CONFLUENTES
MATHEMATICI

B. DACORONA

Sur un problème non linéaire pour la divergence et le déterminant

Tome 7, nº 2 (2015), p. 49-55.

<http://cml.cedram.org/item?id=CML_2015__7_2_49_0>

Confluentes Math.
7, 2 (2015) 49-55

SUR UN PROBLÈME NON LINÉAIRE POUR LA DIVERGENCE ET LE DÉTERMINANT

B. DACOROGNA

Abstract. On étudie dans cet article, dédié à Denis Serre pour ses soixante ans, les problèmes

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi, \nabla\varphi) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On montre que sous des hypothèses appropriées les deux problèmes sont résolubles sans conditions intégrales.

1. Introduction

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier et $f = f(x, y, z)$. On va étudier les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f(x, u(x), \nabla u(x)) & x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est évident que si la fonction f ne dépend que de x, le premier problème est résoluble (si et) seulement si

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \operatorname{div} u_0$$

et le second (si et) seulement si

$$\int_\Omega f = \operatorname{mes} \Omega.$$

Par contre dès que f dépend aussi de (y, z), dans de nombreux cas (cf. Théorème 4.1 pour le premier cas et Théorème 5.1 pour le second) les conditions intégrales ne sont plus nécessaires. Ce phénomène apparaît déjà dans le premier cas même si f est linéaire en la variable y et sans dépendance en z (cf. Théorème 3.1) comme étudié par Csato-Dacorogna [3].

2. Notations et hypothèses

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$. On dénotera par

$$f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \in \mathbb{R}^n$$

et idem pour $f_z \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Voici les hypothèses que nous utiliserons dans cet article.

(i) On va noter, pour $u \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$,

$$f[u] = f[u](x) = f(x, u(x), \nabla u(x))$$

et de même pour $f_y[u]$ et $f_z[u]$ à savoir

$$f_y[u](x) = f_y(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{et} \quad f_z[u](x) = f_z(x, u(x), \nabla u(x)).$$

Math. classification: 58-02, 35F50, 58A10.

(ii) On aura toujours que $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 0$ sont des entiers, $0 < \overline{s} \leqslant s < 1$, $u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$.

(iii) On supposera, entre autres, que $f \in C^{r,s}\left(\overline{V}\right)$ où

$$V = \Omega \times B^n \times B^{n\times n}$$

et B^m est la boule unité de $\mathbb{R}^m$ et on supposera de plus qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\|f_y\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} + \|f_z\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} \leqslant \lambda.$$

Si $r = 0$, il faut remplacer l'hypothèse précédente par

$$\|f_y\|_{C^{1,1}\left(\overline{V}\right)} + \|f_z\|_{C^{1,1}\left(\overline{V}\right)} \leqslant \lambda.$$

(iv) Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera toujours supposé régulier et borné.

3. Le cas de la divergence inhomogène

On commence par discuter le cas linéaire. Voici le théorème (cf. Théorème 3 dans [3]) que nous utiliserons ci-après.

Theorem 3.1. — *Soient*

$$g \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right), \qquad u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right) \qquad \textit{et} \qquad a \in C^{r+4,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$$

tel que

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\left\{\left|\operatorname{rot} a\left(x\right)\right|\right\} \geqslant \delta > 0.$$

Alors il existe $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u + \langle a;u\rangle = g & \textit{dans } \Omega \\ u = u_0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus la correspondance $(g,u_0) \to u$ *peut être choisie linéaire et il existe un* $c = c\left(r,s,\Omega,\|a\|_{C^{r+4,s}},\delta\right)$ *tel que*

$$\|u\|_{C^{r+1,s}} \leqslant c\left(\|g\|_{C^{r,s}} + \|u_0\|_{C^{r+1,s}}\right).$$

Remark 3.2. — (i) Du point de vue de la régularité le théorème est optimal pour g, u_0 et u, mais pas pour a. La régularité optimale devrait être $a \in C^{r,s}$.

