Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Thomas Alazard et Rémi Carles

Limite semi-classique des équations de Schrödinger–Poisson

J. É. D. P. (2006), Exposé n° II, 17 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A2_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006
GDR 2434 (CNRS)

Limite semi-classique des équations de Schrödinger–Poisson

Thomas Alazard Rémi Carles

1. Introduction

On s'intéresse, pour $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, à l'analyse BKW des équations :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = V_{\text{ext}}(t,x)u^\varepsilon + \varepsilon^\kappa V[u^\varepsilon]u^\varepsilon, \tag{1.1}$$

$$u^\varepsilon\big|_{t=0} = a_0^\varepsilon(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Le but est de décrire le comportement des solutions u^ε dans la limite où le nombre de Planck ε tend vers 0, lorsque la phase initiale $\phi_0(x) \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε, et que l'amplitude initiale $a_0^\varepsilon(x) \in \mathbb{C}$ a un développement asymptotique de la forme

$$a_0^\varepsilon(x) \sim a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots \tag{1.3}$$

Il y a trois facteurs, d'origine physique, qui influent sur cette analyse : le paramètre $\kappa \in \mathbb{N}$, qui mesure l'importance des effets non-linéaires, la non-linéarité $V[\cdot]$ elle-même, et la géométrie des bi-caractéristiques associées au potentiel extérieur V_{ext} et aux éventuelles oscillations quadratiques contenues dans la phase initiale ϕ_0.

Les résultats présentés dans ce texte concernent exclusivement le comportement des solutions pour les temps précédant l'apparition de caustiques. Dans ce contexte, un aspect remarquable des équations de Schrödinger (1.1) est que l'on ne s'attend pas à la création d'harmonique, pourvu qu'une seule phase soit présente initialement (comme dans (1.2)). On cherche alors des solutions approchées de (1.1) de la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \Big(\mathsf{a}_0(t,x) + \varepsilon\mathsf{a}_1(t,x) + \varepsilon^2\mathsf{a}_2(t,x) + \dots\Big)\, e^{i\Phi(t,x)/\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Notons que, près d'une caustique, les termes Φ, $\mathsf{a}_0, \dots$ deviennent singuliers et, après la caustique, plusieurs phases sont nécessaires en général pour décrire les solutions (voir [12] pour une théorie générale dans le cas linéaire).

L'étude de la limite semi-classique est l'étude des équations de Schrödinger pour des échelles de temps et d'espace grandes devant la constante de Planck. Du point de vue physique, on s'attend à ce que le comportement des observables quadratiques (densité $|u^\varepsilon|^2$ et moment $\varepsilon\,\mathrm{Im}((\nabla u^\varepsilon)\bar{u^\varepsilon})$) soit donné par les équations de la mécanique classique. Pour justifier ce principe usuel, on peut chercher à décrire u^ε en identifiant l'amplitude principale a_0 et la phase Φ comme solutions d'un système limite. Étudier la solution elle-même est plus général, et aussi plus difficile, au moins pour des interactions fortes. En effet, le cas $\kappa = 0$ est surcritique pour l'optique géométrique : ainsi, des perturbations de taille $O(\varepsilon^\alpha)$ de l'amplitude initiale a_0^ε, avec $0 < \alpha \leqslant 1$, induisent en temps $O(\varepsilon^{1-\alpha})$ des perturbations de taille $O(1)$ de l'amplitude a_0 ([5]). C'est cette propriété, qui ne se voit pas au niveau des observables quadratiques, qui rend l'analyse de développement BKW des équations de Schrödinger non-linéaires délicate.

Néanmoins, on dispose de nombreux résultats depuis les travaux de P. Gérard [15] et E. Grenier [19]. Dans ce texte, on rappellera quelques-uns de ces résultats et on décrira ceux de [1] pour les équations de Schrödinger-Poisson, où $V_{\mathrm{p}}^\varepsilon := V[u^\varepsilon]$ est donné par

$$\Delta V_{\mathrm{p}}^\varepsilon = q\Big(|u^\varepsilon|^2 - c\Big),$$

où q est une constante réelle qui modélise la charge ($q = 1$ ou $q = -1$) et $c = c(x)$ est une fonction donnée (voir par exemple [24] ou [18] pour une origine physique de ce modèle). On décrira en particulier l'interaction d'un potentiel extérieur avec le potentiel de Poisson, ainsi que la propagation de conditions non-linéaires à imposer sur les solutions lorsque c n'est pas nulle à l'infini ($c = 1$ par exemple).

2. Limite semi-classique en régime surcritique

Dans cette partie, nous expliquons le rôle du paramètre $\kappa \in \mathbb{N}$. La géométrie des bi-caractéristiques est expliquée à la section 4. La nature de la non-linéarité joue déjà un rôle dans l'étude du problème de Cauchy, que nous expliquerons à la section 3. Aussi, pour fixer les idées, on considère ici l'exemple des équations

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\kappa q\,|u^\varepsilon|^2\,u^\varepsilon, \qquad (\kappa \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

en l'absence de potentiel extérieur, pour une non-linéarité $V[u] = q\,|u|^2$ cubique défocalisante ($q = 1$) ou focalisante ($q = -1$).

2.1. Cas critique et sous-critiques : $\kappa \geqslant 1$

Pour des données initiales de la forme (1.3), l'approche usuelle consiste à reporter le développement (1.4) dans (1.1) en ordonnant les termes selon les puissances de ε pour former une suite d'équations qui détermine Φ, a_0, a_1, … Cette procédure s'applique de façon très générale dans le contexte de l'optique faiblement non-linéaire de Joly-Métivier-Rauch (voir le texte de revue [13]), qui ici correspond à $\kappa \geqslant 1$. Dans ce régime, l'annulation du terme d'ordre $O(\varepsilon^0)$ implique, formellement, que la phase Φ vérifie l'équation eikonale :

$$\partial_t\Phi + \frac{1}{2}\,|\nabla\Phi|^2 = 0. \tag{2.2}$$

L'annulation du terme d'ordre $O(\varepsilon^1)$ donne l'amplitude principale par intégration le long des rayons de l'optique géométrique :

$$\partial_t \mathsf{a}_0 + \nabla\Phi\cdot\nabla \mathsf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathsf{a}_0\Delta\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa > 1, \\ -\,iq\,|\mathsf{a}_0|^2\,\mathsf{a}_0 & \text{si } \kappa = 1. \end{cases}$$

Les équations suivantes permettent de trouver tous les termes a_k par récurrence.

L'équation (2.2) décrit la géométrie de la propagation. Localement en temps, elle a une unique solution régulière pour toute donnée initiale ϕ_0 régulière. L'apparition en temps fini d'une singularité correspond à la formation d'une caustique. On retiendra aussi que la valeur $\kappa = 1$ est critique en ce qui concerne les effets non-linéaires. Si $\kappa > 1$, aucun effet dû à la non-linéarité n'est attendu à l'ordre principal et, formellement, $u^\varepsilon \sim \mathsf{a}_0 e^{i\Phi/\varepsilon}$ où Φ et a_0 ne dépendent pas de $V[\cdot]$. En revanche, si $\kappa = 1$, a_0 vérifie une équation non-linéaire qui fait intervenir $V[\cdot]$ (mais les équations pour les profils a_k sont linéaires pour $k \geqslant 1$).

