ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Amna Dabaa

Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations de Schrödinger-Poisson sur un domaine borné de $\mathbb{R}^3$

Volume 17, n° 1 (2010), p. 199-232.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2010__17_1_199_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **17**, 199-232 (2010)

Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations de Schrödinger-Poisson sur un domaine borné de $\mathbb{R}^3$

Amna Dabaa

Résumé

Nous étudions le comportement pour les grands temps de l'équation de Schrödinger-Poisson (NLSP) avec un terme de force extérieure supplémentaire et un terme de dissipation d'ordre zéro, la variable d'espace x étant dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$. Nous démontrons que ce comportement est décrit par un attracteur global de dimension de Hausdorff finie pour la topologie forte de $H_0^1(\Omega)$.

1. Introduction

Nous étudions le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini des solutions des équations de Schrödinger-Poisson (NLSP) avec non linéarité cubique en présence d'un terme de force et d'un terme de dissipation, la variable d'espace x étant dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$.
Ce modèle intervient en mécanique quantique pour les très petits dispositifs semi-conducteurs (nous pensons ici aux nanostructures) où la structure quantique doit être prise en compte (cf [10], [7], [11], [8]).
Nous démontrons que ce comportement est décrit par un attracteur qui attire toutes les trajectoires dans $H_0^1(\Omega)$. De plus on montre que notre attracteur est de dimension de Hausdorff finie dans $H_0^1(\Omega)$.
L'équation de Schrödinger-Poisson, appelée aussi équation de Hartree, présentée avec amortissement et force extérieure,

$$\begin{cases} u_t + \gamma u + i\Delta u + iu\phi = f, \\ \pm\Delta\phi = |u|^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

Mots-clés : Équations de Schrödinger, Attracteurs.
Classification math. : 35B41, 35Q55.

avec des conditions aux limites $\phi = u = 0$ sur $\partial\Omega$. L'équation $\pm\Delta\phi = |u|^2$ avec le signe $-$, i.e $-\Delta\phi = |u|^2$ correspond au cas focalisant, avec le signe $+$ correspond au cas défocalisant.

La force extérieure f est supposée dans $L^2(\Omega)$ et $\gamma > 0$ est le paramètre d'amortissement.
L'inconnue $u(t,x)$ est une fonction à valeurs complexes ; dans la suite $u(t) = u(t,.) \in H_0^1(\Omega)$.

Par l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, le potentiel ϕ vérifie $\Delta\phi \in L^3(\Omega)$ et par conséquent $\phi \in W^{2,3}(\Omega)$.

On définit la condition de Cauchy associée à cette équation par

$$u(0) = u_0 \qquad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega).$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal

Théorème 1.1. *Les systèmes dynamiques sur $H_0^1(\Omega)$ définis par (1.1) respectivement dans le cas focalisant ou défocalisant possèdent un attracteur global compact qui est de dimension finie dans $H_0^1(\Omega)$.*

Notre article est alors organisé comme suit.
La section 2 est consacrée à démontrer que $u_0 \longrightarrow u(t)$ définit bien un semi-groupe, i.e. à montrer l'existence d'une solution globale en temps et l'unicité de la solution par rapport à la donnée initiale (cf [3], [9], [6]).
Au passage, nous prouvons la dissipativité du dit semi-groupe, i.e. l'existence d'un borné absorbant (cf [4], [9]).
Dans la section 3, nous démontrons l'existence d'un attracteur global $\mathcal{A}$ pour (NLSP) dans $H_0^1(\Omega)$ (cf [4], [2]).
Dans la section 4, nous démontrons que cet attracteur est de dimension de Hausdorff finie dans $H_0^1(\Omega)$ (cf [5], [12]).

2. Définir un semi-groupe

2.1. Problème de Cauchy

Nous étudions le problème de Cauchy associé à l'équation (1.1), avec x dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$.

Pour u_0 donnée dans $H_0^1(\Omega)$ et $T \geq 0$, on définit $E = \mathbf{C}\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ muni de la norme

$$\|u\|_E = \sup_{[0,T]} ||u(t)||_{H_0^1}.$$

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on peut écrire l'équation (1.1) sous la forme suivante

$$u_t + (\gamma + i\Delta)u = f - iu\phi. \tag{2.1}$$

En intégrant l'équation (2.1) sur [0,t], nous obtenons la formulation "mild" de l'équation

$$u(t) = e^{-tK}u_0 - i\int_0^t e^{-(t-s)K}F(u(s))ds, \tag{2.2}$$

tel que $K = (\gamma + i\Delta)$. En posant $U(t) = e^{-tK}$ et $F(u(s)) = f - iu(s)\phi(s)$, on peut écrire l'équation (1.1) sous la forme suivante

$$u(t) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)F(u(s))ds. \tag{2.3}$$

On pose

$$\psi(u(t)) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)F\left(u(s)\right)ds. \tag{2.4}$$

D'une part le groupe libre e^{-tK} est contractant sur $H_0^1(\Omega)$ (de norme $e^{-\gamma t}$), d'autre part $u \longmapsto F(u)$ est une application localement lipschitzienne sur $H_0^1(\Omega)$ (ce point sera démontré en fin de cette section). Par conséquent, on peut faire un point fixe dans E et construire une solution "mild" (qui est alors une solution faible classique).

Proposition 2.1. *Pour u_0 donné dans $H_0^1(\Omega)$, avec Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, il existe une solution locale $u \in \mathbf{C}\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ où T une fonction décroissante de $||u_0||_{H_0^1}$, et le semi-groupe $S(t) : u_0 \longmapsto u(t)$ est continu sur $H_0^1(\Omega)$.*

La démonstration de la Proposition 2.1 est analogue à celle du Théorème 7.4.1 dans [3].
Pour être complet nous énonçons et démontrons que la non linéarité est une application localement lipschitzienne.

Lemme 2.2. *Soit $u \longmapsto \phi$, ϕ vérifie l'équation suivante*

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi = |u|^2 \\ \phi = 0 \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Alors on a bien, si $||u||_{H_0^1} \leq R$,

$$||\phi||_{H_0^1} \leq cR^2.$$

Démonstration. En utilisant l'injection de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^4$; et l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 &= \mp\int |u|^2\phi \\ &\leq \|\phi\|_{L^2}\|u\|_{L^4}^2 \\ &\leq c\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_{L^2} &\leq c\|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq cR^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3. *Soit $u \longmapsto \phi_u$; $v \longmapsto \phi_v$, deux fonctions qui vérifient les équations suivantes*

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi_u = |u|^2 \\ \phi_u = 0 \qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi_v = |v|^2 \\ \phi_v = 0 \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Alors on a bien

$$||\phi_u - \phi_v||_{L^\infty} \leq cR||u-v||_{H_0^1}.$$

Démonstration. En utilisant les injections de Sobolev $W^{2,3} \hookrightarrow L^\infty$, et $H_0^1 \hookrightarrow L^6$, on a

$$\begin{aligned} ||\phi_u - \phi_v||_{L^\infty} &\leq c||\phi_u - \phi_v||_{W^{2,3}} \\ &\leq c||\Delta(\phi_u - \phi_v)||_{L^3} \\ &\leq c|||u|^2 - |v|^2||_{L^3} \\ &\leq c||u-v||_{L^6}|||u| + |v|||_{L^6} \\ &\leq cR||u-v||_{H_0^1}. \end{aligned}$$

□

En dimension 3, le problème est que $H_0^1(\Omega)$ n'est pas une algèbre. Il faut montrer que $u \mapsto \phi u$ est localement lipschitzienne sur $H_0^1(\Omega)$.

Soient u, v sont dans $H_0^1(\Omega)$, tel que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$.

Alors on a $u, v \in L^6(\Omega)$, ainsi $|u|^2, |v|^2 \in L^3(\Omega)$, et par suite $\phi_u, \phi_v \in W^{2,3}(\Omega)$.