(ii) En fait l'hypothèse $\operatorname{rot} a \neq 0$ sur $\partial\Omega$ peut être affaiblie. La condition optimale est que a n'est pas un gradient. Il est en effet établi dans [3] (cf. Théorème 2) que si le domaine est simplement connexe, alors le résultat est vrai (mais sans la régularité optimale sur a, g et u_0) sous la seule hypothèse

$$\operatorname{rot} a\left(x_0\right) \neq 0 \quad \text{pour un certain } x_0 \in \Omega.$$

(iii) Dans [3] (cf. Théorème 5), il est aussi montré que si $g \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$ $u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ et $a \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ est tel que

$$\operatorname{rot} a \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \quad \text{mais} \quad \nexists\, A \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ avec } a = \operatorname{grad} A$$

(ce qui implique que le domaine Ω n'est pas simplement connexe), alors il existe $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ satisfaisant toutes les conclusions du théorème ci-dessus.

(iv) Soient

$$X = \left\{u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right) : u|_{\partial\Omega} = u_0\right\}, \quad Y = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$$

et L l'opérateur qui à $u \in X$ associe $g \in Y$ tel que

$$\operatorname{div} u + \langle a;u\rangle = g.$$

La construction du théorème montre qu'il existe un opérateur linéaire $L^{-1} : Y \to X$ qui associe à tout $g \in Y$ un unique $u \in X$ tel que $Lu = g$. En conclusion, même si le problème considéré dans le théorème a une infinité de solutions, le processus de construction est linéaire et choisit un unique élément.

4. Le cas de la divergence non linéaire

On va supposer pour ce cas qu'en outre

$$\|f_y[u_0]\|_{C^{r+4,s}(\overline{V})} \leqslant \mu,\ \ f_z[u_0] \equiv 0 \text{ et } \inf_{x\in\partial\Omega}\{|\mathrm{rot}\,[f_y[u_0]](x)|\} \geqslant \delta > 0. \tag{4.1}$$

Par la suite on dénotera une norme $\|u\|_{C^{a,b}(\overline{\Omega})}$ par seulement $\|u\|_{C^{a,b}}$.

Theorem 4.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $\epsilon = \epsilon(r,s,\Omega,\delta,\lambda,\mu) > 0$ tel que si*

$$\|\mathrm{div}\,u_0 - f[u_0]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

alors il existe $u \in C^{r+1,s}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,u = f[u] & \textit{dans } \Omega \\ u = u_0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et de plus il existe $c = c(r,s,\Omega,\delta,\lambda,\mu) > 0$ tel que

$$\|u - u_0\|_{C^{r+1,s}} \leqslant c\,\|\mathrm{div}\,u_0 - f[u_0]\|_{C^{r,s}} .$$

Remark 4.2. — (i) Il faut faire attention à l'interprétation du résultat (cf. Exemple 5.4). En effet le problème de l'estimation

$$\|\mathrm{div}\,u_0 - f[u_0]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

est qu'elle fait apparaître f à gauche et à droite (dans le ϵ). Si par contre (cf. Exemple 5.3)

$$f(x,y,z) = g(x) + h(x,y,z)$$

avec $h[u_0] = 0$, alors la condition devient

$$\|g - \mathrm{div}\,u_0\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

et le ϵ ne dépend pas de g.

(ii) En utilisant la Remarque 3.2 (iii) on peut remplacer les hypothèses (4.1) par $f_z[u_0] \equiv 0$ et

$$\mathrm{rot}\,f_y[u_0] \equiv 0 \quad \text{mais} \quad \nexists\, A \in C^{r+1,s}(\overline{\Omega}) \text{ avec } f_y[u_0] = \mathrm{grad}\,A$$

et obtenir le théorème.

Proof. — Le théorème est démontré en combinant l'estimation linéaire (cf. Théorème 3.1) et un point fixe élémentaire (comme dans [1] ou [2]).