2.2. Régime surcritique : $\kappa = 0$

Le cas $\kappa = 0$ est surcritique au sens de l'analyse précédente. Dans ce régime, la cascade d'équations commence par

$$\begin{aligned}
O\left(\varepsilon^0\right) : &\quad \partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + q|\mathsf{a}_0|^2 = 0,\\
O\left(\varepsilon^1\right) : &\quad \partial_t \mathsf{a}_0 + \nabla\Phi \cdot \nabla \mathsf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathsf{a}_0 \Delta \Phi = -2iq \operatorname{Re}\left(\mathsf{a}_0 \overline{\mathsf{a}_1}\right) \mathsf{a}_0.
\end{aligned}$$

La grande différence avec le régime $\kappa \geqslant 1$ est que l'équation pour la phase Φ est couplée à l'équation de transport pour l'amplitude principale a_0. Ce qui justifie l'apparition d'oscillations en Φ/ε, même pour des données initiales non oscillantes ($\phi_0 = 0$). On note aussi que ce système n'est pas fermé : Φ dépend de a_0 et a_0 dépend de a_1, qui est une indéterminée. De façon plus générale, on ne peut pas obtenir de système clos d'équations pour la phase et un nombre fini d'amplitudes (voir [15]). C'est une caractéristique des régimes surcritiques en optique géométrique [9, 10, 25]. Cependant, comme cela a été remarqué par P. Gérard [15], on obtient un système fermé qui détermine la phase Φ en introduisant les inconnues

$$\rho := |\mathsf{a}_0|^2, \quad v := \nabla \Phi,$$

qui vérifient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + q \nabla \rho = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour $q = 1$ (cas défocalisant), ce sont les équations d'Euler pour un fluide compressible, de nature hyperbolique. En revanche, pour $q = -1$, c'est un problème d'évolution de type elliptique.

2.3. L'approche d'E. Grenier

On explique ici l'approche d'E. Grenier pour étudier la limite semi-classique des équations :

$$i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \tag{2.4}$$

$$u^\varepsilon\big|_{t=0} = a_0^\varepsilon(x) e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}, \tag{2.5}$$

correspondant à une non-linéarité défocalisante dans le régime $\kappa = 0$. Comme on l'a expliqué, pour décrire la solution à l'ordre principal, il faut connaître l'amplitude initiale à l'ordre $o(\varepsilon)$, et on suppose donc que $\phi_0, a_0^\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et qu'il existe $a_0, a_1 \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$a_0^\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1 + o(\varepsilon) \text{ dans } H^s(\mathbb{R}^n),\ \forall s \geqslant 0.$$

Dans [19], l'idée est de chercher les solutions exactes sous la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) e^{i\Phi^\varepsilon(t,x)/\varepsilon}\,, \tag{2.6}$$

et de montrer que l'"amplitude" a^ε et la "phase" Φ^ε admettent des développements asymptotiques de la forme :

$$a^\varepsilon \sim a + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} + \dots \quad ; \quad \Phi^\varepsilon \sim \phi + \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots$$

La première étape est de construire cette représentation phase/amplitude.

Théorème 2.1 (E. Grenier [19])**.** *Soit $s > n/2 + 2$. Il existe $T_s > 0$ indépendant de $\varepsilon \in]0,1]$, et deux suites a^ε et Φ^ε bornées dans $C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R}^n))$ telles que $u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x)e^{i\Phi^\varepsilon(t,x)/\varepsilon}$ soit solution de* (2.4)*–*(2.5) *sur* $[0,T_s]$.

Principe de la démonstration. Autoriser la phase à dépendre de ε revient à introduire une inconnue supplémentaire, ce qui permet d'obtenir un système clos d'équations. L'approche historique [20, Chap. III] consisterait d'ailleurs à chercher à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi^\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi^\varepsilon\right|^2 + |a^\varepsilon|^2 = \varepsilon^2 \frac{\Delta a^\varepsilon}{2a^\varepsilon} \quad &; \quad \Phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \phi_0\,, \\ \partial_t a^\varepsilon + \nabla\Phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \Phi^\varepsilon = 0 \quad &; \quad a^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Cependant, ceci ne convient pas puisque l'on doit autoriser a^ε à s'annuler (voir la discussion sur la transformée de Madelung dans [15, 28]). L'approche introduite par E. Grenier consiste à imposer

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi^\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi^\varepsilon\right|^2 + |a^\varepsilon|^2 = 0 \quad &; \quad \Phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \phi_0\,, \\ \partial_t a^\varepsilon + \nabla\Phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \Phi^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon \quad &; \quad a^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En posant $a_1^\varepsilon := \operatorname{Re} a^\varepsilon$, $a_2^\varepsilon := \operatorname{Im} a^\varepsilon$ et $U^\varepsilon := (\nabla\phi^\varepsilon, a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon)$, on peut récrire le système précédent sous la forme

$$\partial_t U^\varepsilon + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} A_j(U^\varepsilon)\partial_j U^\varepsilon + \varepsilon L(\partial_x)U^\varepsilon = 0,$$

pour des matrices A_j symétriques et un opérateur $L(\partial_x)$ du second ordre et antisymétrique.

On applique alors des résultats standards dans l'étude des systèmes hyperboliques quasi-linéaires pour estimer la norme L^2 de $\widetilde{U}^\varepsilon := (I-\Delta)^{s/2}U^\varepsilon$. En effet, $\widetilde{U}^\varepsilon$ vérifie

$$\partial_t \widetilde{U}^\varepsilon + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} A_j(U^\varepsilon)\partial_j \widetilde{U}^\varepsilon + \varepsilon L(\partial_x)\widetilde{U}^\varepsilon = f^\varepsilon := \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\Big[A_j(U^\varepsilon), (I-\Delta)^{s/2}\Big]\partial_j U^\varepsilon. \tag{2.8}$$

Comme $L(\partial_x) = -L(\partial_x)^*$, on a une estimation L^2 uniforme en ε :

$$\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{U}^\varepsilon\right\|_{L^2}^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\langle\, (\partial_j A_j(U^\varepsilon))\widetilde{U}^\varepsilon, \widetilde{U}^\varepsilon\,\rangle + 2\langle\, f^\varepsilon, \widetilde{U}^\varepsilon\,\rangle.$$

Les estimations de Sobolev et de commutateurs donnent

$$\|\partial_j A_j(U^\varepsilon)\|_{L^\infty} + \|f^\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C(\|U^\varepsilon\|_{H^s}),$$

pour une fonction C indépendante de ε. Ainsi, le lemme de Gronwall implique les estimations uniformes désirées. $\square$

Notons $(a,\phi) \in C([0,T_*]; H^\infty(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du système limite :

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + |a|^2 = 0 \quad &; \quad \phi\Big|_{t=0} = \phi_0\,,\\
\partial_t a + \nabla\phi\cdot\nabla a + \frac{1}{2}a\Delta\phi = 0 \quad &; \quad a\Big|_{t=0} = a_0\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Les estimations précédentes (appliquées à $(a^\varepsilon - a, \Phi^\varepsilon - \phi)$) permettent de montrer que

$$\begin{aligned}
\left\|u^\varepsilon(t) - a(t)e^{i\phi(t)/\varepsilon}\right\|_{L^2} &= \left\|a^\varepsilon(t)e^{i\Phi^\varepsilon(t)/\varepsilon} - a(t)e^{i\phi(t)/\varepsilon}\right\|_{L^2}\\
&= O\left(\|a^\varepsilon(t) - a(t)\|_{L^2} + \left\|e^{i\Phi^\varepsilon(t)/\varepsilon} - e^{i\phi(t)/\varepsilon}\right\|_{L^\infty}\|a(t)\|_{L^2}\right)\\
&= O(\varepsilon) + O(t).
\end{aligned}$$