Lemme 2.4. *La fonction $u \mapsto u\phi$ où ϕ définie par $\pm\Delta\phi = |u|^2$ est localement lipschitzienne sur les bornés de $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. En utilisant l'injection de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^6$, on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\|\phi_u u - \phi_v v\|_{H_0^1} &= \|\phi_u u - \phi_u v + \phi_u v - \phi_v v\|_{H_0^1} \\
&= \|\phi_u(u-v) + v(\phi_u - \phi_v)\|_{H_0^1} \\
&\leq \|\phi_u(u-v)\|_{H_0^1} + \|v(\phi_u - \phi_v)\|_{H_0^1} \\
&\leq \|\nabla\left(\phi_u(u-v)\right)\|_{L^2} + \|\nabla\left(v(\phi_u - \phi_v)\right)\|_{L^2} \\
&\leq \|\phi_u \nabla(u-v)\|_{L^2} + \|\nabla\phi_u(u-v)\|_{L^2} + \\
&\qquad \|v\nabla(\phi_u - \phi_v)\|_{L^2} + \|\nabla v(\phi_u - \phi_v)\|_{L^2} \\
&\leq \|\phi_u\|_{L^\infty}\|u-v\|_{H_0^1} + \|\nabla\phi_u\|_{L^3}\|u-v\|_{L^6} \\
&+ \|v\|_{L^6}\|\nabla(\phi_u - \phi_v)\|_{L^3} + \|v\|_{H_0^1}\|\phi_u - \phi_v\|_{L^\infty} \\
&\leq c\|\phi_u\|_{W^{2,3}}\|u-v\|_{H_0^1} + c\|\Delta\phi_u\|_{L^3}\|u-v\|_{H_0^1} \\
&+ c\|v\|_{H_0^1}\|\Delta[\phi_u - \phi_v]\|_{L^3} + cR\|v\|_{H_0^1}\|u-v\|_{H_0^1} \\
&\leq c\|u\|_{H_0^1}^2\|u-v\|_{H_0^1} + cR\|v\|_{H_0^1}\|u-v\|_{H_0^1} \\
&\leq CR^2\|u-v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

□

2.2. **Dissipativité du semi-groupe**

Nous commençons par établir l'existence d'un borné absorbant dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 2.5. *Soit u une solution de (1.1). Alors*

$$\|u\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\gamma^2}\left(1 - e^{-\gamma t}\right).$$

Démonstration. On multiplie la première équation du système (1.1) par $\overline{u}$, et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \gamma\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\gamma}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2\gamma}\|f\|_{L^2}^2+\frac{\gamma}{2}\|u\|_{L^2}^2-\gamma\|u\|_{L^2}^2\\
&\leq \frac{1}{2\gamma}\|f\|_{L^2}^2+\gamma\|u\|_{L^2}^2(\frac{1}{2}-1)\\
&\leq \frac{1}{2\gamma}\|f\|_{L^2}^2-\frac{\gamma}{2}\|u\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{L^2}^2-\gamma\|u\|_{L^2}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2}^2+\frac{\|f\|_{L^2}^2}{\gamma^2}\left(1-e^{-\gamma t}\right). \tag{2.8}$$

□

Nous établissons maintenant une égalité d'énergie

Lemme 2.6. *Soit u une solution de (1.1). Si*

$$\boldsymbol{J}(u)=||\nabla u||_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2+2Im\int f\bar{u},$$

et

$$\boldsymbol{F}(u)=||\nabla u||_{L^2}^2 \pm ||\nabla\phi||_{L^2}^2+Im\int f\bar{u}.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{J}(u)+2\gamma\boldsymbol{F}(u)=0.$$

Démonstration. On multiplie la première équation du système (1.1) par $i(\overline{u_t+\gamma u})$, et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient alors

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u||_{L^2}^2-\gamma||\nabla u||_{L^2}^2 \mp \gamma||\nabla\phi||_{L^2}^2 \mp \\
\frac{1}{4}\frac{d}{dt}||\nabla\phi||_{L^2}^2-\frac{d}{dt}Im\int f\bar{u}-\gamma Im\int f\bar{u}=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(||\nabla u||_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u}\right) + 2\gamma\left(||\nabla u||_{L^2}^2 \pm ||\nabla\phi||_{L^2}^2 + Im\int f\bar{u}\right) = 0.$$

On pose

$$\mathbf{J}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u},$$

et

$$\mathbf{F}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 \pm ||\nabla\phi||_{L^2}^2 + Im\int f\bar{u}.$$

Finalement

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{F}(u) = 0.$$

□

Nous distinguons maintenant les cas focalisant et défocalisant

Cas focalisant $\pm = -$. Les fonctionnelles impliquées dans l'égalité d'énergie s'écrivent alors.

$$\mathbf{J}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u}.$$

$$\mathbf{F}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 - ||\nabla\phi||_{L^2}^2 + Im\int f\bar{u}.$$

Proposition 2.7. *Dans le cas focalisant la solution est globale.*

Démonstration. On va établir une relation entre $\mathbf{J}(u)$ et $\mathbf{F}(u)$,

$$\mathbf{J}(u) - \mathbf{F}(u) \leq \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + ||f||_{L^2}||u||_{L^2}.$$

En multipliant par 2γ, on obtient

$$2\gamma\mathbf{J}(u) - 2\gamma\mathbf{F}(u) \leq \gamma||\nabla\phi||_{L^2}^2 + \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2\right),$$

donc on a

$$-2\gamma\mathbf{F}(u) \leq -2\gamma\mathbf{J}(u) + \gamma||\nabla\phi||_{L^2}^2 + \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2\right),$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) \leq -2\gamma\mathbf{J}(u) + \gamma||\nabla\phi||_{L^2}^2 + \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2\right). \qquad (2.9)$$

Il faut estimer $\nabla\phi$, $\nabla\phi_0$ en norme L^2, afin de contrôler le membre de droite de (2.9).

On a
$$\Delta\phi = -|u|^2,$$
$||\Delta\phi||_{L^1} = \|u\|_{L^2}^2 \leq L,$ où $L = \max\left(||u_0||_{L^2}^2, \frac{||f||_{L^2}^2}{\gamma^2}\right).$

Par l'injection de Sobolev
$$W^{1,1} \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}},$$
on a
$$||\nabla\phi||_{L^{\frac{3}{2}}} \leq c\|u\|_{L^2}^2 \leq cL;$$
et par l'injection de Sobolev
$$W^{1,\frac{3}{2}} \hookrightarrow L^3,$$
on a
$$||\phi\|_{L^3} \leq c\|u\|_{L^2}^2 \leq cL;$$
d'où
$$\int \phi\Delta\phi = \pm \int \phi|u|^2,$$
$$\int |\nabla\phi|^2 = \mp \int \phi|u|^2;$$
ainsi
$$\begin{aligned}
\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 &\leq c\|\phi\|_{L^3}\|u\|_{L^3}^2 \\
&\leq cL\|u\|_{L^3}^2 \\
&\leq cL\|u\|_{L^2}\|u\|_{L^6} \\
&\leq cL^{\frac{3}{2}}\|u\|_{L^6} \\
&\leq cL^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$
D'autre part
$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(u) &= ||\nabla u||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u} \\
&\geq ||\nabla u||_{L^2}^2 - \frac{cL^{\frac{3}{2}}}{2}\|\nabla u\|_{L^2} + 2Im\int f\bar{u};
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Young, on a

$$\frac{cL^{\frac{3}{2}}}{2}\|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{c^2 L^3}{4},$$

on en déduit que

$$\mathbf{J}(u) \geq \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 - \frac{c^2 L^3}{4} + 2Im\int f\bar{u}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) &\leq \gamma||\nabla\phi||_{L^2}^2 + \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + L\right)\\ &\leq \gamma cL^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{L^2} + \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + L\right)\\ &\leq \gamma\mathbf{J}(u) + M_3(L).\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + \gamma\mathbf{J}(u) \leq M_3(L).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbf{J}(u) \leq \mathbf{J}(u_0)e^{-\gamma t} + \frac{M_3(L)}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}). \tag{2.10}$$

Remarque 2.8.

$$J(u_0) = ||\nabla u_0||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}||\nabla\phi_0||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u}_0 \leq ||\nabla u_0||_{L^2}^2 + 2||f||_{L^2}||u_0||_{L^2}.$$