Etape 1. On se ramène d'abord au cas où $u_0 = 0$. On pose $u = v + u_0$, l'équation devient alors

$$\mathrm{div}\,u = \mathrm{div}\,v + \mathrm{div}\,u_0 = f(x, v + u_0, \nabla v + \nabla u_0)$$

Donc si on pose

$$\widetilde{f}(x,y,z) = f(x, y + u_0(x), z + \nabla u_0(x)) - \mathrm{div}\,u_0(x)$$

on a que

$$\mathrm{rot}\left[\widetilde{f}_y[0]\right](x) = \mathrm{rot}\,[f_y[u_0]](x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

et

$$\widetilde{f}_z[0](x) = f_z[u_0](x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

On a ainsi réduit le problème à

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,v = \widetilde{f}[v] & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Etape 2. On pose $q = f - f[0] - \langle f_y[0]; y\rangle$, c'est à dire

$$q(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \langle f_y(x,0,0); y\rangle .$$

Comme $f_z(x,0,0) = 0$, on a que

$$q[0] \equiv 0, \quad q_y[0] \equiv 0 \quad \text{et} \quad q_z[0] \equiv 0. \tag{4.2}$$

Donc le problème devient

$$\begin{cases} \operatorname{div} u - \langle f_y[0]\,;u\rangle = f[0] + q[u] & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore l'équation dans Ω se lit

$$\operatorname{div} u(x) - \langle f_y(x,0,0)\,;u(x)\rangle = f(x,0,0) + q(x,u(x),\nabla u(x)).$$

Etape 3. Soient

$$X_1 = \left\{v \in C^{1,\overline{s}}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \quad X_2 = \left\{v \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

$$Y_1 = C^{0,\overline{s}}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{et} \quad Y_2 = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Observer que l'hypothèse (H_{XY}) du Théorème 18.1 dans [4] est satisfaite. On définit ensuite l'opérateur

$$Lu = \operatorname{div} u - \langle f_y[0]\,;u\rangle.$$

Par le Théorème 3.1 on a que $L : X_2 \to Y_2$ est tel que, pour tout $g \in Y_2$, il existe un unique $v \in X_2$ satisfaisant $Lv = g$ (l'unicité doit être comprise dans le sens de la Remarque 3.2 (iv)) et il existe une constante $c_1 = c_1(r,s,\Omega,\delta,\mu) > 0$ telle que

$$\left\|L^{-1}g\right\|_{X_i} \leqslant c_1 \|g\|_{Y_i} \quad \forall g \in Y_2,\ i = 1,2.$$

L'hypothèse (H_L) du Théorème 18.1 dans [4] est donc vérifiée.

Etape 4. Soit l'opérateur non linéaire

$$Q(u) = q[u]$$

et montrons que Q satisfait l'hypothèse (H_Q) du Théorème 18.1 dans [4]. De façon plus précise on va établir que

$$Q : B = \left\{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leqslant 1\right\} \to Y_2$$

et qu'il existe une constante $c_2 = c_2(r,s,\Omega,\lambda) > 0$ telle que

$$\|Q(u) - Q(v)\|_{Y_1} \leqslant c_2\left(\|u\|_{X_1} + \|v\|_{X_1}\right)\|u - v\|_{X_1} \tag{4.3}$$

$$\|Q(v)\|_{Y_2} \leqslant c_2 \|v\|_{X_1}\ \|v\|_{X_2} \tag{4.4}$$

pour tout $u, v \in B$.

Etape 4.1. Commençons par une étape préliminaire. Noter que, comme $q[0] \equiv 0$ (cf. (4.2)),

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[q(x,ty,tz)\right]dt \\ &= \int_0^1 \left[\langle q_y(x,ty,tz)\,;y\rangle + \langle q_z(x,ty,tz)\,;z\rangle\right]dt \end{aligned}$$

et donc, en se rappelant que $q_y[0] \equiv 0$ et $q_z[0] \equiv 0$ (cf. (4.2)),

$$Q[u] = \int_0^1 \left[\langle q_y[tu] - q_y[0]\,;u\rangle + \langle q_z[tu] - q_z[0]\,;\nabla u\rangle\right]dt.$$

Comme les deux termes vont être estimés de la même façon et que le t et l'intégrale ne jouent aucun rôle dans l'estimation, on va prouver (4.3) et (4.4) pour

$$Q[u] = \langle q_z[u]\,;\nabla u\rangle = \langle q_z[u] - q_z[0]\,;\nabla u\rangle.$$

Par la suite on dénotera par $\gamma_i = \gamma_i(r,s,\Omega,\lambda) > 0$ des constantes.