Pour des temps d'ordre $O(1)$, on décrit la solution à l'ordre principal en prenant en compte le premier correcteur $(a^{(1)}, \phi^{(1)})$ solution du linéarisé de (2.7) autour de (a,ϕ), avec $\varepsilon = 1$:

$$\begin{gathered}
\partial_t \phi^{(1)} + \nabla\phi\cdot\nabla\phi^{(1)} + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}a^{(1)}\right) = 0,\\
\partial_t a^{(1)} + \nabla\phi\cdot\nabla a^{(1)} + \nabla\phi^{(1)}\cdot\nabla a + \frac{1}{2}a^{(1)}\Delta\phi + \frac{1}{2}a\Delta\phi^{(1)} = \frac{i}{2}\Delta a,\\
\phi^{(1)}\Big|_{t=0} = 0 \quad ; \quad a^{(1)}\Big|_{t=0} = a_1.
\end{gathered}$$

On a alors ([19]) : pour tout s, $T_* \leqslant T_s$, $(a^{(1)}, \phi^{(1)}) \in L^\infty([0,T_*]; H^s(\mathbb{R}^n))$ et

$$\|a^\varepsilon - a - \varepsilon a^{(1)}\|_{L^\infty([0,T_*];H^s)} + \|\Phi^\varepsilon - \phi - \varepsilon\phi^{(1)}\|_{L^\infty([0,T_*];H^s)} \leqslant C_s\varepsilon^2, \quad \forall s \geqslant 0\,.$$

On a donc amélioré l'asymptotique précédente en :

$$\left\|u^\varepsilon(t) - a(t)e^{i\phi^{(1)}(t)}e^{i\phi(t)/\varepsilon}\right\|_{L^2} = O(\varepsilon).$$

Le couplage $(a^{(1)}, \phi^{(1)})$ montre que pour décrire u^ε sur des temps d'ordre $O(1)$, il faut prendre en compte le correcteur d'amplitude initial a_1.

On conclut cette partie par des remarques sur la structure des équations.

Remarque. Si (a,ϕ) vérifie (2.9), alors $(\rho, v) := (|a|^2, \nabla\phi)$ est solution de

$$\begin{aligned}
\partial_t v + v\cdot\nabla v + \nabla\rho = 0 \quad &; \quad v\Big|_{t=0} = \nabla\phi_0\,,\\
\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0 \quad &; \quad \rho\Big|_{t=0} = |a_0|^2\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Bien que a soit à valeurs complexes, remarquons le lien entre cette formulation du système limite et le changement d'inconnu $\rho \to \sqrt{\rho}$ (vitesse du son) introduit dans [23] (voir aussi [8]) pour étudier (2.10) lorsque la densité est à support compact.

Remarque. Dans [19], l'analyse est étendue au cas où la non-linéarité $V[u] = |u|^2$ est remplacée par $V[u] := f(|u|^2)$ lorsque f vérifie $f(0) = 0$ et $f' > 0$ (non-linéarité cubique et défocalisante à l'origine). Dans ce cas, on a toujours des estimations pour les solutions de l'équation d'onde

$$\partial_t^2 v - \operatorname{div}(f'(|u|^2)\nabla v) = F.$$

Pour cette même raison, l'approche de [19] ne s'applique pas lorsqu'on suppose juste que $f' \geqslant 0$ (ce problème est ouvert même pour une non-linéarité quintique $f(U) = U^2$ telle que f' s'annule en un seul point). Notons que pour une non-linéarité focalisante, avec $f(U) = -U$, l'équation de propagation est de type elliptique ($\Delta_{t,x} v = F$) ce qui amène à travailler dans la classe des fonctions analytiques (voir [15]).

Remarque (Milieux inhomogènes). On pourrait chercher à reprendre l'étude de (2.4)–(2.5) dans le cas où Δ est remplacé par $\operatorname{div}(\beta(x)\nabla\cdot)$, où $\beta \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ est minorée par une constante strictement positive. Dans ce cas, on est amené à étudier un système de la forme (2.8) avec un opérateur $L(x, \partial_x)$ qui est toujours anti-symétrique, mais à coefficients variables. En particulier, on ne peut plus obtenir des estimations de la norme H^s en commutant l'équation avec $(I - \Delta)^{s/2}$ car le commutateur $[(I - \Delta)^{s/2}, L(x, \partial_x)]$ est un opérateur d'ordre $s + 1$, aussi $[(I - \Delta)^{s/2}, L(x, \partial_x)]U^\varepsilon$ ne peut pas être vu comme un terme source. C'est un problème de perte de dérivée que l'on peut chercher à résoudre via l'effet de Kato. Ici, on peut aussi commencer par remarquer que l'on a déjà une estimation L^2 uniforme en ε de la solution, car $L(x, \partial_x) = -L(x, \partial_x)^*$. Le problème est donc d'obtenir une estimation des dérivées d'ordre s. Pour cela on peut s'inspirer de [2]. Le point important est que $\operatorname{div}(\beta(x)\nabla\cdot)$ commute avec $L(x, \partial_x)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut donc estimer $(\operatorname{div}(\beta(x)\nabla))^m U^\varepsilon$ dans L^2 de la même façon que l'on avait estimé $(I - \Delta)^{s/2} U^\varepsilon$. Ce qui donne le résultat cherché si $s = 2m$.

3. Problèmes de Cauchy

On explique ici quelques résultats concernant l'étude des problèmes de Cauchy pour les systèmes qui interviennent dans l'étude de la limite semi-classique des équations de Schrödinger-Poisson. Ces équations s'écrivent

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = V_{\mathrm{p}} u, \quad \Delta V_{\mathrm{p}} = q\left(|u|^2 - c\right), \tag{3.1}$$

où q est une constante et $c = c(x)$ est une fonction bornée. Si $c = 0$, c'est l'équation de Hartree, le problème de Cauchy est bien compris (voir [17] ou [6]). Si l'on suppose juste que c est bornée ($c = 1$ par exemple) alors c'est un problème ouvert que l'on discute ici en comparant avec l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \left(|u|^2 - 1\right) u, \tag{3.2}$$

qui est l'évolution Hamiltonienne associée à l'énergie :

$$\int \frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 + \frac{1}{4}\left(|v(x)|^2 - 1\right)^2 dx.$$

L'espace naturel pour étudier (3.2) est donc l'espace d'énergie

$$E = \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\ ;\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ |u|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pour étudier les solutions bornées, mais qui ne sont pas dans L^2, P. E. Zhidkov a introduit, en dimension $n = 1$, dans [30] (voir aussi [31]) les espaces :

$$X^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \ ; \ \nabla u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Zhidkov a montré que le problème de Cauchy pour (3.2) est globalement bien posé dans $X^1(\mathbb{R}^1)$. L'étude des espaces $X^s(\mathbb{R}^n)$ en dimension $n \geqslant 2$ est due à C. Gallo [14] qui a, en particulier, montré que le problème de Cauchy pour (3.2) est localement bien posé dans ces espaces. Récemment, P. Gérard [16] a résolu le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie.

