -1 si $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Les autres erreurs se traitent de façon similaire.

Pour passer de la première à la seconde inégalité, on utilise d'abord le calcul symbolique. (Rappelons que celui-ci est fini, d'ordre dépendant de la régularité des coefficients). On obtient ainsi l'analogue de l'estimation (5) pour le problème paradifférentiel. Pour revenir au problème de départ, on utilise le lemme suivant (voir [5]) :

Lemme 2. *Soient $\gamma \geq 1$, $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\|(a - T^\gamma_a) \, v\|_0 \leq C \, \|a\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \, \|v\|_{-1,\gamma} \, ,$$

pour une constante C ne dépendant pas de γ, a, v.

Si, de plus, $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|(a - T^\gamma_a) \, v\|_0 \leq \frac{C}{\gamma} \, \|a\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)} \, \|v\|_{-1,\gamma} \, , \quad \|(a - T^\gamma_a) \, \partial_{x_j} v\|_0 \leq C \, \|a\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)} \, \|v\|_{-1,\gamma} \, .$$

Pour les symboles définis dans un demi-espace, on intègre ces estimations par rapport à la variable normale x_d, et on gagne ainsi une ou deux dérivées tangentielles, selon la régularité du symbole.

Bien entendu, le lemme 1 a son analogue pour le problème dual :

Lemme 3. *Soit $D_\sharp \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Il existe deux constantes C et $\gamma_1 \geq 1$ telles que pour tout $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ et tout $\gamma \geq \gamma_1$, on a*

$$\gamma \, \|\!|V|\!\|_{-1,\gamma}^2 + \|V_{|x_d=0}\|_{-1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \|\!|f^\sharp|\!\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|g^\sharp\|_0^2 \right) ,$$

$$\text{où} \quad f^\sharp := (A_d^T)^{-1} \left(\gamma V - \partial_{x_0} V - \sum_{j=1}^{d} A_j^T \, \partial_{x_j} V + D_\sharp \, V \right) , \quad g^\sharp := M_\sharp \, V_{|x_d=0} \, .$$

3.2. Existence de solutions faibles

Les estimations précédentes permettent de montrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Il existe $\gamma_2 \geq 1$ tel que pour tous $\gamma \geq \gamma_2$, $f \in \mathcal{H}_\gamma(\Omega)$, et $g \in H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$, il existe $U \in L^2_\gamma(\Omega)$ vérifiant $U_{|x_d=0} \in H^{-1/2}_\gamma(\mathbb{R}^d)$ et U est une solution de* (4) *(au sens des distributions).*

L'idée est d'exprimer le problème (4) au sens des distributions, puis de montrer qu'une certaine forme linéaire est continue sur $L^2(\Omega)$. Le théorème de Riesz permet de conclure que cette forme linéaire n'est rien d'autre que le produit scalaire par une certaine fonction $\exp(-\gamma t)U$, avec $U \in L^2_\gamma(\Omega)$ la solution recherchée. Le point important à retenir est que la continuité L^2 de la forme linéaire évoquée plus haut repose de façon cruciale sur l'estimation du lemme 3. On voit donc déjà apparaître l'utilité des estimations dans $L^2(H^{-1})$.

Le fait que la trace de U sur $\{x_d = 0\}$ soit dans $H^{-1/2}$ repose sur l'hypothèse de bord non caractéristique. Pour un bord caractéristique, on n'a de traces que pour certaines composantes de la solution, voir [10, 8, 20].

En vertu de l'hypothèse 2, on s'attend à ce que la trace de la solution U sur $\{x_d = 0\}$ soit dans $L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)$ (et pas seulement dans $H^{-1/2}_\gamma(\mathbb{R}^d)$), et on s'attend également à ce que U vérifie l'estimation suivante :

$$\gamma \, \|U\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} + \|U_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \|f\|^2_{\mathcal{H}_\gamma(\Omega)} + \frac{1}{\gamma^2} \, \|g\|^2_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)} \right) .$$

C'est précisément ce que l'on montre dans le paragraphe suivant. Cela montrera que (4) est bien-posé, ce résultat étant bien-sur indépendant du coefficient d'ordre zéro.