Etape 4.2. Montrons l'inégalité (4.3). On a que

$$\begin{aligned} Q[v] - Q[w] &= \langle q_z[v]\,;\nabla v\rangle - \langle q_z[w]\,;\nabla w\rangle \\ &= \langle q_z[v] - q_z[w]\,;\nabla v\rangle + \langle q_z[w] - q_z[0]\,;\nabla v - \nabla w\rangle. \end{aligned}$$

Par le Théorème 16.28 dans [4] on trouve

$$\begin{aligned}\|Q[v]-Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \gamma_1 \|q_z[v]-q_z[w]\|_{C^{0,\overline{s}}(\overline{V})} \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \\ + \gamma_1 \|q_z[w]-q_z[0]\|_{C^{0,\overline{s}}(\overline{V})} \|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}} .\end{aligned}$$

On déduit donc, en se rappelant que $\|v\|_{C^{1,\overline{s}}}, \|w\|_{C^{1,\overline{s}}} \leqslant 1$, (cf. Théorème 16.36 dans [4])

$$\|Q[v]-Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \left[\|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} + \|w\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}}\right]$$

et ainsi

$$\|Q[v]-Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \gamma_3 \left[\|v\|_{C^{1,\overline{s}}} + \|w\|_{C^{1,\overline{s}}}\right] \|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}}$$

ce qui est exactement (4.3).

Etape 4.3. Prouvons l'inégalité (4.4). A nouveau par le Théorème 16.28 dans [4]

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leqslant \gamma_1 \left[\|q_z[v]\|_{C^{0}(\overline{V})} \|v\|_{C^{r+1,s}} + \|q_z[v]\|_{C^{r,s}(\overline{V})} \|v\|_{C^1}\right].$$

On distingue alors deux cas.

Cas 1: $r=0$. On obtient alors (cf. Théorème 16.36 dans [4])

$$\|Q[v]\|_{C^{0,s}} \leqslant \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \left[\|v\|_{C^1} \|v\|_{C^{1,s}} + \|v\|_{C^{1,s}} \|v\|_{C^1}\right].$$

qui implique

$$\|Q[v]\|_{C^{0,s}} \leqslant \gamma_3 \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{1,s}}$$

comme souhaité.

Cas 2: $r \geqslant 1$. On a alors (cf. Théorème 16.36 dans [4]) que

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leqslant \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \|v\|_{C^1} \|v\|_{C^{r+1,s}} + \gamma_2 \|q_z\|_{C^{r+1,s}(\overline{V})} \|v\|_{C^{r+1,s}} \|v\|_{C^1} .$$

Ceci nous conduit à

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leqslant \gamma_3 \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{r+1,s}}$$

et donc (4.4) est bien démontrée.

Etape 5. Par le Théorème 18.1 dans [4], on déduit que, pour tout $f \in Y_2 = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfaisant

$$\|f[0]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon = \min\left\{\frac{1}{8c_1^2 c_2}, \frac{1}{2c_1}\right\}$$

alors le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} u - \langle f_y[0]; u\rangle = f[0] + q[u] & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ vérifiant

$$\|u\|_{X_i} \leqslant 2c_1 \|f[0]\|_{Y_i} .$$

Le théorème est donc démontré. □

5. Le cas du déterminant

On suppose maintenant que (id dénote l'application identité, i.e. $\operatorname{id}(x) = x$)

$$\|f_y[\operatorname{id}]\|_{C^{r+4,s}(\overline{V})} \leqslant \mu,\ f_z[\operatorname{id}] \equiv 0 \text{ et } \inf_{x\in\partial\Omega}\{|\operatorname{rot}[f_y[\operatorname{id}]](x)|\} \geqslant \delta > 0. \tag{5.1}$$

Theorem 5.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $\epsilon = \epsilon(r,s,\Omega,\delta,\lambda,\mu) > 0$ tel que si*

$$\|f[\operatorname{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

alors il existe $\varphi \in \operatorname{Diff}^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

et de plus il existe $c = c(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu) > 0$ *tel que*

$$\|\varphi - \mathrm{id}\|_{C^{r+1,s}} \leqslant c \, \|f\,[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{r,s}} \ .$$

Remark 5.2. — (i) Comme déjà indiqué il faut être très prudent dans l'interprétation de l'estimation

$$\|f\,[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

sinon (cf. Exemple 5.4) on arrive à une contradiction. Par contre si f a une structure spéciale (cf. Exemple 5.3), alors le résultat est plus facile à interpréter.