Théorème 3.1 (P. Gérard [16])**.** *Soit $n \in \{2,3\}$. Pour toute donnée $u_0 \in E$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}; E)$ de* (3.2) *telle que $u(0) = u_0$.*

C'est un résultat fondamentalement non-linéaire, en raison de la contrainte $|u|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas où la fonction c de l'équation de Poisson (3.1) n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ ($c \equiv 1$ par exemple), le système (3.1) nous met en présence d'un problème semblable. À la manière de [16], nous travaillerons avec la contrainte $|u|^2 - c \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Comme expliqué dans l'introduction, on s'intéresse aux comportements des solutions pour les temps précédant l'apparition de singularités pour le système limite. Ces équations limites sont celles de la mécanique compressible, et il est notable que l'on dispose de plusieurs résultats donnant des conditions garantissant que les solutions explosent en temps fini. Par exemple, dans [23], on trouve des résultats d'explosion pour des densités initiales intégrables (en particulier dans le cas du vide, qui correspond à des données initiales u_0^ε à support compact). Pour les équations de Gross-Pitaevskii, le système limite est aussi celui des équations d'Euler pour un gaz isentropique, mais dans le contexte usuel où la densité est une constante strictement positive à l'infini. On peut alors utiliser les théorèmes 1 et 3 de Sideris [26] pour donner les exemples suivants :

Exemple. Pour tout $n \geqslant 1$, et toute fonction non identiquement nulle $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, la solution (ρ, v) de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 & ; \quad \rho\big|_{t=0} := 1 + \chi(x^2), \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \rho = 0 & ; \quad v\big|_{t=0} := -\Lambda \nabla\Big(\chi(x^2)x^2\Big), \end{cases} \tag{3.3}$$

explose en temps fini pour Λ assez grand. En dimension 3, le résultat reste vrai avec $v\big|_{t=0} = 0$.

4. Réductions géométriques

4.1. Introduction d'un potentiel

Considérons les équations

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = V_{\text{ext}}(t,x)u^\varepsilon + |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \quad u^\varepsilon\big|_{t=0} = a_0^\varepsilon(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}.$$

Pour ce problème, l'approche détaillée au paragraphe 2.3 consiste à rechercher une représentation phase/amplitude de la solution $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i\Phi^\varepsilon/\varepsilon}$ telle que

$$
\begin{aligned}
\partial_t \Phi^\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi^\varepsilon\right|^2 + V_{\text{ext}} + |a^\varepsilon|^2 = 0 \quad &; \quad \Phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \phi_0\,, \\
\partial_t a^\varepsilon + \nabla \Phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \Phi^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon \quad &; \quad a^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

On note que l'introduction d'un potentiel non borné dans les équations modifie sensiblement la nature du problème. En effet, le potentiel ne peut pas être vu comme un terme perturbatif. Pour autoriser le cas d'un potentiel extérieur et d'une donnée initiale réguliers et sous-quadratiques, l'idée, introduite dans [4], est de chercher la phase Φ^ε sous la forme $\phi^\varepsilon + \phi_{\text{eik}}$ où ϕ_{eik} est définie par :

Lemme 4.1 (R. Carles [4])**.** *Supposons que $V_{\text{ext}} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$
\partial_x^\alpha V_{\text{ext}} \in C(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^n)), \quad \partial_x^\alpha \phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \textit{pour tout } |\alpha| \geqslant 2,
$$

alors il existe $T > 0$ et une unique solution $\phi_{\text{eik}} \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ de :

$$
\partial_t \phi_{\text{eik}} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi_{\text{eik}}|^2 + V_{\text{ext}} = 0 \quad ; \quad \phi_{\text{eik}}\Big|_{t=0} = \phi_0\,.
$$

Cette solution est sous-quadratique : $\partial_x^\alpha \phi_{\text{eik}} \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \geqslant 2$.

Esquisse de la démonstration. Considérons la solution $(x(t,y), \xi(t,y))$ de

$$
\begin{cases}
\partial_t x(t,y) = \xi\,(t,y) \quad ; \quad x(0,y) = y, \\
\partial_t \xi(t,y) = -\nabla_x V_{\text{ext}}\,(t, x(t,y)) \quad ; \quad \xi(0,y) = \nabla \phi_0(y).
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

En suivant ce flot, et en utilisant un théorème d'inversion globale (voir [11]), on construit ϕ_{eik}, localement en temps, mais globalement en espace. L'idée est que $\nabla_y x - I$ est une petite perturbation uniformément bornée en espace, nulle pour $t = 0$ et continue en temps. Ceci implique l'existence de $T^* > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, T^*]$, $y \mapsto x(t,y)$ est un difféomorphisme global. On note $y(t,x)$ son inverse, qui permet de définir $\phi_{\text{eik}} \in C^\infty([0,T^*] \times \mathbb{R}^n)$ par $\nabla \phi_{\text{eik}}(t,x) = \xi\,(t, y(t,x))$. □

En introduisant $\phi^\varepsilon := \Phi^\varepsilon - \phi_{\text{eik}}$, le système (4.1) devient

$$
\begin{aligned}
\partial_t \phi^\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\nabla \phi^\varepsilon\right|^2 + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla \phi^\varepsilon + |a^\varepsilon|^2 = 0, \\
\partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{\text{eik}} = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\
\phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = 0 \quad ; \quad a^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Le point important est de vérifier que les termes où ϕ_{eik} intervient sont des perturbations semi-linéaires (qui peuvent être traitées par le lemme de Gronwall). Pour le voir, on introduit la vitesse $v^\varepsilon = \nabla \phi^\varepsilon$ et on sépare la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude, pour obtenir un système de la forme

$$
\partial_t U^\varepsilon + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} A_j(\nabla \phi_{\text{eik}}, U^\varepsilon) \partial_j U^\varepsilon + B(\nabla^2 \phi_{\text{eik}}) U^\varepsilon + \varepsilon L(\partial_x) U^\varepsilon = 0,
$$

pour des matrices $A_j = A_j(V,U)$ symétriques dépendant de façon C^∞ de $(V,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+2}$, et un opérateur $L(\partial_x)$ du second ordre et anti-symétrique. Le point clé est que les matrices A_j dépendent linéairement de $V \in \mathbb{R}^n$. Par conséquent, tous les termes qui apparaissent dans les estimations d'énergie ne font intervenir que les dérivées secondes de $\phi_{\rm eik}$, qui sont bornées d'après le Lemme 4.1 (voir [4]).

4.2. Interaction avec le potentiel de Poisson

Considérons maintenant les équations de Schrödinger-Poisson :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = V_{\rm ext}(t,x)u^\varepsilon + V_{\rm p}^\varepsilon(t,x)u^\varepsilon, \tag{4.4}$$

$$\Delta V_{\rm p}^\varepsilon = q\left(|u^\varepsilon|^2 - c\right), \tag{4.5}$$

$$u^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}, \tag{4.6}$$

où $q \in \mathbb{R}$, dans le contexte suivant :

Hypothèse 4.2. Le potentiel extérieur $V_{\rm ext} \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ et la phase $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s'écrivent

$$V_{\rm ext}(t,x) = V_{\rm quad}(t,x) + V_{\rm pert}(t,x), \quad \phi_0(x) = \phi_{\rm quad}(x) + \varphi_0(x),$$

avec

$$\nabla_x^3 V_{\rm quad} = 0, \quad \nabla_x^3\phi_{\rm quad} = 0, \quad \nabla_x V_{\rm pert} \in C(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n)), \quad \nabla_x\varphi_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Exemple. On peut en particulier considérer un potentiel harmonique anisotrope :

$$V_{\rm quad}(t,x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t)x_j^2.$$

