ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Farid Kourki

Sur les Extensions Triviales Commutatives

Volume 16, n° 1 (2009), p. 139-150.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_139_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 139-150 (2009)

Sur les Extensions Triviales Commutatives

Farid Kourki

Résumé

Nous caractérisons les extensions triviales semiGoldie, de cogénération finie, mininjectives et quasi-Frobeniusiens. Comme application, nous montrons que tout anneau noethérien s'injecte dans un anneau quasi-Frobeniusien.

On Commutative Trivial extensions

Abstract

We characterize semiGoldie, finitely cogenerated, mininjective and quasi-Frobenius trivial extensions. As application, we obtain that every nœtherian ring can be embedded in a quasi-Frobenius Ring.

1. Introduction

Soit R un anneau commutatif et soit M un R-module. On munit le R-module $R \oplus M$ des deux lois suivantes : $(a,x)+(b,y)=(a+b,x+y)$ et $(a,x)(b,y)=(ab,ay+bx)$. Alors $R \oplus M$ devient aussi un anneau appelé extension triviale de R par M qu'on note par $R\alpha M$. Cette construction, en dépit de sa simplicité, s'est avérée une énorme source de contres exemples et un util efficace pour obtenir des exemples d'anneaux (à diviseurs de zéro) vérifiant certaines propriétés. Un anneau est dit semiGoldie s'il admet une dimension de Goldie finie. Après l'étude du comportement de ces anneaux avec certains types d'extensions, nous caractérisons les extensions triviales semiGoldie (Théorème 2.6) puis celles qui sont de cogénération finie (Théorème 2.10). En particulier, si M est de type fini alors $A = R\alpha M$ admet une dimension de Goldie finie (resp. de cogénération finie) si et seulement s'il en est de même pour R et M (Propositions 2.9 et 2.12). Un anneau R est dit mininjectif si, pour tout idéal simple S de R, tout R-homomorphisme $S \to R$ s'étend à R. Ces anneaux ont été étudiés d'une

Mots-clés : Extensions triviales, SemiGoldie, Mininjectif, Quasi-Frobeniusien.
Classification math. : 13B99, 13C05, 13C13.

manière approfondie par Nicholson et Yousif dans [8]. Le théorème 3.3 caractérise les extensions triviales mininjectives. En combinant ce dernier résultat avec le fait que les anneaux commutatifs quasi-Frobeniusiens (QF) sont exactement les anneaux mininjectifs artiniens, on est parvenu à donner une caractérisation des extensions triviales QF. Comme application, on a pu montrer que tout anneau nœthérien s'injecte dans un anneau QF (Corollaire 3.8).

Dans toute la suite, les anneaux considérés sont commutatifs et les modules sont unitaires. Si I est un idéal d'un anneau R et si N est un sous-module d'un R-module M, on note par $Ann_R N$ (resp. $Ann_M I$) l'annulateur de N dans R (resp. l'annulateur de I dans M). Si $a \in R$ (resp. $x \in M$), on écrit $Ann_R x$ (resp. $Ann_M a$) pour $Ann_R xR$ (resp. $Ann_M aR$). Le symbole $N \subseteq^{ess} M$ veut dire que N est un sous-module essentiel de M (on prendera $0 \subseteq^{ess} 0$). Un module U est dit uniforme s'il est non nul et si l'intersection de deux sous-modules non nuls de U est non nulle. Pour les propriétés des extensions triviales, on utilisera [5] comme référence.

2. Anneaux semiGoldie et anneaux de cogénération finie

Soit M un R-module et soit n un entier. On dit que M est de dimension de Goldie (ou uniforme) égale à n, et on écrit $u.dimM = n$, si M contient un sous-module, somme directe de n sous-modules non nuls, mais ne contient pas de somme directe de sous-modules non nuls, composée de plus de n sous-modules. S'il n'existe pas de tel entier n on écrit $u.dimM = \infty$. Il est bien connu que $u.dimM = n$ si et seulement si M contient n sous-modules uniformes $U_1, \dots, U_n$ tels que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ est essentiel dans M. Il est facile de voir que $u.dimM = 0$ si et seulement si $M = 0$ et $u.dimM = 1$ si et seulement si M est uniforme.