(ii) En utilisant la Remarque 4.2 (ii) on peut remplacer les hypothèses (5.1) par $f_z\,[\mathrm{id}] \equiv 0$ et

$$\mathrm{rot}\, f_y\,[\mathrm{id}] \equiv 0 \quad \text{mais} \quad \nexists A \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ avec } f_y\,[\mathrm{id}] = \mathrm{grad}\, A$$

et obtenir le théorème.

Commençons par un exemple où le théorème s'applique bien.

Example 5.3. — Soit

$$f(x, y, z) = g(x) + h(x, y, z)$$

où

$$\|h_y\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} + \|h_z\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \|h_y\,[\mathrm{id}]\|_{C^{r+4,s}\left(\overline{V}\right)} \leqslant \mu$$

$$h\,[\mathrm{id}] \equiv 0, \quad h_z\,[\mathrm{id}] \equiv 0 \quad \text{et} \quad \inf_{x \in \partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\,[h_y\,[\mathrm{id}]]\,(x)|\} \geqslant \delta > 0.$$

Alors le théorème dit qu'il existe $\epsilon = \epsilon(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu) > 0$ tel que si

$$\|g - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

alors on a une solution. Noter que le membre de gauche est indépendant de (δ, λ, μ). Un exemple encore plus explicite est donné par

$$h(x, y, z) = \langle a(x) ; y - x \rangle + |z - I|^2$$

où $\inf_{x \in \partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\, a(x)|\} \geqslant \delta > 0$.

Voyons maintenant un exemple où il peut y avoir un problème.

Example 5.4. — Soient $f(x, y, z) = a(x)\, b(y)$ où

$$a(x_1, x_2) = 1 + \alpha x_1 \quad \text{et} \quad b(y_1, y_2) = 1 + \alpha y_2 \,.$$

Noter que $f_z \equiv 0$, $f_y = (1 + \alpha x_1)(0, \alpha)$ et donc

$$\mathrm{rot}\, f_y \equiv \alpha^2.$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) = a(x)\, b(\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On sait que pour résoudre ce problème (cf. le théorème classique dans [5]) il faut (et il suffit) que

$$\int_\Omega \frac{dx}{b(x)} = \int_\Omega a(x)\, dx.$$

Toutefois le Théorème 5.1 a l'air de s'appliquer si

$$\|f\,[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} = \|ab - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leqslant \epsilon$$

ce qu'on peut apparemment toujours faire en choisissant α suffisamment petit. Le problème est que le ϵ dépend de $\inf_{\partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\, f_y|\} = \alpha^2$, ce qui fait que le théorème est inapplicable.

Proof. — Notons

$$h(z) = \det(I + z) - (1 + \operatorname{trace}(z))$$

(remarquer que h est surquadratique) et

$$g(x, y, z) = f(x, x + y, I + z) - 1 - h(z).$$

Observer alors que, si $\varphi = \operatorname{id} + u$,

$$\det \nabla\varphi = \det(I + \nabla u) = 1 + \operatorname{div} u + h(\nabla u)$$

et donc l'équation $\det \nabla\varphi = f[\varphi]$ devient

$$\operatorname{div} u = f(x, x + u(x), I + \nabla u(x)) - 1 - h(\nabla u) = g(x, u(x), \nabla u(x)).$$

On peut donc appliquer le Théorème 4.1 avec $f = g$ et $u_0 = 0$ pour obtenir le résultat. $\square$

References

[1] Basterrechea S., thèse EPFL 6693 (2015).

[2] Basterrechea S. et Dacorogna B., Existence of solutions for Jacobian and Hessian equations under smallness assumptions, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **35** (2014), 868-892.

[3] Csató G. et Dacorogna B., A Dirichlet problem involving the divergence operator, à paraître dans *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.*

[4] Csató G., Dacorogna B. et Kneuss O., *The pullback equation for differential forms*, Birkhaüser, 2012.

[5] Dacorogna B. et Moser J., On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **7** (1990), 1–26.

Manuscript received April 2, 2015,
accepted October 27, 2015.

B. DACOROGNA
EPFL
1015 Lausanne, Suisse
bernard.dacorogna@epfl.ch (Corresponding author)