Les idées expliquées dans les paragraphes précédents conduisent à introduire $\phi_{\rm eik}$ dans $C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, solution de :

$$\partial_t\phi_{\rm eik} + \frac{1}{2}|\nabla_x\phi_{\rm eik}|^2 + V_{\rm quad} = 0 \quad ; \quad \phi_{\rm eik}\Big|_{t=0} = \phi_{\rm quad}, \tag{4.7}$$

et à chercher la solution sous la forme $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i(\phi_{\rm eik}+\phi^\varepsilon)/\varepsilon}$ avec

$$\begin{aligned}
&\partial_t\phi^\varepsilon + \nabla\phi_{\rm eik}\cdot\nabla\phi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi^\varepsilon|^2 + V_{\rm pert} + V_{\rm p}^\varepsilon = 0 \ ; \ \phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \varphi_0,\\
&\partial_t a^\varepsilon + \nabla\left(\phi^\varepsilon + \phi_{\rm eik}\right)\cdot\nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon\Delta\left(\phi^\varepsilon + \phi_{\rm eik}\right) = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon \ ; \ a^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon,\\
&\Delta V_{\rm p}^\varepsilon = q\Big(|a^\varepsilon|^2 - c\Big).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Supposons que le profil c est une perturbation à courte portée d'une constante :

$$c = 1 + \widetilde{c}, \quad \text{avec } \widetilde{c} \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Aussi, comme expliqué à la section 3, on suppose que la donnée initiale vérifie $|a_0^\varepsilon|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Cependant cette contrainte n'est pas propagée par l'équation lorsque $\Delta\phi_{\rm eik} \neq 0$, comme cela se constate sur l'exemple

$$\partial_t a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon\Delta\phi_{\rm eik} = 0,$$

qui s'écrit $\partial_t\widetilde{a}^\varepsilon = 0$ avec

$$\widetilde{a}^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\Delta\phi_{\rm eik}(\tau,x)d\tau\right).$$

Cela suggère de chercher des solutions vérifiant la contrainte

$$\left| u^\varepsilon e^{\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau,x)d\tau} \right|^2 - 1 \in L^\infty_t L^2_x. \tag{4.9}$$

Cependant, cette condition n'est pas naturelle par rapport à l'équation de Poisson, car elle ne donne pas $\Delta V_{\rm p}^\varepsilon \in L^\infty_t L^2_x$.

Pour contourner cet obstacle, dans [1], on commence par remarquer que, sous l'Hypothèse 4.2, $\Delta\phi_{\rm eik}$ est une fonction du temps uniquement. En effet,

$$\nabla_x^3 \phi_{\rm eik} = 0 \tag{4.10}$$

(ce qui se démontre en remarquant que $\Psi := \nabla_x^3\phi_{\rm eik}$ vérifie l'équation de transport

$$\partial_t\Psi + \nabla\phi_{\rm eik}\cdot\nabla\Psi = B(\nabla^2\phi_{\rm eik})\Psi, \quad \Psi\Big|_{t=0} = 0,$$

et en utilisant le fait que $\nabla^2\phi_{\rm eik}$ est bornée). L'idée est alors d'introduire un potentiel de Poisson fantôme $V_{\rm g}$ et un potentiel $V_{\widetilde{c}}$ tels que :

$$\Delta V_{\rm g} = q\left(e^{-\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau} - 1\right), \qquad \Delta V_{\widetilde{c}} = q\widetilde{c}. \tag{4.11}$$

Alors, le potentiel $\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon := V_{\rm p}^\varepsilon - V_{\rm g} - V_{\widetilde{c}}$ vérifie une équation naturelle par rapport à la contrainte (4.9). En effet, on calcule :

$$\Delta\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon = qe^{-\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau}\left(\left|u^\varepsilon e^{\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau}\right|^2 - 1\right).$$

Puisque $\Delta V_{\rm g}$ est une fonction du temps seulement, $V_{\rm g}$ est quadratique en x, et on peut choisir

$$V_{\rm g}(t,x) = q\frac{|x|^2}{2n}\left(e^{-\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau} - 1\right). \tag{4.12}$$

Ainsi, introduire $V_{\rm g}$ et récrire la première équation de (4.8) pour le potentiel $\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon$ fait apparaître des termes quadratiques supplémentaires dans l'équation pour ϕ^ε ($V_{\rm g}$ lui même !). Suivant la méthode expliquée au paragraphe 4.1, on doit prendre en compte ces termes dans la définition de la phase $\phi_{\rm eik}$. C'est à dire remplacer $V_{\rm quad}$ par $V_{\rm quad} + V_{\rm g}$ dans (4.7). Cependant, modifier la définition de $\phi_{\rm eik}$ modifie la définition de $V_{\rm g}$ par (4.11), ce qui modifie la définition de $\phi_{\rm eik}$. Ce phénomène non-linéaire suggère que déterminer la bonne phase eikonale nécessite de résoudre

$$\begin{gathered}\partial_t\phi_{\rm eik} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_{\rm eik}|^2 + V_{\rm quad}(t,x) = -q\frac{|x|^2}{2n}\left(e^{-\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau} - 1\right), \\ \phi_{{\rm eik}|t=0} = \phi_{\rm quad}\,. \end{gathered} \tag{4.13}$$

En cherchant la solution de ce problème sous la forme d'une fonction polynomiale en x et en introduisant l'inconnue $\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau$, on se ramène à une équation différentielle ordinaire, et on peut montrer que :

Proposition 4.3. *Sous l'hypothèse* 4.2, *il existe un temps* $T^* > 0$ *et une unique solution* $\phi_{\rm eik} \in C^\infty([0,T^*]\times\mathbb{R}^n)$ *de* (4.13) *telle que* $\nabla_x^3\phi_{\rm eik} \equiv 0$.

La discussion précédente peut se résumer comme suit.

Lemme 4.4. *Introduisons $V_{\widetilde{c}}$ tel que $\Delta V_{\widetilde{c}} = q\widetilde{c}$, et considérons la fonction $\phi_{\rm eik}$ donnée par la proposition* 4.3. *Notons*

$$g(t) := \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi_{\rm eik}(\tau)d\tau \quad et \quad V_{\rm g}(t,x) = q\frac{|x|^2}{2n}\left(e^{-2g(t)}-1\right).$$

Alors $(a^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ vérifie (4.8) *si et seulement si*

$$(\widetilde{a}^\varepsilon,\phi^\varepsilon,\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon) = (e^g a^\varepsilon,\phi^\varepsilon,V_{\rm p}^\varepsilon - V_{\rm g} - V_{\widetilde{c}})$$

vérifie

$$\begin{aligned}\partial_t\phi^\varepsilon + \nabla\phi_{\rm eik}\cdot\nabla\phi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi^\varepsilon|^2 + V_{\rm pert} + \widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon = 0\ ;\ \phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \varphi_0,\\ \partial_t\widetilde{a}^\varepsilon + \nabla\left(\phi^\varepsilon+\phi_{\rm eik}\right)\cdot\nabla\widetilde{a}^\varepsilon + \frac{1}{2}\widetilde{a}^\varepsilon\Delta\phi^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta\widetilde{a}^\varepsilon\ ;\ \widetilde{a}^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon,\\ \Delta\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon = qe^{-2g}\Big(|\widetilde{a}^\varepsilon|^2-1\Big).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Remarque. Noter que $\widetilde{V_{\rm p}}^\varepsilon$ ne vérifie pas les mêmes conditions à l'infini que $V_{\rm p}^\varepsilon$. Ceci est lié au choix (4.12) fait pour résoudre (4.11).

On peut simplifier encore le système en utilisant le fait que $\phi_{\rm eik}$ est une fonction polynomiale de degré au plus deux. En effet, pour tout $t\in[0,T^*]$, $\nabla\phi_{\rm eik}(t,\cdot)$ est une fonction affine et on peut décrire très simplement les caractéristiques $x(t,y)$ associées à l'opérateur de transport $\partial_t + \nabla\phi_{\rm eik}\cdot\nabla$ présent dans (4.14) :

Lemme 4.5. *Il existe $\alpha\in C^\infty([0,T^*];\mathbb{R}^n)$ et $A\in C^\infty([0,T^*];\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tels que, $A=A^*$ et, pour tout $t\in[0,T^*]$, la solution de*

$$\partial_t x(t,y) = \nabla\phi_{\rm eik}(t,x(t,y)),\quad x(0,y)=y,$$

vérifie $x(t,y) = e^{A(t)}y + \alpha(t)$.