D'après cette remarque on en déduit que $\mathbf{J}(u)$ est borné. De plus

$$||\nabla u||_{L^2}^2 \leq \mathbf{J}(u) + \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{c^2}{8}L^3 + ||f||_{L^2}^2 + L.$$

On déduit que

$$||\nabla u||_{L^2}^2 \leq 2\mathbf{J}(u) + \frac{c^2}{4}L^3 + 2||f||_{L^2}^2 + 2L.$$

Ce qui donne la solution est globale. □

Cas défocalisant $\pm = +$. Dans ce cas les fonctionnelles impliquées dans l'égalité d'énergie s'écrivent alors.

$$\mathbf{J}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\bar{u}.$$

$$\mathbf{F}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 + ||\nabla\phi||_{L^2}^2 + Im\int f\bar{u}.$$

Proposition 2.9. *Dans le cas défocalisant la solution est globale.*

Démonstration. On a

$$\mathbf{F}(u) \geq \mathbf{J}(u) - Im\int f\bar{u}$$

en multipliant par -2γ, on obtient

$$-2\gamma\mathbf{F}(u) \leq -2\gamma\mathbf{J}(u) + 2\gamma Im\int f\bar{u}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{F}(u) = 0. \tag{2.11}$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) \leq \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2\right). \tag{2.12}$$

En utilisant l'équation (2.8) on déduit de (2.12)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) \leq \gamma\left(||f||_{L^2}^2 + L\right) = M_4(L).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbf{J}(u) \leq \mathbf{J}(u_0)e^{-2\gamma t} + \frac{M_4(L)}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}). \tag{2.13}$$

D'après l'estimation de $\nabla\phi$, $\nabla\phi_0$ en norme L^2 qui est identique au cas focalisant, on trouve que $\mathbf{J}(u)$ est borné. De plus

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq M(f, \gamma).$$

Ce qui donne la solution est globale. □

2.3. Existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}_0$ dans $H_0^1(\Omega)$

Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Il existe un sous ensemble borné $\mathcal{B}_0$ satisfaisant*

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0, \quad t \geq 0,$$

et tel que, pour tout ensemble borné $\mathcal{B}$ de $H_0^1(\Omega)$, il existe $t_0(\mathcal{B}) > 0$ tel que

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0, \quad t \geq t_0(\mathcal{B}).$$

Démonstration. On a vérifié dans les Propositions 2.7 et 2.9 que

$$\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq e^{-2\gamma t}\mathbf{J}(u_0) + N(L),$$

tel que $N(L)$ une constante qui depend de γ, f et qui change d'un cas à l'autre.

Donc

$$\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \tilde{N}(\gamma, f) \qquad \forall t \geq t_0,$$

où

$$t_0 = \frac{1}{\gamma} \log \frac{\mathbf{J}(u_0)}{N(L)}.$$

□

Remarque 2.11. Il est alors classique d'obtenir un contrôle pour u_t en norme H^{-1} en se reportant à l'équation. Ce contrôle s'écrit pour $t \geq t_0$, on a

$$\|u_t\|_{H^{-1}}^2 \leq \tilde{N}'(\gamma, f).$$

3. Existence de l'attracteur $\mathcal{A}$

On commence par donner la définition d'un attracteur (cf [12]).

Définition 3.1. On appelle un attracteur global du système dynamique $(S(t))_{t\geq 0}$, un ensemble $\mathcal{A}$ de H_0^1 qui vérifie les propriétés suivantes

(1) $\mathcal{A}$ est compact dans H_0^1,
(2) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$ (propriété d'invariance),
(3) Pour tout borné $\mathcal{B}$ de H_0^1,

$$dist\,(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup_{b\in\mathcal{B}} \inf_{a\in\mathcal{A}} ||S(t)b - a||_{H_0^1} \to 0,$$

quand t tend vers $+\infty$.

On va vérifier tout d'abord la continuité faible de $S(t)$.

Lemme 3.2. *Le semi-groupe $S(t)$ est continu sur les bornés de $H_0^1(\Omega)$ pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Soient u et v deux solutions de l'équation (1.1) avec u_0, v_0 dans $H_0^1(\Omega)$, telles que $u(t) = S(t)u_0,\ \ v(t) = S(t)v_0$.
On veut montrer que si

$$u_0 \longrightarrow v_0 \text{ dans } L^2 \quad \textit{alors} \;\; u(t) = S(t)u_0 \longrightarrow v(t) = S(t)v_0 \;\text{ dans } L^2.$$

En utilisant la formulation intégrale on obtient

$$\begin{aligned}
&||u(t) - v(t)||_{L^2} \\
&\qquad \le ||U(t)(u_0 - v_0)||_{L^2} + \int_0^t ||U(t-s)[u(s)\phi_u(s) - v(s)\phi_v(s)]||_{L^2} ds \\
&\qquad \le ||u_0 - v_0||_{L^2} + \underbrace{\int_0^t ||u(s)\phi_u(s) - v(s)\phi_v(s)||_{L^2} ds}_{A(t)} .
\end{aligned}$$

En utilisant les injections continues $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, $W^{2,1} \hookrightarrow L^3$, et $H_0^1 \hookrightarrow L^6$, il vient alors

$$\begin{aligned}
A(t) &\le \int_0^t ||u(s) - v(s)||_{L^2} ||\phi_u(s)||_{L^\infty} ds + \\
&\qquad\qquad \int_0^t ||v(s)||_{L^6} ||\phi_u(s) - \phi_v(s)||_{L^3} ds \\
&\le \int_0^t ||u(s) - v(s)||_{L^2} ||\Delta^{-1}(|u(s)|^2)||_{L^\infty} ds + \\
&\qquad\qquad \int_0^t ||v(s)||_{L^6} ||\Delta^{-1}[|u(s)|^2 - |v(s)|^2]||_{L^3} ds \\
&\le c \int_0^t ||u(s) - v(s)||_{L^2} ||\Delta^{-1}(|u(s)|^2)||_{H^2} ds + \\
&\qquad\qquad c \int_0^t ||v(s)||_{L^6} ||\Delta^{-1}[|u(s)|^2 - |v(s)|^2]||_{W^{2,1}} ds \\
&\le c \int_0^t ||u(s) - v(s)||_{L^2} |||u(s)|^2||_{L^2} ds + \\
&\qquad\qquad c \int_0^t ||v(s)||_{L^6} |||u(s)|^2 - |v(s)|^2||_{L^1} ds;
\end{aligned}$$

d'une part

$$\begin{aligned}\int_0^t ||v(s)||_{L^6}||&|u(s)|^2-|v(s)|^2||_{L^1}ds\\ &\leq \int_0^t ||v(s)||_{L^6}||u(s)-v(s)||_{L^2}||u(s)+v(s)||_{L^2}ds\\ &\leq cR\int_0^t ||v(s)||_{H_0^1}||u(s)-v(s)||_{L^2}ds\\ &\leq cR^2\int_0^t ||(u-v)(s)||_{L^2}ds.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^t ||u(s)-v(s)||_{L^2}|||u(s)|^2||_{L^2}ds &\leq c\int_0^t ||u(s)-v(s)||_{L^2}||u(s)||_{L^4}^2ds\\ &\leq c\int_0^t ||u(s)-v(s)||_{L^2}||u(s)||_{H_0^1}^2ds\\ &\leq cR^2\int_0^t ||(u-v)(s)||_{L^2}.\end{aligned}$$