3.3. "Faible=semi-fort"

Remarquons tout d'abord que U est solution de (4) si et seulement si $\widetilde{U} := \exp(-\gamma t)U$ est solution de

$$\begin{cases} L^\gamma \widetilde{U} := \gamma \widetilde{U} + L\widetilde{U} = \widetilde{f}\,, & (t,x) \in \Omega\,, \\ B(t,y)\,\widetilde{U}_{|x_d=0} = \widetilde{g}\,, & (t,y) \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases} \tag{6}$$

avec $(\widetilde{f}, \widetilde{g}) := \exp(-\gamma t)(f,g)$. Avec cette définition de l'opérateur "à poids" L^γ, le résultat est le suivant :

Théorème 2. *Soit $(\widetilde{f}, \widetilde{g}) \in \mathcal{H}(\Omega) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, et soit $\widetilde{U} \in L^2(\Omega)$ une solution de* (6)[2]. *Il existe une suite (U^ν) dans $\mathbb{H}(\Omega)$, une suite bornée (d^ν) dans l'ensemble des symboles $\Gamma^0_1(\Omega)$, et une suite bornée (b^ν) dans l'ensemble des symboles $\Gamma^{-1}_1(\mathbb{R}^d)$, qui vérifient les propriétés suivantes :*

$U^\nu \longrightarrow U$ *dans* $L^2(\Omega)$, $U^\nu_{|x_d=0} \longrightarrow U_{|x_d=0}$ *dans* $H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)$,

$L^\gamma U^\nu + A_d T^\gamma_{d^\nu} U^\nu \longrightarrow \widetilde{f}$ *dans* $\mathcal{H}(\Omega)$,

[2] On rappelle que la trace de $\widetilde{U}$ est bien définie et appartient à $H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)$, donc les conditions au bord ont un sens clair.

$$B\, U^\nu_{|x_d=0} + T^\gamma_{b^\nu} U^\nu_{|x_d=0} \longrightarrow \widetilde{g} \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^d).$$

En particulier, $\widetilde{U}_{|x_d=0}$ *appartient à* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *et on a l'estimation d'énergie suivante :*

$$\gamma\, \|\!|\widetilde{U}|\!\|_0^2 + \|\widetilde{U}_{|x_d=0}\|_0^2 \le C \left(\frac{1}{\gamma^3}\, \|\!|\widetilde{f}|\!\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\, \|\widetilde{g}\|_{1,\gamma}^2 \right) .$$

Rappelons que l'espace $\mathbb{H}(\Omega)$ est défini en (3). Par ailleurs, les éléments de $\mathbb{H}(\Omega)$ admettent une trace sur $\{x_d = 0\}$, et cette trace est dans $H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$, voir [5, appendice A]. Ceci éclaire le troisième point du théorème 2.

On a un résultat analogue lorsque les termes source ne sont que dans L^2, avec une solution faible dans $L^2(H^{-1})$. Il suffit dans ce cas de "décaler les indices".

Le preuve du théorème 2 repose, comme dans [3, 10], sur une régularisation tangentielle et sur une estimation de commutateurs. Le choix du noyau régularisant est ici crucial, et on adopte le même noyau que dans [7]. (On explique ce choix plus bas.) Pour $\varepsilon \in]0,1]$, on définit un symbole ϑ_ε :

$$\forall\, (\xi,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[\,, \quad \vartheta_\varepsilon(\xi,\gamma) := \frac{1}{\gamma^2 + \varepsilon|\xi|^2} \,,$$

et le multiplicateur de Fourier correspondant :

$$\Theta^\gamma_\varepsilon := T^\gamma_{\vartheta_\varepsilon} = (\gamma^2 - \varepsilon \Delta_{t,y})^{-1} \,.$$

L'opérateur $\Theta^\gamma_\varepsilon$ agit sur les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ ou sur les espaces $L^2_{x_d}(H^s_{t,y})$. Comme on le verra plus loin, $\Theta^\gamma_\varepsilon$ a des propriétés agréables de commutation avec l'opérateur L^γ (ces propriétés sont exprimées par la relation (2.11) dans [7]).

On rappelle un résultat de Friedrichs :

Lemme 4 (Friedrichs). *Soient* $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$, *et* $v \in L^2(\Omega)$. *Alors pour tout* $\gamma \ge 1$, *on a* $\|\!|[A,\Theta^\gamma_\varepsilon]\, v|\!\|_{1,\gamma} \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Soient $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $j \in \{0,\dots,d-1\}$ *et* $v \in L^2(\Omega)$. *Alors pour tout* $\gamma \ge 1$, *on a* $\|\!|[A\partial_{x_j} - T^\gamma_A \partial_{x_j}, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, v|\!\|_{1,\gamma} \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

On donne maintenant les étapes de la preuve du théorème 2, qui est véritablement le point clé de l'analyse menée dans [5].