Définissons, pour toute fonction f,

$$f^\sharp(t,y) = f\left(t,x(t,y)\right).\tag{4.15}$$

Travailler avec $f^\sharp$ au lieu de f permet de redresser les caractéristiques associées à $\partial_t + v_{\rm eik}\cdot\nabla$ de sorte que

$$\partial_t f^\sharp(t,y) = (\partial_t + v_{\rm eik}\cdot\nabla)f\left(t,x(t,y)\right).$$

Le point important est que ce changement de variable ne modifie pas la structure des équations. En effet, le lemme 4.5 implique que

$$(\nabla f)^\sharp(t,y) = e^{-A(t)}\nabla f^\sharp(t,y),\tag{4.16}$$

pour une matrice symétrique $A(t)$ qui ne dépend pas de y.

Introduisons l'opérateur ∂ par, pour tout $u\colon[0,T^*]\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(\partial u)(t) := e^{-A(t)}\nabla u(t).$$

Utilisons la notation (4.15), celles du lemme 4.4 et posons

$$\alpha^\varepsilon := (a^\varepsilon)^\sharp,\quad v^\varepsilon := (\nabla\phi^\varepsilon)^\sharp,\quad v_{\rm eik} := (\nabla\phi_{\rm eik})^\sharp \quad \text{et} \quad W_{\rm pert} := V_{\rm pert}^\sharp + V_{\widetilde{c}}^\sharp$$

qui vérifie $\nabla W_{\rm pert} \in C(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n))$ car $\widetilde{c} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\infty(\mathbb{R}^n)$ par hypothèse. Avec ces notations, on s'est ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \partial v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \partial v_{\rm eik} + \partial W_{\rm pert} + \partial W^\varepsilon_{\rm poi} = 0, \\ \partial_t \alpha^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \partial \alpha^\varepsilon + \dfrac{1}{2} \alpha^\varepsilon \partial \cdot v^\varepsilon = -i \dfrac{\varepsilon}{2} \partial^* \partial \alpha^\varepsilon, \\ \partial^* \partial W^\varepsilon_{\rm poi} = -q e^{-2g} \Big(|\alpha^\varepsilon|^2 - 1 \Big). \end{cases} \tag{4.17}$$

Remarque. Pour un potentiel extérieur répulsif $V_{\rm quad} = -|x|^2$ et $\phi_{\rm quad} = 0$, ou $V_{\rm quad} = 0$ et $\phi_{\rm quad} = +|x|^2$, le terme $v^\varepsilon \cdot \partial v_{\rm eik}$ est un terme de relaxation. Ce qui a permi d'obtenir, dans des situations voisines, des résultats en temps grand pour des données petites (voir [3, 7] pour les équations de Schrödinger et [27] pour les équations d'Euler).

5. Enoncés des résultats

On décrit ici les résultats de [1] pour le système

$$i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon = V_{\rm ext} u^\varepsilon + V^\varepsilon_{\rm p} u^\varepsilon, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

$$\Delta V^\varepsilon_{\rm p} = q \Big(|u^\varepsilon|^2 - c \Big), \quad \nabla V_{\rm p}(t,x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0, \; V^\varepsilon_{\rm p}(t,0) = 0, \tag{5.2}$$

$$u^\varepsilon_{|t=0} = a^\varepsilon_0(x) e^{i\phi_0(x)/\varepsilon}. \tag{5.3}$$

On montre que les solutions des équations de Schrödinger–Poisson existent sur un intervalle de temps indépendant de la constante de Planck, pour un profil c borné, en présence d'un potentiel extérieur. Le manque d'intégrabilité du profil est résolu en travaillant dans les espaces de Zhidkov introduits au §3, en dimension au moins 3. On en déduit que les observables quadratiques convergent fortement quand ε tend vers 0. Dans le cas où $c \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on montre des résultats de convergence forte pour la solution elle-même.

On a expliqué dans la section précédente comment éliminer les termes liés aux composantes quadratiques de $V_{\rm ext}$ et ϕ_0. On considère donc ici le contexte suivant, on l'on se restreint au cas d'oscillations planes. Dans ce cas, on peut autoriser des profils c plus généraux.

Hypothèse 5.1. • c appartient à l'espace de Zhidkov $X^\infty(\mathbb{R}^n) := \cap_{s \geqslant 0} X^s(\mathbb{R}^n)$.
• Le potentiel extérieur $V_{\rm ext} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ s'écrit

$$V_{\rm ext}(t,x) = E(t) \cdot x + V_{\rm pert}(t,x), \text{ avec } E \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \nabla V_{\rm pert} \in C(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

• L'amplitude initiale est de la forme $a^\varepsilon_0(x) = a_0(x) + r^\varepsilon(x)$ avec $a_0 \in X^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|a_0|^2 - c \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et $r^\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$\|r^\varepsilon\|_{H^s} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \forall s \geqslant 0.$$

• La phase initiale $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\phi_0(x) = \alpha \cdot x + \varphi_0(x), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ et } \nabla \varphi_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 5.2. *Soit* $n \geqslant 3$ *et* $q \in \{-1, +1\}$. *Supposons que l'hypothèse* 5.1 *est vérifiée. Alors il existe* $0 < T \leqslant T^*$ *indépendant de* $\varepsilon \in]0,1]$ *et une solution* $u^\varepsilon \in$

$L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *de* (5.1)-(5.3) *telle que* $|u^\varepsilon|^2 - c \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$. *De plus on peut écrire* $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i(\phi_{\rm eik}+\phi^\varepsilon)/\varepsilon}$ *où :*

– $\phi_{\rm eik}(t,x) = \alpha(t)\cdot x + \beta(t)$ *avec*

$$\alpha(t) = \alpha - \int_0^t E(\tau)d\tau, \quad \beta(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \alpha(\tau)^2 d\tau.$$

– $a^\varepsilon \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,T];X^\infty(\mathbb{R}^n))$, *et* $|a^\varepsilon|^2 - c \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$.
– $\phi^\varepsilon \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *et* $\nabla\phi^\varepsilon \in C([0,T];X^\infty(\mathbb{R}^n))$.
– *Pour tout* $s>n/2$, *il existe* M_s *tel que, pour tout* $\varepsilon\in]0,1]$,

$$\|a^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];X^s)} + \left\||a^\varepsilon|^2 - c\right\|_{L^\infty([0,T];L^2)} + \|\nabla\phi^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];X^s)} \leqslant M_s.$$

Remarque. (a) Nous ne savons pas prouver un résultat d'unicité pour la solution u^ε lorsque $c=1$. L'existence des solutions est un résultat nouveau dans ce contexte. Les études précédentes (cf [28] et les références qu'il contient) concernent essentiellement le cas $c\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^s(\mathbb{R}^n)$, ce qui permet de considérer des données $u_0^\varepsilon \in H^s(\mathbb{R}^n)$, et l'unicité est alors bien connue (voir [6]). De plus, pour $c\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^\infty(\mathbb{R}^n)$, on montre un résultat plus complet dans [1]. Dans ce cas, on peut traiter le cas de potentiels quadratiques directement (sans utiliser la réduction expliquée au §4.2). Dans cette direction, notons que dans le cas $c\equiv 1$, la contrainte $|u|^2 - c \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est incompatible avec $a^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui contredit les preuves de [21, 22].