On obtient

$$A(t) \leq cR^2\int_0^t ||(u-v)(s)||_{L^2}ds.$$

Il en résulte

$$||u(t)-v(t)||_{L^2}\leq ||u_0-v_0||_{L^2}+cR^2\int_0^t ||(u-v)(s)||_{L^2}ds.$$

On pose $Q(t)=\displaystyle\int_0^t ||(u-v)(s)||_{L^2}ds$, alors elle vérifie

$$\frac{d}{dt}Q(t)\leq ||u_0-v_0||_{L^2}+cR^2Q(t),$$

il vient alors

$$\frac{d}{dt}\left[Q(t)e^{-cR^2t}\right]\leq e^{-cR^2t}||u_0-v_0||_{L^2},$$

en intégrant sur $[0,t]$, on a

$$Q(t)e^{-cR^2t}-\underbrace{Q(0)}_{=0}\leq ||u_0-v_0||_{L^2}\left[\frac{e^{-cR^2t}-1}{-cR^2}\right],$$

puis
$$Q(t)e^{-cR^2t} \leq \frac{||u_0 - v_0||_{L^2}}{cR^2}(1 - e^{-cR^2t}),$$
et par suite
$$Q(t) \leq \frac{||u_0 - v_0||_{L^2}}{cR^2}(e^{cR^2t} - 1).$$
On déduit
$$||u(t) - v(t)||_{L^2} \leq ||u_0 - v_0||_{L^2}\left(1 + K(e^{cR^2t} - 1)\right).$$
D'où le résultat voulu. □

Proposition 3.3. *Le semi-groupe $S(t)$ est faiblement continu sur H_0^1.*

Démonstration. Soit u_n une suite dans H_0^1 telle que
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement} \quad \text{dans } H_0^1.$$
En utilisant l'injection compacte
$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad n = 3,$$
on obtient qu'il existe une sous-suite $u_{n'}$ telle que
$$u_{n'} \to u, \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$
D'après la continuité forte de $S(t)$ sur L^2 obtenue au Lemme 3.2, on obtient
$$S(t)u_{n'} \to S(t)u \quad \text{fortement} \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.1}$$
Comme $u_{n'}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et d'après la continuité forte de $S(t)$ sur $H_0^1(\Omega)$
$$S(t)u_{n'} \quad \text{est} \quad \text{borné dans } H_0^1(\Omega).$$
Ce qui donne
$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup v \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega).$$
D'où $S(t)u_{n'}$ a une unique valeur d'adhérence dans H_0^1 faible, donc
$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup v \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega).$$
En utilisant l'injection compacte
$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad si\ n = 3.$$
On obtient
$$S(t)u_{n'} \to v \quad \text{fortement} \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.2}$$
De (3.1), (3.2), et par l'unicité de la limite, on obtient
$$v = S(t)u,$$

et par suite

$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup S(t)u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

$\square$

On rappelle ensuite la définition d'un ensemble $\omega - limite$.

Définition 3.4. Ensemble ω-limite

$$\begin{aligned} \omega(E) &= \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)X} \\ &= \{a \in E; \exists t_n \to +\infty \ et \ b_n \in X; S(t_n)b_n \to a\}, \end{aligned}$$

avec E est un espace de Banach, X est une partie de E.

Proposition 3.5. *On considère l'ensemble*

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}_0}$$

où l'adhérence est prise par rapport à la topologie faible de H_0^1, $\omega(\mathcal{B}_0)$ vérifie les propriétés suivantes :

(1) *$\omega(\mathcal{B}_0)$ est un ensemble non vide, fermé et compact pour la topologie faible de H_0^1,*
(2) *$\omega(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0$,*
(3) *$S(t)\omega(\mathcal{B}_0) = \omega(\mathcal{B}_0) \quad \forall t \geq 0$.*
(4) *Pour tout borné $\mathcal{B}$ de $H_0^1(\Omega)$*

$$\lim_{t\to+\infty} dist\,(S(t)\mathcal{B}, \omega(\mathcal{B}_0)) = 0.$$

Démonstration. (1) $\omega(\mathcal{B}_0) \neq \emptyset$, et il est clair que $\omega(\mathcal{B}_0)$ est une intersection décroissantes d'ensembles fermés et compacts pour la topologie faible de H_0^1, donc c'est un fermé compact faible.

(2) Comme

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq t_0(\mathcal{B}_0)} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}_0}$$

et puisque $\mathcal{B}_0$ est un borné absorbant de H_0^1 alors,

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0,$$

ce qui donne

$$\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}_0} \subset \overline{\mathcal{B}_0} = \mathcal{B}_0,$$

et par suite

$$\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}_0} \subset \mathcal{B}_0,$$

il vient alors

$$\omega(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0.$$

(3) Soit $a \in S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$, donc il s'écrit comme suit

$$a = S(t)b, \quad b \in \omega(\mathcal{B}_0); \tag{3.3}$$

par définition d'un ensemble ω-limite

$$\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty,\ b_n \in \mathcal{B}_0,$$

tel que $S(t_n)b_n \rightharpoonup b$ faiblement dans H_0^1.

D'après la continuité faible de $S(t)$ sur H_0^1 on déduit que

$S(t_n + t)b_n = S(t)S(t_n)b_n \rightharpoonup S(t)b$ faiblement dans H_0^1.

En utilisant (3.3), on déduit que

$$S(t_n+t)b_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } \omega(\mathcal{B}_0),$$

ce qui donne $a \in \omega(\mathcal{B}_0)$; on obtient par conséquent

$$S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0). \tag{3.4}$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, on prend $\tilde{b} \in \omega(\mathcal{B}_0)$, donc par définition d'un ensemble ω-limite, on trouve que

$$\exists t_n \to +\infty,\ et\ \tilde{b_n} \in \mathcal{B}_0$$

tel que

$$S(t_n)\tilde{b_n} \rightharpoonup \tilde{b} \quad \text{faiblement dans } H_0^1. \tag{3.5}$$

On note $\mathcal{B}_1 = (\tilde{b_n})_{n\geq 0}$; $\mathcal{B}_1$ un borné de $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\exists T_1(\mathcal{B}_1);\ S(t)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \quad \forall\, t \geq T_1(\mathcal{B}_1),$$

et pour $t \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_n - t > T_1(\mathcal{B}_1) \quad \forall n \geq n_0$.

Il est clair que

$$S(t_n - t)\tilde{b_n} \in \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}_0}.$$

Il vient alors

$$S(t_n - t)\tilde{b_n} \rightharpoonup a \in \ \omega(\mathcal{B}_0) \quad \text{faiblement} \ \ \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

D'après la continuité faible de $S(t)$ sur $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$S(t_n)\tilde{b_n} \rightharpoonup S(t)a \quad \text{faiblement} \ \ \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

D'après (3.5), (3.6), et par l'unicité de la limite , on déduit que

$$S(t)a = \tilde{b}, \quad a \in \omega(\mathcal{B}_0).$$

Finalement

$$\omega(\mathcal{B}_0) \subset S(t)\omega(\mathcal{B}_0). \tag{3.7}$$

De (3.4), (3.7), on obtient

$$\omega(\mathcal{B}_0) = S(t)\omega(\mathcal{B}_0).$$

(4) On va montrer cette propriété par l'absurde comme suit ; on suppose qu'il existe $\delta > 0$, $t_n \to +\infty$, et ; $\mathcal{B}_1$ un borné de $H_0^1(\Omega)$, tel que

$$dist\,(S(t)\mathcal{B}_1, \omega(\mathcal{B}_0) \geq \delta > 0.$$

On déduit qu'il existe $b_n \in \mathcal{B}_1$, tel que

$$dist\,(S(t)b_n, \omega(\mathcal{B}_0) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.8}$$

$(b_n)_n$ est une suite bornée de $\mathcal{B}_1$, alors il existe $T_1(\mathcal{B}_1)$, $n_0 \leq n$ tel que

$$S(t_n)b_n \in \mathcal{B}_0 \quad \forall t \geq T_1(\mathcal{B}_1).$$

D'autre part, $\mathcal{B}_0$ est compact faible de $H_0^1(\Omega)$, alors

$$S(t_n)b_n \rightharpoonup b \in \mathcal{B}_0,$$

puisque

$$S(t_n)b_n = S(t_n - t_0)\underbrace{S(t_0)b_n}_{\in\,\mathcal{B}_0},$$

donc

$$S(t_n - t_0)S(t_0)b_n \in \omega(\mathcal{B}_0).$$

Si on fait tendre t_n vers $+\infty$ on trouvera que

$$S(t_n - t_0)S(t_0)b_n \rightharpoonup a \in \omega(\mathcal{B}_0),$$

ce qui nous donne

$$dist\,(S(t)b_n, \omega(\mathcal{B}_0)) = 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse (3.8).