Démonstration. On pose

$$U^\varepsilon := \Theta^\gamma_\varepsilon \widetilde{U} \in L^2(\mathbb{R}^+_{x_d}; H^2(\mathbb{R}^d_{t,y}))\,,$$

et on montre facilement la relation

$$A_d^{-1} L^\gamma U^\varepsilon = \Theta^\gamma_\varepsilon (A_d^{-1} \widetilde{f}) + \gamma\, [A_d^{-1}, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, \widetilde{U} + [A_d^{-1} D, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, \widetilde{U} + \sum_{j=0}^{d-1} [A_d^{-1} A_j \partial_{x_j}, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, \widetilde{U}\,,$$

où l'opérateur L^γ est défini en (6), et où on adopte la convention $A_0 = Id$. Le lemme 4 ainsi que des propriétés élémentaires de $\Theta^\gamma_\varepsilon$ donnent

$$\Theta^\gamma_\varepsilon (A_d^{-1} \widetilde{f}) + \gamma\, [A_d^{-1}, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, \widetilde{U} + [A_d^{-1} D, \Theta^\gamma_\varepsilon]\, \widetilde{U} = \frac{1}{\gamma^2}\, A_d^{-1} \widetilde{f} + r_\varepsilon\,, \quad \|\!|r_\varepsilon|\!\|_{1,\gamma} \to 0\,.$$

Avec la décomposition

$$[A_d^{-1}A_j\partial_{x_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U} = [A_d^{-1}A_j\partial_{x_j} - T^\gamma_{iA_d^{-1}A_j\xi_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U} + [T^\gamma_{iA_d^{-1}A_j\xi_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U}\,,$$

et le lemme 4, on obtient

$$A_d^{-1}L^\gamma U^\varepsilon = \frac{1}{\gamma^2}\,A_d^{-1}\widetilde{f} + r_\varepsilon + \sum_{j=0}^{d-1}[T^\gamma_{iA_d^{-1}A_j\xi_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U}\,,$$

avec $\|r_\varepsilon\|_{1,\gamma} \to 0$. Les commutateurs restants sont des termes d'ordre zéro en $\widetilde{U}$, uniformément par rapport à ε. On ne peut donc pas considérer ces commutateurs comme des termes source. Le “miracle” est que l'on peut écrire ces commutateurs sous la forme suivante :

$$[T^\gamma_{iA_d^{-1}A_j\xi_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U} = T^\gamma_{d_{j,\varepsilon}}U^\varepsilon + r_\varepsilon\,,$$

où $d_{j,\varepsilon}$ est un symbole dans $\Gamma^0_1(\Omega)$, borné par rapport à ε. En effet, le calcul symbolique permet de montrer

$$[T^\gamma_{iA_d^{-1}A_j\xi_j},\Theta^\gamma_\varepsilon]\,\widetilde{U} = T^\gamma_{\{A_d^{-1}A_j\xi_j,\vartheta_\varepsilon\}}\widetilde{U} + R^\gamma_\varepsilon\widetilde{U} = T^\gamma_{d_{j,\varepsilon}\vartheta_\varepsilon}\widetilde{U} + R^\gamma_\varepsilon\widetilde{U} = T^\gamma_{d_{j,\varepsilon}}U^\varepsilon + R^\gamma_\varepsilon\widetilde{U}\,,$$

avec

$$d_{j,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{d-1}\frac{2\varepsilon\,\xi_j\xi_k}{\gamma^2+\varepsilon|\xi|^2}\,\partial_{x_k}(A_d^{-1}A_j) \in \Gamma^0_1(\Omega)\,,$$

et où $\|R^\gamma_\varepsilon\widetilde{U}\|_{1,\gamma} \to 0$. On remarque que les symboles $d_{j,\varepsilon}$ sont bornés par rapport à ε dans la classe des symboles $\Gamma^0_1(\Omega)$. Pour conclure, on pose

$$d^\varepsilon := -\sum_{j=0}^{d-1} d_{j,\varepsilon} \in \Gamma^0_1(\Omega)\,,$$

et on obtient effectivement

$$A_d^{-1}L^\gamma U^\varepsilon + T^\gamma_{d^\varepsilon}U^\varepsilon = \frac{1}{\gamma^2}\,A_d^{-1}\widetilde{f} + r_\varepsilon\,,\quad \|r_\varepsilon\|_{1,\gamma} \to 0\,. \tag{7}$$