(b) La restriction $n\geqslant 3$ provient d'un manque de contrôle des basses fréquences pour l'équation de Poisson (4.5) lorsque $n\leqslant 2$.

(c) Une différence importante avec l'étude de l'équation (2.1) est que l'on n'a pas de restriction ici sur le signe de la charge q.

(d) Les conditions utilisées pour résoudre l'équation de Poisson (4.5) sont similaires à celles données dans [29]. Si de plus $c\in L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut imposer $V_{\rm p}^\varepsilon(t,x)\to 0$ quand $|x|\to\infty$ (à la place de $V(t,0)=0$, comme dans [28] par exemple).

Schéma de la démonstration. On construit a^ε et ϕ^ε comme limites des solutions d'équations régularisées où l'on tronque les hautes fréquences $|\xi|\geqslant 1/h$ dans les non-linéarités et les basses fréquences $|\xi|\leqslant h$ dans l'équation de Poisson. Pour cela, on considère une fonction $\jmath\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$0\leqslant \jmath\leqslant 1, \quad \jmath(\xi)=1 \text{ pour } |\xi|\leqslant 1, \quad \jmath(\xi)=0 \text{ pour } |\xi|\geqslant 2, \quad \jmath(\xi)=\jmath(-\xi).$$

Pour $h\in]0,1]$, on introduit les multiplicateurs de Fourier

$$J_h := \jmath(hD_x), \quad G_h = I - J_{1/h}, \quad R_h := q\Delta^{-1}G_h,$$

qui vérifient

$$\|J_h\|_{H^\sigma\to H^{\sigma+k}} \leqslant Kh^{-k}, \quad \left\|\Delta^{-1}G_h\right\|_{H^\sigma\to H^{\sigma+k}} \leqslant Kh^{-k}.$$

On considère les équations

$$\begin{cases} \partial_t v_h^\varepsilon + J_h\left((v_{\rm eik}+v_h^\varepsilon)\cdot\nabla J_h v_h^\varepsilon\right) + \nabla V_{\rm pert} = -R_h\nabla(|a_h^\varepsilon|^2 - c), & v_h^\varepsilon\Big|_{t=0} = \nabla\phi_0 \\ \partial_t a_h^\varepsilon + J_h\left((v_{\rm eik}+v_h^\varepsilon)\cdot\nabla J_h a_h^\varepsilon\right) + \frac{1}{2}a_h^\varepsilon \operatorname{div} v_h^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta J_h^2 a_h^\varepsilon, & a_h^\varepsilon\Big|_{t=0} = a_0^\varepsilon, \end{cases}$$

où $v_{\rm eik} := \nabla\phi_{\rm eik} = \alpha$ est une fonction du temps uniquement.

En utilisant le fait que J_h et R_h sont des opérateurs régularisants, on peut appliquer le théorème usuel pour les équations différentielles ordinaires et montrer que, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et tout $h \in]0,1]$, il existe $T_h^\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy admet une unique solution $(v_h^\varepsilon, a_h^\varepsilon) \in C^1([0,T_h^\varepsilon]; H^{s+2}(\mathbb{R}^n) \times X^{s+1}(\mathbb{R}^n))$.

L'étude est alors en deux parties. On commence par montrer les estimations uniformes suivantes : Il existe une fonction C telle que, pour tout $(\varepsilon, h) \in [0,1] \times]0,1]$, la norme

$$M_h^\varepsilon(T) := \|a_h^\varepsilon\|_{L_T^\infty X^{s+1}} + \left\||a_h^\varepsilon|^2 - c\right\|_{L_T^\infty L^2} + \|v_h^\varepsilon\|_{L_T^\infty X^{s+2}},$$

vérifie

$$M_h^\varepsilon(T) \leqslant M_h^\varepsilon(0) e^{TC(M_h^\varepsilon(T))}, \quad \forall T \in [0, T_h^{\varepsilon *}],$$

où l'on a estimé les normes L^∞ en utilisant

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad \|v\|_{L^\infty} \leqslant K \|\nabla v\|_{H^{s-1}},$$

$$\forall \varphi \in X^s(\mathbb{R}^n), \quad \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \leqslant K \left\||\varphi|^2 - c\right\|_{L^2} + K\|\nabla\varphi\|_{H^{s-1}}^2 + K\|c\|_{X^s},$$

pour une constante K qui ne dépend que de s.

Les estimations précédentes montrent que $\nabla W_h^\varepsilon := R_h \nabla \left(|a_h^\varepsilon|^2 - c\right)$ est bornée dans
$C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$, ce qui implique que W_h^ε, $\partial_t v_h^\varepsilon$ et $\partial_t a_h^\varepsilon$ sont bornées dans $C([0,T]; X^{s-1}(\mathbb{R}^n))$. On en déduit que ces suites convergent quand h tend vers 0 vers des limites notées W^ε, a^ε et v^ε. De plus $\operatorname{curl} W^\varepsilon = 0$ et donc W^ε est le gradient d'une distribution notée $V_{\mathrm{p}}^\varepsilon$. Pour démontrer que $(v^\varepsilon, a^\varepsilon)$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + (v_{\mathrm{eik}} + v^\varepsilon) \cdot \nabla v^\varepsilon + \nabla V_{\mathrm{pert}} + \nabla V_{\mathrm{p}}^\varepsilon = 0, \\ \partial_t a^\varepsilon + (v_{\mathrm{eik}} + v^\varepsilon) \cdot \nabla a^\varepsilon + \dfrac{1}{2} a^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon = i\dfrac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\ \Delta V_{\mathrm{p}}^\varepsilon = q\Big(|a^\varepsilon|^2 - c\Big), \end{cases} \tag{5.4}$$

on montre que $\Delta V_{\mathrm{p}}^\varepsilon - q\left(|a^\varepsilon|^2 - c\right) = 0$ en prouvant que c'est une fonction du temps uniquement qui appartient à $L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ (le lemme de Fatou implique que $|a^\varepsilon|^2 - c \in L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$). Enfin, on prouve que $(v_h^\varepsilon - v^\varepsilon, a_h^\varepsilon - a^\varepsilon)$ (et pas seulement une sous-suite) converge vers 0 dans $L^\infty([0,T]; X^{s+2}(\mathbb{R}^n) \times X^{s+1}(\mathbb{R}^n))$. Il reste à utiliser le fait que v^ε est un gradient pour définir la phase ϕ^ε, et à montrer que le gradient de $V_{\mathrm{p}}^\varepsilon$ est nul à l'infini en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue. □

La démonstration du théorème précédent permet de construire une solution pour le système limite

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + \nabla\phi_{\mathrm{eik}} \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V_{\mathrm{pert}} + V_{\mathrm{p}} = 0 \ ; \ \phi\Big|_{t=0} = \phi_0. \\ \partial_t a + \nabla\left(\phi + \phi_{\mathrm{eik}}\right) \cdot \nabla a + \frac{1}{2} a \Delta\phi = 0 \ ; \ a\Big|_{t=0} = a_0. \\ \Delta V_{\mathrm{p}} = q\Big(|a|^2 - c\Big) \quad ; \quad \nabla V_{\mathrm{p}}(t,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ V_{\mathrm{p}}(t,0) = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