$\square$

A ce stade, nous pouvons énoncer

Proposition 3.6. *L'ensemble $\mathcal{A}_\omega = \omega(\mathcal{B}_0)$ est un attracteur faible pour NLSP dans $H_0^1(\Omega)$.*

Tout d'abord on va donner la définition d'un attracteur faible.

Définition 3.7. On appelle un attracteur faible $\mathcal{A}_\omega$ du système dynamique $S(t)$, est un ensemble de $H_0^1(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{A}_\omega$ est borné, donc compact pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$,

(2) $S(t)\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega$ pour $t > 0$ (invariance),

(3) Pour tout borné $\mathcal{B}$ de H_0^1,

$$dist\,(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}_\omega) = \sup_{b\in\mathcal{B}} \inf_{a\in\mathcal{A}_\omega} dist_{H_0^1 faible}\,(S(t)b, a) \to 0,$$

quand t tend vers $+\infty$.

Les trois propriétés ont été déjà démontrées dans la Proposition 3.5. Finalement

$$\mathcal{A}_\omega = \omega(\mathcal{B}_0)$$

est un attracteur faible pour NLSP dans $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Théorème 3.8. *L'attracteur faible est un attracteur fort.*

Démonstration. On multiplie l'équation (1.1) par $i(\overline{u_t + \gamma u})$, et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) = \mathbf{F}(u), \tag{3.9}$$

où $\mathbf{J}, \mathbf{F}$ sont définies par

$$\mathbf{J}(u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2}||\nabla\phi||_{L^2}^2 + 2Im\int f\overline{u}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{F}(u) = 2\gamma Im \int f\overline{u} \mp \gamma ||\nabla \phi||^2_{L^2}. \tag{3.11}$$

En intégrant (3.9) entre 0 et t, on obtient

$$\mathbf{J}(u(t)) = e^{-2\gamma t}\mathbf{J}(u_0) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)}\mathbf{F}(u(s))ds.$$

On pose $u(t) = S(t)u_0$, il vient

$$\mathbf{J}(S(t)u_0) = e^{-2\gamma t}\mathbf{J}(u_0) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)}\mathbf{F}(S(s)u_0)ds. \tag{3.12}$$

Observons tout d'abord que si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, alors $\mathbf{F}(u_n) \longrightarrow \mathbf{F}(u)$ dans Ω, car l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. De même $\mathbf{J}(u) - ||\nabla u||^2_{L^2}$ est une application continue sur $H^1_0(\Omega)$ muni de la topologie faible.

Vérifions tout d'abord qu'en fait $\mathcal{A}_\omega$ attire les bornés pour la topologie forte de $H^1_0(\Omega)$. Nous allons engager une démonstration par l'absurde pour démontrer la troisième assertion dans la définition d'un attracteur :
en supposant qu'il existe $\delta > 0,\ t_n \to +\infty,\ b_n \in \mathcal{B}_0$;

$$\forall\ a \in \mathcal{A}_\omega;\ ||S(t)b_n - a||_{H^1_0} \geq \delta > 0.$$

Par définition d'un attracteur faible, on sait qu'il existe $a \in \mathcal{A}_\omega$ tel que

$$S(t_n)b_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega). \tag{3.13}$$

On veut montrer que

$$S(t_n)b_n \to a \quad \text{fortement dans } H^1_0(\Omega).$$

Soit $t = T > 0$ et $u_0 = S(t_n - T)b_n$, en remplaçant t par T et u_0 par $S(t_n - T)b_n$ dans l'équation (3.12), il vient

$$\mathbf{J}(S(T)S(t_n - T)b_n) =$$
$$e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(t_n - T)b_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s)S(t_n - T)b_n)ds,$$

donc

$$\mathbf{J}(S(t_n)b_n) = e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(t_n - T)b_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s + t_n - T)b_n)ds.$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on a $S(t_n)b_n \rightharpoonup a$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, en utilisant la continuité de $S(t)$ sur $H^1_0(\Omega)$ faible, on a

$$S(s+t_n-T)b_n = S(s-T)S(t_n)b_n \rightharpoonup S(s-T)a \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega).$$

Par convergence dominée, en utilisant la continuité de $\mathbf{F}$ sur $H_0^1(\Omega)$ faible, on montre alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s+t_n-T)b_n)ds=\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds$$

et en utilisant aussi que $S(t_n-T)b_n\in\mathcal{B}_0$, donc pour n assez grand il existe K tel que $\mathbf{J}(S(t_n-T)b_n)\leq K$.

On obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\mathbf{J}(S(t_n)b_n)\leq Ke^{-2\gamma T}+\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds. \tag{3.14}$$

D'après l'équation (3.12), en faisant un changement de variables comme suit :
$u_0=S(-T)a,\ t=T$, on obtient

$$\mathbf{J}(S(T)S(-T)a)=e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(-T)a)+\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s)S(-T)a)ds,$$

donc

$$\mathbf{J}(a)=e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(-T)a)+\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds,$$

ainsi

$$\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds=\mathbf{J}(a)-e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(-T)a)\leq\mathbf{J}(a). \tag{3.15}$$

En utilisant (3.14) et (3.15), il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left(\mathbf{J}(S(t_n)b_n)\right)\leq Ke^{-2\gamma T}+\mathbf{J}(a),$$

on fait tendre T vers $+\infty$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left(\mathbf{J}S(t_n)b_n\right)\leq\mathbf{J}(a).$$

On a utilisé ici que $S(-T)a\in\mathcal{A}_\omega$. Comme $\mathbf{J}(u)-||\nabla u||_{L^2}^2$ est une application continue sur $H_0^1(\Omega)$ muni de la topologie faible, il vient alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sup||S(t_n)b_n||_{H_0^1(\Omega)}\leq||a||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.16}$$

De (3.13) et (3.16), on obtient

$$S(t_n)b_n\to a\quad\text{fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

ce qui contredit l'hypothèse avant (3.13). □

Il reste à montrer la compacité (forte) de $\mathcal{A}_\omega$ dans $H_0^1(\Omega)$. Nous savons que $\mathcal{A}_\omega$ est compact pour la topologie faible. Soit donc une suite a_n à valeurs dans $\mathcal{A}_\omega$ qui converge faiblement vers a autre élément de l'attracteur i.e.

$$a_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.17}$$

On veut montrer que

$$a_n \to a \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Soit $t = T > 0$ et $u_0 = S(-T)a_n$, en remplaçant t par T et u_0 par $S(-T)a_n$ dans l'équation (3.12), il vient

$$\mathbf{J}(S(T)S(-T)a_n) = e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(-T)a_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s)S(-T)a_n)ds,$$

donc

$$\mathbf{J}(a_n) = e^{-2\gamma T}\mathbf{J}(S(-T)a_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a_n)ds.$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on a $a_n \rightharpoonup a$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, en utilisant la continuité de $S(t)$ sur $H_0^1(\Omega)$ faible, on a

$$S(s-T)a_n \rightharpoonup S(s-T)a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Par convergence dominée, en utilisant la continuité de $\mathbf{F}$ sur $H_0^1(\Omega)$ faible, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a_n)ds = \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds$$

en utilisant aussi que $a_n \in \mathcal{A}_\omega$, donc pour n assez grand il existe K tel que $\mathbf{J}(S(-T)a_n) \leq K$.

On obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq Ke^{-2\gamma T} + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)}\mathbf{F}(S(s-T)a)ds. \tag{3.18}$$

En utilisant (3.15) et (3.18), il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq Ke^{-2\gamma T} + \mathbf{J}(a)$$

on fait tendre T vers $+\infty$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq \mathbf{J}(a).$$

On déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup ||a_n||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||a||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.19}$$

De (3.17) et (3.19), on obtient

$$a_n \to a \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

On a ainsi vérifié que $\mathcal{A}_\omega$ étant en fait un attracteur fort dans $H_0^1(\Omega)$. Ceci termine la démonstration du théorème.