On remarque alors que (7) s'écrit

$$\partial_{x_d}U^\varepsilon = -A_d^{-1}\left(\gamma U^\varepsilon + \partial_{x_0}U^\varepsilon + \sum_{j=0}^{d-1}A_j\,\partial_{x_j}U^\varepsilon + DU^\varepsilon\right) - T^\gamma_{d^\varepsilon}U^\varepsilon + \frac{1}{\gamma^2}\,A_d^{-1}\widetilde{f} + r_\varepsilon \in \mathcal{H}(\Omega)\,,$$

et donc $U^\varepsilon \in \mathbb{H}(\Omega)$, avec $\mathbb{H}(\Omega)$ défini par (3). Le traitement des conditions au bord est identique, et on ne le détaillera pas.

Pour montrer que $\widetilde{U}$ vérifie l'estimation d'énergie (qui entraine clairement l'unicité), on utilise l'hypothèse 2 pour obtenir une estimation L^2 **uniforme** en ε. Un passage à la limite (faible) permet de conclure, voir [5]. □

On résume la proposition 1 et le théorème 2 dans le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit $D \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Il existe $\gamma_3 \geq 1$ tel que pour $\gamma \geq \gamma_3$, $f \in \mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ et $g \in H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $U \in L^2_\gamma(\Omega)$ du problème :*

$$\begin{cases} LU = \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(t,x)\,\partial_{x_j} U + D(t,x)U = f(t,x)\,, & (t,x) \in \Omega\,, \\ B(t,y)\,U_{|x_d=0} = g(t,y)\,, & (t,y) \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases}$$

Cette solution vérifie $U_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)$ et

$$\gamma\,\|U\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} + \|U_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)} \leq C\left(\frac{1}{\gamma^3}\,\|f\|^2_{\mathcal{H}_\gamma(\Omega)} + \frac{1}{\gamma^2}\,\|g\|^2_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)}\right)\,.$$

De plus, il existe une suite (U^ν) dans $H^1_\gamma(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &U^\nu \longrightarrow U \quad \text{dans} \quad L^2_\gamma(\Omega)\,, && U^\nu_{|x_d=0} \longrightarrow U_{|x_d=0} \quad \text{dans} \quad L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)\,, \\ &LU^\nu \longrightarrow f \quad \text{dans} \quad L^2_\gamma(\Omega)\,, && B\,U^\nu_{|x_d=0} \longrightarrow g \quad \text{dans} \quad L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)\,. \end{aligned}$$

La dernière assertion du théorème est montrée dans [16], à l'aide du lemme de Friedrichs (lemme 4). Il suffit ici de reprendre la preuve, car on sait déjà que la trace de U est dans L^2_γ.

Quand les termes source sont dans L^2_γ, il existe un résultat totalement analogue, avec une solution dans $L^2(H^{-1}_\gamma)$, dont la trace est dans H^{-1}_γ (la définition de la trace n'est pas forcément évidente à première vue !).

3.4. Fin de la preuve

Pour finir la preuve du théorème 1, il s'agit de localiser le problème en temps. On commence par montrer la propriété classique de support (voir [3] pour le cas Lopatinskii uniforme) :

Lemme 5. *Il existe $\gamma_4 \geq 1$ tel que, si $\gamma \geq \gamma_4$, $(f,g) \in \mathcal{H}_\gamma(\Omega) \times H^1_\gamma(\mathbb{R}^d)$ sont nulles pour $t < T_0$, alors la solution $U \in L^2_\gamma(\Omega)$ de (4) est nulle pour $t < T_0$. De même, si $\gamma \geq \gamma_4$, $f \in L^2_\gamma(\Omega)$, et $g \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)$ sont nulles pour $t < T_0$, la solution $U \in L^2(\mathbb{R}^+_{x_d}; H^{-1}_\gamma(\mathbb{R}^d))$ de (4) est nulle pour $t < T_0$.*