On montre que l'erreur $(w_v^\varepsilon, w_{a^\varepsilon}) := \Big(\nabla\phi^\varepsilon - \nabla\phi \,,\, a^\varepsilon - a\Big)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\|w_v^\varepsilon(t)\|_{X^{s+1}}^2 + \|w_a^\varepsilon(t)\|_{H^s}^2\Big) \lesssim \|w_v^\varepsilon(t)\|_{X^{s+1}}^2 + \|w_a^\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \\ + \varepsilon\|\Delta a^\varepsilon\|_{H^s}\|w_a^\varepsilon(t)\|_{H^s} + \|\nabla\left(V_{\mathrm{p}}^\varepsilon - V_{\mathrm{p}}\right)\|_{X^{s+1}}\|w_v^\varepsilon(t)\|_{X^{s+1}}. \end{aligned}$$

L'injection de Sobolev et la condition à l'infini garantissent alors que

$$\|\nabla\left(V_{\rm p}^\varepsilon - V_{\rm p}\right)\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \lesssim \|w_a^\varepsilon\|_{H^s},$$

ce qui permet de montrer

$$\frac{d}{dt}\left(\|w_v^\varepsilon(t)\|^2_{X^{s+1}} + \|w_a^\varepsilon(t)\|^2_{H^s}\right) \lesssim \|w_v^\varepsilon(t)\|^2_{X^{s+1}} + \|w_a^\varepsilon(t)\|^2_{H^s} + \varepsilon\|w_a^\varepsilon(t)\|_{H^s}.$$

Par hypothèse $\|w_v^\varepsilon(0)\|_{X^{s+1}} + \|w_a^\varepsilon(0)\|_{H^s} = \|r^\varepsilon\|_{H^s} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, et le lemme de Gronwall donne

$$\|w_v^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];X^{s+1})} + \|w_a^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];H^s)} \lesssim \varepsilon + \|r^\varepsilon\|_{H^s}.$$

On peut en déduire la convergence forte des observables quadratiques.

Théorème 5.3. *Sous l'hypothèse* 5.1*, il existe une solution régulière* (a,ϕ) *de* (5.5) *telle que* $(a,\nabla\phi) \in C([0,T];X^\infty(\mathbb{R}^n))$*,* $|a|^2 - c \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$ *et*

$$\|a^\varepsilon - a\|_{L^\infty([0,T];H^s)} + \|\nabla(\phi^\varepsilon - \phi)\|_{L^\infty([0,T];X^s)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall s > n/2.$$

De plus, la densité et le moment convergent fortement :

$$|u^\varepsilon|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} |a|^2 \quad \text{dans } L^\infty([0,T];H^s(\mathbb{R}^n)), \text{ et}$$

$$\varepsilon\,\mathrm{Im}\left(\overline{u^\varepsilon e^{-i\phi_{\rm eik}/\varepsilon}}\nabla\left(u^\varepsilon e^{-i\phi_{\rm eik}/\varepsilon}\right)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} |a|^2\nabla\phi \text{ dans } L^\infty([0,T];X^s(\mathbb{R}^n)),\ \forall s > n/2.$$

Remarque. Un résultat similaire est établi par P. Zhang [28], pour $V_{\rm ext} = 0 = \alpha$ lorsque, de plus, $c \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Cependant, dans [28], la convergence est prouvée au sens plus faible des mesures, via une approche différente basée sur les mesures de Wigner. De plus, pour $c \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\infty(\mathbb{R}^n)$, dans [1], on obtient un résultat plus fort, suivant les méthodes de [19, 4].

Références

[1] T.Alazard & R. Carles – « Semi-classical limit of Schrödinger-Poisson equations in space dimension $n \geqslant 3$ », prépublication 2006.

[2] S. Benzoni–Gavage, R. Danchin & S. Descombes – « Well-posedness of one-dimensional Korteweg models », *Electronic J. of Differential Equations*, à paraître.

[3] R. Carles – « Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications », *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), no. 4, p. 823-843.

[4] ______, « WKB analysis for nonlinear Schrödinger equations with potential », *Comm. Math. Phys.* (2006), à paraître.

[5] ______, « Geometric optics and instability for semi-classical Schrödinger equations », *Arch. Ration. Mech. Anal.* (2006), à paraître.

[6] F. Castella – « L^2 solutions to the Schrödinger-Poisson system : existence, uniqueness, time behaviour, and smoothing effects », *Math. Models Methods Appl. Sci.* **7** (1997), p. 1051–1083.

[7] T. Cazenave & F. Weissler – « Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation », *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), p. 75–100.

[8] J.-Y. Chemin – « Dynamique des gaz à masse totale finie », *Asymptotic Anal.* **3** (1990), no. 3, p. 215–220.

[9] C. Cheverry – « Cascade of phases in turbulent flows », *Bull. Soc. Math. France* (2006), à paraître.

[10] C. Cheverry & O. Guès – « Counter-examples to the concentration-cancellation property », prépublication 2005.

[11] J. Dereziński & C. Gérard – *Scattering theory of quantum and classical N-particle systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[12] J. J. Duistermaat – « Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 207–281.

[13] E. Dumas – « About nonlinear geometric optics », prépublication 2005, à paraître.

[14] C. Gallo – « Schrödinger group on Zhidkov spaces », *Adv. Differential Equations* **9** (2004), no. 5-6, p. 509–538.

[15] P. Gérard – « Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire », in *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993*, École Polytech., Palaiseau, 1993, p. Exp. No. XIII, 13.

[16] ______, « The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* (2006), à paraître.

[17] J. Ginibre & G. Velo – « On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction », *Math. Z.* **170** (1980), no. 2, p. 109–136.

[18] L. Gosse & N. J. Mauser – « Multiphase semiclassical approximation of an electron in a one-dimensional crystalline lattice. III. From ab initio models to WKB for Schrödinger-Poisson », *J. Comput. Phys.* **211** (2006), no. 1, p. 326–346.

[19] E. Grenier – « Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time », *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), no. 2, p. 523–530.

[20] L. Landau & E. Lifschitz – *Physique théorique ("Landau-Lifchitz"). Tome III : Mécanique quantique. Théorie non relativiste*, Éditions Mir, Moscow, 1967, Deuxième édition, Traduit du russe par Édouard Gloukhian.

[21] H. Li & C.-K. Lin – « Semiclassical limit and well-posedness of nonlinear Schrödinger-Poisson systems », *Electron. J. Differential Equations* (2003), No. 93, 17 pp.

[22] H. Liu & E. Tadmor – « Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger-Poisson equation with subcritical initial data », *Methods Appl. Anal.* **9** (2002), no. 4, p. 517–531.

[23] T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima – « Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible », *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986), no. 2, p. 249–257.

[24] P. A. Markowich, C. A. Ringhofer & C. Schmeiser – *Semiconductors equations*, Springer-Verlag, Wien, 1990.

[25] G. Métivier – « Exemples d'instabilités pour des équations d'ondes non linéaires (d'après G. Lebeau) », Astérisque (2004), no. 294, vii, 63–75.

[26] T. C. Sideris – « Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids », *Comm. Math. Phys.* **101** (1985), no. 4, p. 475–485.

[27] T. C. Sideris, B. Thomases & D. Wang – « Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping », *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), no. 7–8, p. 795–816.

[28] P. Zhang – « Wigner measure and the semiclassical limit of Schrödinger-Poisson equations », *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2002), no. 3, p. 700–718.

[29] P. Zhang, Y. Zheng & N. J. Mauser – « The limit from the Schrödinger-Poisson to the Vlasov-Poisson equations with general data in one dimension », *Comm. Pure Appl. Math.* **55** (2002), no. 5, p. 582–632.

[30] P. E. Zhidkov – « The Cauchy problem for a nonlinear Schrödinger equation », *JINR Commun., P5-87-373, Dubna* (1987), (en russe).

[31] ———, *Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1756, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

IMB, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France