□

4. Dimension de l'attracteur.

Dans cette section on va prouver que $\mathcal{A}$ est de dimension de Hausdorff finie. Nous démontrons en première partie que le semi-groupe $S(t)$ est différentiable sur les bornés de H_0^1, en seconde partie nous prouvons pour m assez grand que ce semi-groupe contracte les m volumes. Et par conséquent nous montrons que la dimension de $\mathcal{A}$ est finie.

4.1. La différentiabilité du semi-groupe

On suppose que la deuxième équation du système (1.1) se réécrit comme suit

$$\phi = \pm E(\rho) \text{ si et seulement si}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \pm\rho & \Omega \\ \phi = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit $u(t) = S(t)u_0$ solution de (1.1) sur H_0^1. On se propose de démontrer que $v(t) = DS(t)u_0.h$ est une solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} v_t + \gamma v + i\Delta v \pm 2iE\left(Re(\overline{u}v)\right)u \pm iE(|u|^2)v = 0, \\ v(0) = h \\ v = 0 \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Proposition 4.1. *Le problème de Cauchy associé à (4.2) est localement bien posé dans $H_0^1(\Omega)$. De plus pour $T > 0$ on a*

$$||v(t)||_{H_0^1}^2 \le C(T)||h||_{H_0^1}^2. \tag{4.3}$$

Démonstration. Comme nous travaillons sur des intervalles de temps fini, nous pouvons supposer $\gamma = 0$ (quitte à remplacer v par $ve^{\gamma t}$). Il est clair que le problème de Cauchy associé à (4.2) est localement bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour démontrer l'égalité (4.3), on multiplie l'équation (4.2) par $\Delta\overline{v}$, et on intègre sur Ω en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v(t)||^2_{H_0^1} = \pm Im\int E(|u|^2)v\Delta\overline{v} \pm 2Im\int E(Re(\overline{u}v))u\Delta\overline{v}. \qquad (4.4)$$

On intègre le premier terme du membre de droite de (4.4) par parties, il vient alors

$$\begin{aligned} \pm Im\int E(|u|^2)v\Delta\overline{v} &= \mp Im\int v\nabla\overline{v}E(\nabla(|u|^2)) \\ &\leq \left|\int v\nabla\overline{v}E(\nabla(|u|^2))\right| \\ &\leq c||v||_{L^6}||\nabla v||_{L^2}||\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)||_{L^3}. \end{aligned}$$

D'une part

$$||v||_{L^6} \leq c||v||_{H_0^1} \qquad \text{par injection de Sobolev.}$$

D'autre part

$$\text{comme } H_0^1 \hookrightarrow L^q\ \forall\, q \in [2,6],\ \text{on obtient,}$$

$$\begin{aligned} ||\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)||_{L^3} &\leq c||\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)||_{H_0^1} \\ &\leq c|||u|^2||_{L^2} \\ &\leq c||u||^2_{L^4} \\ &\leq c||u||^2_{H_0^1} \\ &\leq cR^2. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\pm Im\int E(|u|^2)v\Delta\overline{v} \leq K^*||v||^2_{H_0^1} \qquad \text{où } K^* = c\left(\sup_{[0,T]}||u||_{H_0^1}\right).$$

L'autre terme dans le membre de droite de (4.4) s'écrit comme suit (après intégration par parties)

$$\begin{aligned} &\pm 2Im\int E(Re(\overline{u}v))u\Delta\overline{v} = \mp 2Im\int E(Re(\overline{u}\nabla v))u\nabla\overline{v} \\ &\mp 2Im\int E(Re(\overline{v}\nabla u))u\nabla\overline{v} \mp 2Im\int E(Re(\overline{u}v))\nabla u\nabla\overline{v}. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Le premier terme dans (4.5) se traite comme suit

$$\begin{aligned}\mp 2Im\int E(Re(\overline{u}\nabla v))u\nabla\overline{v} &\leq \left|2Im\int E(Re(\overline{u}\nabla v))u\nabla\overline{v}\right| \\ &\leq c\|u\|_{L^6}\|\nabla v\|_{L^2}\,\|E(Re(\overline{u}\nabla v))\|_{L^3}\end{aligned}$$

en procédant comme dans le calcul précédant, il vient alors

$$\begin{aligned}\mp 2Im\int E(Re(\overline{u}\nabla v))u\nabla\overline{v} &\leq c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}\,\|\nabla E(Re(\overline{u}\nabla v))\|_{L^2} \\ &\leq c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}\|uv\|_{L^2} \\ &\leq K^*\|v\|^2_{H_0^1}.\end{aligned}$$

De la même manière on peut majorer les deux autres termes dans (4.5). D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{H_0^1} \leq K^*\|v\|^2_{H_0^1}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|v\|^2_{H_0^1} \leq e^{2K^*t}\|h\|^2_{H_0^1}. \tag{4.6}$$

□

Pour démontrer la différentiabilité de $S(t)$ il faut démontrer la chose suivante

Proposition 4.2.

$$Soit \begin{cases} \tilde{u}(t) = S(t)(u_0+h), \\ u(t) = S(t)u_0, \\ v(t) = DS(t)u_0.h. \end{cases} \tag{4.7}$$

Alors pour $T > 0$ il existe $K'(t)$ et $\delta > 0$ tel que

$$\|S(t)(u_0+h) - S(t)u_0 - DS(t)u_0.h\|_{H_0^1} \leq K'(T)\|h\|^{1+\delta}_{H_0^1}. \tag{4.8}$$

Démonstration. Soit $w(t) = \tilde{u}(t) - u(t) - v(t)$, solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} w_t + i\Delta w \pm i\big[(u+v+w)E(|u+v+w|^2) \mp uE(|u|^2) \\ \qquad \mp 2uE[Re(\overline{u}v)] \mp vE(|u|^2)\big] = 0, \\ w(0) = 0 \\ w = 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Nous avons supposé que $\gamma = 0$ (quitte à remplacer $w(t)$ par $w(t)e^{\gamma t}$). L'équation (4.9) se réécrit aussi en

$$
\begin{aligned}
w_t + i\Delta w \pm i(u+v)E\left(|u+v+w|^2 - |u+v|^2\right) \pm 2ivE\left(Re(\overline{u}v)\right) \\
\pm iwE\left(|u+v+w|^2\right) \pm iuE(|v|^2) \pm ivE(|v|^2) = 0, \quad (4.10)
\end{aligned}
$$

avec la condition initiale $w(0) = 0$, et la condition aux limites $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Car

$$
|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(Re(\overline{u}v)).
$$

On va contôler w en norme H_0^1. On multiplie l'équation (4.10) par $\Delta\overline{w}$, il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2_{H_0^1} &= \pm Im\int \Delta\overline{w}(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2) \\
&\pm 2Im\int \Delta\overline{w}vE(Re(\overline{u}v)) \pm Im\int w\Delta\overline{w}E\left(|u+v+w|^2\right) \\
&\pm Im\int \Delta\overline{w}uE(|v|^2) \pm Im\int \Delta\overline{w}vE(|v|^2).
\end{aligned}
$$

En intégrant l'équation précédente par parties, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2_{H_0^1} &= \underbrace{\mp Im\int \nabla\overline{w}\nabla[(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)]}_{a} \\
&\underbrace{\mp 2Im\int \nabla\overline{w}\nabla[vE(Re(\overline{u}v))]}_{b} \underbrace{\mp Im\int \nabla\overline{w}\nabla[wE\left(|u+v+w|^2\right)]}_{c} \\
&\underbrace{\mp Im\int \nabla\overline{w}\nabla[uE(|v|^2)]}_{d} \underbrace{\mp Im\int \nabla\overline{w}\nabla[vE(|v|^2)]}_{e}. \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

On contrôle le premier terme dans le membre de droite de l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{array}{rcl}
|a| & \leq & \left| Im \int \nabla\overline{w}\nabla[(u+v)E(|u+v+w|^2-|u+v|^2)]\right| \\
& \leq & \int |\nabla\overline{w}||\nabla(u+v)||E(|u+v+w|^2-|u+v|^2)| \\
& + & \int |\nabla\overline{w}||u+v||\nabla E(|u+v+w|^2-|u+v|^2)| \\
& \leq & c||\nabla w||_{L^2}||\nabla(u+v)||_{L^2}||E(|u+v+w|^2-|u+v|^2)||_{L^\infty} \\
& + & c||\nabla w||_{L^2}||u+v||_{L^6}||\nabla E(|u+v+w|^2-|u+v|^2)||_{L^3} \\
& \leq & c||\nabla w||_{L^2}||\nabla(u+v)||_{L^2}|||u+v+w|^2-|u+v|^2||_{L^2} \\
& \leq & c||\nabla w||_{L^2}||\nabla(u+v)||_{L^2}||\overline{w}(2u+2v+w)||_{L^2} \\
& \leq & K||w||^2_{H^1_0}.
\end{array}$$

Où K est une constante qui dépend de $\sup_{t\in[0,T]}||u(t)||_{H^1_0}$.