La preuve repose sur l'estimation donnée au théorème 3, qui est uniforme en γ. On peut alors conclure la preuve du résultat principal. Pour montrer l'existence de solutions, on étend les seconds membres à tout Ω, puis on utilise le théorème 3 ci-dessus. Pour l'unicité, on effectue une troncature en temps, et on utilise le lemme de support ci-dessus. On utilise alors l'analogue du théorème 3 pour des termes source dans L^2_γ. On voit ici encore l'utilité des estimations $L^2(H^{-1})$ détaillées plus haut. La propriété de continuité par rapport à la variable de temps est obtenue à l'aide du symétriseur de Friedrichs S donné par l'hypothèse 1. Le lecteur intéressé trouvera dans [5] tous les détails nécessaires.

4. Quelques remarques

Signalons tout d'abord que l'extension des résultats aux problèmes caractéristiques est à peu prés directe, pourvu que la matrice A_d soit de rang constant sur un voisinage du bord $\partial\Omega$. Bien entendu, seule la partie "non caractéristique" de la solution admet une trace. En particulier, on montre ainsi que le problème linéarisé des nappes de tourbillon compressibles (étudié dans [6]) est bien posé pour des termes source dans l'espace H^1 tangentiel.

L'application aux problèmes quasilinéaires est également immédiate, pourvu que l'on dispose des estimations a priori pour les problèmes linéarisés. On obtient l'existence de solutions (locales en temps) par un procédé de type Nash-Moser, dès lors que les hypothèses 1, 2 et 3 sont vérifiées par un ensemble "ouvert" de problèmes linéarisés. Ce point est précisément un obstacle dans l'étude des ondes de choc faiblement stables et des nappes de tourbillon compressibles. Dans ce cas, les estimations d'énergie sont liées à certaines contraintes (non linéaires) sur l'état autour duquel on linéarise. Il n'y a aucune raison pour que ces contraintes soient préservées dans une itération du type Nash-Moser, et on est conduit à apporter certaines modifications par rapport au cas usuel.

Références

[1] S. Agmon. Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur. In *Les Équations aux Dérivées Partielles*, pages 13–18. Éditions du CNRS,Paris, 1963.

[2] J.-M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.

[3] J. Chazarain, A. Piriou. *Introduction to the theory of linear partial differential equations.* North-Holland Publishing Co., 1982.

[4] J.-F. Coulombel. Weakly stable multidimensional shocks. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(4) :401–443, 2004.

[5] J.-F. Coulombel. Well-posedness of hyperbolic initial boundary value problems. *Preprint*, 2004.

[6] J.-F. Coulombel, P. Secchi. The stability of compressible vortex sheets in two space dimensions. *Indiana Univ. Math. J.*, 2004, à paraître.

[7] P. Gérard, J. Rauch. Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(3) :65–84, 1987.

[8] O. Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(5) :595–645, 1990.

[9] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :277–298, 1970.

[10] P. D. Lax, R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 :427–455, 1960.

[11] A. Majda. The stability of multi-dimensional shock fronts. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 275, 1983.

[12] A. Majda, S. Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :607–675, 1975.

[13] G. Métivier. Stability of multidimensional shocks. In *Advances in the theory of shock waves*, pages 25–103. Birkhäuser, 2001.

[14] Y. Meyer. Remarques sur un théorème de J. M. Bony. *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II*, 1 :1–20, 1981.

[15] J. W. Miles. On the disturbed motion of a plane vortex sheet. *J. Fluid Mech.*, 4 :538–552, 1958.

[16] A. Mokrane. Problèmes mixtes hyperboliques non-linéaires. *Ph.D. Thesis, Université de Rennes I*, 1987.

[17] J. Rauch. $\mathcal{L}_2$ is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25 :265–285, 1972.

[18] M. Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3) :261–292, 1988.

[19] R. Sakamoto. *Hyperbolic boundary value problems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[20] P. Secchi. Well-posedness of characteristic symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 134(2) :155–197, 1996.

[21] D. Serre. *Systems of conservation laws. 2.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[22] M. E. Taylor. Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon. In *Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977)*, pages 273–291. Dekker, 1979.

CNRS & Université Lille 1
Laboratoire de mathématiques Paul Painlevé
Cité scientifique
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, France
jfcoulom@math.univ-lille1.fr
http://math.univ-lille1.fr/˜jfcoulom