Dans la suite K désigne une telle constante qui peut changer de valeur de ligne en ligne.

Maintenant on contrôle le second terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
|b| &\leq \left|2Im\int \nabla\overline{w}\nabla[vE(Re(\overline{u}v))]\right| \\
&\leq 2\int |\nabla\overline{w}||\nabla v||E(Re(\overline{u}v))| + 2\int |\nabla\overline{w}||v||\nabla E(Re(\overline{u}v))| \\
&\leq c||\nabla w||_{L^2}||\nabla v||_{L^2}||E(Re(\overline{u}v))||_{L^\infty} \\
&\qquad + c||\nabla w||_{L^2}||v||_{L^6}||\nabla(Re(\overline{u}v))||_{L^3}.
\end{aligned}$$

Il vient donc comme $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, on obtient

$$||E(Re(\overline{u}v))||_{L^\infty} \leq c||\overline{u}v||_{L^2} \leq c||v||_{H^1_0}.$$

Par ailleurs

$$||\nabla(Re(\overline{u}v))||_{L^3} \leq c||\overline{u}v||_{L^2} \leq c||v||_{H^1_0}.$$

Finalement ce second terme se contrôle en

$$\begin{array}{rcl}
\left|2Im\int \nabla\overline{w}\nabla[vE(Re(\overline{u}v))]\right| & \leq & K||w||_{H^1_0}||v||^2_{H^1_0} \\
& \leq & \dfrac{\gamma}{2}||w||^2_{H^1_0} + K||v||^4_{H^1_0}.
\end{array}$$

Et par suite on estime le troisième terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
|c| &\leq \left| Im \int \nabla\overline{w}\nabla[wE\left(|u+v+w|^2\right)]\right| \\
&\leq \int |\nabla\overline{w}||\nabla w||E(|u+v+w|^2)| + \int |\nabla\overline{w}||w||\nabla E(|u+v+w|^2)| \\
&\leq c||\nabla w||_{L^2}[||\nabla w||_{L^2}||E(|u+v+w|^2)||_{L^\infty} \\
&\qquad + ||w||_{L^6}||E(|u+v+w|^2)||_{L^3}] \\
&\leq c||w||^2_{H^1_0}|||u+v+w|^2||_{L^2} \\
&\leq c||w||^2_{H^1_0}||u+v+w||^2_{L^4} \\
&\leq K||w||^2_{H^1_0}.
\end{aligned}$$

Et puis on estime le quatrième terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
|d| &\leq \left| Im \int \nabla\overline{w}\nabla[uE(|v|^2)]\right| \\
&\leq \int |\nabla\overline{w}||\nabla u||E(|v|^2)| + \int |\nabla\overline{w}||u||\nabla E(|v|^2)| \\
&\leq c||\nabla w||_{L^2}[||\nabla u||_{L^2}||E(|v|^2)||_{L^\infty} + ||u||_{L^6}||\nabla E(|v|^2)||_{L^3}] \\
&\leq K^*||w||_{H^1_0}|||v|^2||_{L^2} \\
&\leq K||w||^2_{H^1_0} + K^{'}||v||^4_{H^1_0}.
\end{aligned}$$

Enfin on estime le dernier terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11)

$$
\begin{aligned}
|e| &\le \left| Im \int \nabla \overline{w} \nabla [vE(|v|^2)] \right| \\
&\le \int |\nabla \overline{w}||\nabla v||E(|v|^2)| + \int |\nabla \overline{w}||v||\nabla E(|v|^2)| \\
&\le c||\nabla w||_{L^2}[||\nabla v||_{L^2}||E(|v|^2)||_{L^\infty} + ||v||_{L^6}||\nabla E(|v|^2)||_{L^3}] \\
&\le K^*||w||_{H_0^1}||v||^3_{H_0^1} \\
&\le K||w||^2_{H_0^1} + K^{'}||v||^6_{H_0^1}.
\end{aligned}
$$

Il en résulte

$$
\frac{d}{dt}||w||^2_{H_0^1} \le K_1||w||^2_{H_0^1} + K_2||v||^4_{H_0^1} + K_3||v||^6_{H_0^1},
$$

où $K_1,\ K_2\ K_3$ sont des constantes qui dépendent de $\sup_{t\in[0,T]}||u(t)||_{H_0^1}$.

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$
||w||^2_{H_0^1} \le \tilde{C}e^{kt}[||v||^4_{H_0^1} + ||v||^6_{H_0^1}]. \tag{4.12}
$$

D'où la démonstration de la Proposition 4.2 est complète. □

4.2. Contraction du volume

On va montrer le théorème suivant

Théorème 4.3. *Si la force f est dans $L^2(\Omega)$ alors l'attracteur $\mathcal{A}$ est de dimension de Hausdorff finie dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. On va montrer que les opérateurs $DS(t)u_0.h$ contractent les m volumes dans H_0^1. Soient $h_1, \ldots, h_m$ sont m éléments dans H_0^1, on définit le déterminant de Gram G_m comme suit

$$
G_m = Gram(v_1, \ldots, v_m) = \det_{1\le i,j\ge m} (v_i(t), v_j(t)),\ v_i(t) = (DS(t)u_0)h_i.
$$

On note que les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ sont solutions de l'équation suivante

$$
\begin{cases}
v_{i_t} + \gamma v_i + i\Delta v_i + 2iE\left(Re(\overline{u}v_i)\right)u + iE(|u|^2)v_i = 0, \\
v_i(0) = h,
\end{cases} \tag{4.13}
$$

avec des conditions aux limites

$$
\phi = v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega.
$$

On va montrer pour m assez grand, le déterminant de Gram décroît exponentiellement quand $t \to +\infty$.

On considère $v(t) = DS(t)u_0.h$ solution de l'équation (4.13) on multiplie par $\Delta\overline{v}$, et en prenant la partie réelle alors on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{G}(v) - \gamma\mathbf{G}(v) = Im\int E(|u|^2)v\Delta\overline{v} + 2Im\int E(Re(\overline{u}v)u\Delta\overline{v}, \quad (4.14)$$

où $\mathbf{G}(v) = ||v||^2_{H^1_0}$.

On définit le produit scalaire associé à $\mathbf{G}$

$$\beta(v,w) = \frac{\mathbf{G}(v+w) - \mathbf{G}(v-w)}{4}.$$

On introduit le déterminant de Gram

$$G_m(t) = det_{1\leq i,j\geq m}\left(\beta(v_i(t), v_j(t))\right).$$

Proposition 4.4. *Pour u_0 dans $\mathcal{A}$ et m assez grand, les vecteurs $v_i(t) = (DS(t)u_0)h_i$ satisfont que G_m décroît exponentiellement.*

Démonstration. Tout d'abord on dérive le déterminant de Gram

$$\begin{aligned} \frac{dG_m}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[det\left(C_1(t), \ldots, C_m(t)\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} det\left(C_1(t), \ldots, \frac{dC_k(t)}{dt}, \ldots, C_m(t)\right), \end{aligned}$$

tel que $C_i(t)$ sont des vecteurs colonnes

$$\mathrm{C}_k(t) = \begin{pmatrix} \beta(v_1(t), v_k(t)) \\ \vdots \\ \beta(v_i(t), v_k(t)) \\ \vdots \\ \beta(v_m(t), v_k(t)) \end{pmatrix}.$$

On note $Z(v)$ le membre de droite de (4.14), on suppose que

$$\nu(v,v) = Z(v),$$

avec

$$\nu(v,w) = \frac{Z(v+w) - Z(v-w)}{4}.$$

En appliquant le lemme classique suivant

Lemme 4.5. *Il existe S matrice symétrique $m \times m$ qui dépend de t et m tel que*

$$\nu(v,w) = \beta(Sv,w).$$

Démonstration. Voir [1]. □

La fonction β satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta(v_i(t),v_k(t))}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{G}(v_i(t)+v_k(t))-\mathbf{G}(v_i(t)-v_k(t))}{4}\\
&= 2\frac{Z(v_i(t)+v_k(t))-Z(v_i(t)-v_k(t))}{4}\\
&- 2\gamma\frac{\mathbf{G}(v_i(t)+v_k(t))-\mathbf{G}(v_i(t)-v_k(t))}{4}\\
&= 2\nu(v_i(t),v_k(t))-2\gamma\beta(v_i(t),v_k(t))\\
&= 2\beta(Sv_i(t),v_k(t))-2\gamma\beta(v_i(t),v_k(t))\\
&= 2\beta\left(\sum_{j=1}^{m}\left(s_{ijv_i(t),v_k(t))}\right)\right)-2\gamma\beta(v_i(t),v_k(t))\\
&= -2\gamma C_k(t)+2\sum_{j=1}^{m}s_{kj}C_k(t).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{dC_k(t)}{dt}=-2\gamma C_k(t)+2\sum_{j=1}^{m}s_{kj}C_k(t).$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dG_m(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^{m}\det\left(C_1(t),\ldots,\frac{dC_k(t)}{dt},\ldots,C_m(t)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(-2\gamma G_m+2\sum_{j=1}^{m}s_{kj}\det\left[\ldots,C_{k-1}(t),C_j(t),C_{k+1}(t),\ldots\right]\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(-2\gamma G_m+2\sum_{k=1}^{m}s_{kk}G_m\right).
\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\frac{dG_m}{dt}+2(\gamma m-TrS)G_m=0.$$

Pour montrer la décroissance de G_m, on va estimer TrS en utilisant la formule min max, alors

$$TrS \leq \sup \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{Z(v_j)}{\mathbf{G}(v_j)} \right).$$

On sait que $\mathbf{G}(v_j) = ||v||^2_{H^1_0}$, $Z(v_j)$ s'écrit comme la somme de deux termes dans l'équation (4.14). On intègre l'équation (4.14) par parties, il vient alors

$$\begin{aligned} Im \int E(|u|^2) v \Delta \overline{v} &= -Im \int v \nabla \overline{v} E(\nabla(|u|^2)) \\ &\leq \left| \int v \nabla \overline{v} E(\nabla(|u|^2)) \right| \\ &\leq c||v||_{L^3} ||\nabla v||_{L^2} ||\Delta^{-1}(\nabla)|u|^2||_{L^6} \\ &\leq cR^2 ||v||_{L^3} ||v||_{H^1_0}; \end{aligned}$$

en utilisant l'injection continue $H^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^3$, on obtient

$$||v||_{L^3} \leq c||v||_{H^{\frac{1}{2}}},$$

et d'après l'inégalité d'interpolation, on a

$$||v||_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2} ||v||^{\frac{1}{2}}_{H^1_0};$$

on en déduit que

$$Im \int E(|u|^2) v \Delta \overline{v} \leq cR^2 ||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2} ||v||^{\frac{3}{2}}_{H^1_0}.$$

Majorons maintenant le deuxième terme dans Z

$$\begin{aligned} &2Im \int E(Re(\overline{u}v) u \Delta \overline{v} = \\ &\qquad - 2Im \int \nabla[E(Re(\overline{u}v)] u \nabla \overline{v} - 2Im \int E(Re(\overline{u}v)) \nabla u \nabla \overline{v}. \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned}
-2Im\int \nabla[E(Re(\overline{u}v)]u\nabla\overline{v} &\leq 2Im\int |\nabla[E(Re(\overline{u}v)]||u||\nabla\overline{v}| \\
&\leq ||v||_{H_0^1}||u||_{L^3}||\nabla[E(Re(\overline{u}v)]||_{L^6} \\
&\leq cR||v||_{H_0^1}||uv||_{L^2} \\
&\leq cR^2||v||_{H_0^1}||v||_{L^3} \\
&\leq cR^2||v||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||v||_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
-2Im\int E(Re(\overline{u}v))\nabla u\nabla\overline{v} &\leq 2Im\int |E(Re(\overline{u}v))||\nabla u||\nabla\overline{v}| \\
&\leq ||v||_{H_0^1}||u||_{H_0^1}||uv||_{L^2} \\
&\leq cR^2||v||_{H_0^1}||v||_{L^3} \\
&\leq cR^2||v||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||v||_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Weyl on a que si λ_j est la $j^{ème}$ valeur propre de $-\Delta$, alors

$$\lambda_j \sim C(\Omega)j^{\frac{2}{3}}.$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
TrS &\leq \sup\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{||v_j||_{L^2}^{\frac{1}{2}}}{||v_j||_{H_0^1}^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq C(\Omega)\sup\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j^{\frac{1}{4}}}\right) \\
&\leq C(\Omega)\sup\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{\frac{1}{6}}}\right) \\
&\leq C(\Omega)m^{\frac{5}{6}}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$\gamma m - TrS \geq 0 \Longleftrightarrow \gamma m^{\frac{5}{6}} \left(m^{\frac{1}{6}} - \frac{C(\Omega)}{\gamma} \right) \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow m \geq \left(\frac{C(\Omega)}{\gamma} \right)^6 \Longleftrightarrow G_m \downarrow 0.$$

□

On a alors décroissance des volumes m-dimensionnels. □

Références

[1] N. Akroune – *Comportement asymptotique de certaines équations faiblement amorties*, Thèse, Université de Cergy-Pontoise, 2000.

[2] J. Ball – « Global attractors for damped semilinear wave equations. partial differential equations and applications », *Discrete Contin. Dyn. Syst* **10** (2004), p. 31–52.

[3] T. Cazenave & A. Haraux – *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.

[4] J. Ghidaglia – « Finite dimensional behaviour for weakly damped driven schrodinger equations », *Ann.Inst. Henri Poincaré* **5** (1988), p. 365–405.

[5] ______, « Explicit upper and lower bounds on the number of degrees of freedom for damped and driven cubic schrodinger equations », *Discrete Contin. Dyn. Syst* **23,** n^o3 (1989), p. 433–443.

[6] O. Goubet & R. Rosa – « Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped kdv equation on the real line », *J. Differential Equations* **185** n^o1 (2002), p. 25–53.

[7] R. Illner, O. Kavian & H. Lange – « Stationary solutions of quasi-linear schrodinger-poisson systems », *J. Differential Equations* **145** (1998), p. 1–16.

[8] R. Illner, H. Lange, B. Toomir & P. Zweifel – « On quasi-linear schrodinger-poisson systems », *Math. Meth. Appl. Sci.* **20** (1997), p. 1223–1238.

[9] P. Laurençot – « Long-time behaviour for weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations in $\mathbf{R}^N$, $N \leq 3$ », *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **2** (1995), no. 3, p. 357–369.

[10] P. A. Markowich, C. Ringhofer & C. Schmeiser – *Semiconductor equations*, Springer, Wien, 1990.

[11] F. Nier – « Schrodinger-poisson systems in dimension $d \leq 3$, the whole space case », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **123A** (1993), p. 1179–1201.

[12] R. Temam – *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, second éd., Applied Mathematical Sciences, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997.

Amna Dabaa
LAMFA, CNRS UMR 6140
Laboratoire Amiénois de Mathématiques
Fondamentales et Appliquées,
Université de Picardie Jules Verne,
Faculté de Mathématiques et
d'Informatique,
33, rue Saint-Leu
80039 Amiens Cedex 1,
France.
amna.daaba@u-picardie.fr