Proposition 2.1. ([4], Propositons 3.13 et 3.20)

(1) *Si M est un module alors $u.dimM = \infty$ si et seulement si M contient une somme directe infinie de sous-modules non nuls.*

(2) *Soient M un module et N un sous-module de M. Si $u.dimM < \infty$ alors $u.dimN < \infty$ et on a $u.dimN \leq u.dimM$. De plus on a $u.dimN = u.dimM$ si et seulement si $N \subseteq^{ess} M$.*

(3) *Si N est un sous-module d'un module M tels que $u.dimN < \infty$ et $u.dimM/N < \infty$ alors $u.dimM < \infty$.*

(4) *Soient* M_1 *et* M_2 *deux* R*-modules tels que* $u.dimM_i < \infty$*,* $i = 1, 2$*. Alors* $u.dim(M_1 \oplus M_2) < \infty$ *et on a l'égalité* $u.dim(M_1 \oplus M_2) = u.dimM_1 + u.dimM_2$*.*

Suivant Carl Faith [2], un anneau R est dit semiGoldie si le R-module R admet une dimension de Goldie finie et cette dimension et alors notée par $u.dimR$. Dans la proposition suivante on étudie le comportement des anneaux semiGoldie avec les extensions plates injectives et les épimorphismes plats injectifs :

Proposition 2.2. *Soit* $\varphi : R \longrightarrow R'$ *un homomorphisme d'anneaux.*

(1) *Si* φ *est plat injectif et si* R' *est un anneau semiGoldie alors* R *est un anneau semiGoldie et* $u.dimR \leq u.dimR'$*.*

(2) *Si* φ *est un épimorphisme plat injectif alors* R *est semiGoldie si et seulement si* R' *est semiGoldie et dans ce cas on a* $u.dimR' = u.dimR$*.*

Démonstration. (1) Si $u.dimR' = n$, supposons que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_{n+1}$ est contenu dans R où les U_i sont des idéaux non nuls de R. On a alors $(U_iR')_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille d'idéaux indépendants non nuls de R'. En effet, comme $U_j \cap \sum_{j \neq i} U_i = 0$, alors $(U_j \cap \sum_{j \neq i} U_i)R' = 0$ et par suite on a $U_jR' \cap \sum_{j \neq i} U_iR' = 0$ ([3], page 9). Si $U_iR' = 0$ alors $\varphi(U_i) = 0$ et comme φ est injective alors $U_i = 0$, absurde. Donc R' contient $n + 1$ idéaux indépendants non nuls, ceci contredit le fait que $u.dimR' = n$. D'où R est un anneau semiGoldie et $u.dimR \leq u.dimR'$.

(2) Si $u.dimR = n$, supposons que $U'_1 \oplus \cdots \oplus U'_{n+1}$ est contenu dans R' où les U'_i sont des idéaux non nuls de R'. Comme φ est un homomorphisme injectif alors $(U'_i \cap R)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille d'idéaux indépendants de R. Si $U'_i \cap R = 0$ alors $(U'_i \cap R)R' = 0$ et par suite $U'_i = 0$ ([3], page 15), absurde. D'où R' est un anneau semiGoldie est $u.dimR' \leq u.dimR$. Par (1) si R' est un anneau semiGoldie alors R est aussi un anneau semiGoldie et $u.dimR \leq u.dimR'$. □

On déduit de ce résultat que les extensions fidèlement plates descendent la propriété "semiGoldie" et qu'un anneau semi-local localement semiGoldie est semiGoldie. Plus précisement :

Corollaire 2.3. (1) *Soit $\varphi : R \longrightarrow R'$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux. Si R' est un anneau semiGoldie alors R est semi-Goldie et $u.dimR \leq u.dimR'$.*

(2) *Soit R un anneau semi-local. Si $R_{\mathfrak{m}}$ est un anneau semiGoldie pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R alors R est semiGoldie.*

(3) *L'anneaux total des fractions $T(R)$ d'un anneau R est semiGoldie si et seulement si R est semiGoldie et dans ce cas on a*

$$u.dimT(R) = u.dimR\,.$$

Démonstration. (1) Provient du fait qu'un homomorphisme fidèlement plat est plat et injectif ([1], p. 46).

(2) Si $\Omega = Max(R)$, l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau R, alors l'homomorphisme canonique $R \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} R_{\mathfrak{m}}$ est fidèlement plat ([7], Exemples 4.72). On applique alors (1).

(3) L'homomorphisme canonique $R \longrightarrow T(R)$ est un épimorphisme plat injectif d'anneaux. □

Notre objectif maintenant est de caratériser les extensions triviales semiGoldie. Le lemme suivant est la pierre d'angle de la démonstration.

Lemme 2.4. *Soient R un anneau, M un R-module et $A = R\alpha M$.*

(1) *Soit J un idéal de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$J \subseteq^{ess} A$.*

(b) *Il existe un idéal I de R et il existe un sous-module N de M tels que $I \subseteq^{ess} Ann_R M$, $N \subseteq^{ess} M$ et $(I, N) \subseteq J$.*

(2) *Soit I un idéal de A contenu dans $Ann_R M$ et soit N un sous-module de M. Alors :*

(a) *I est un idéal uniforme de R si et seulement si $(I, 0)$ est un idéal uniforme de A.*

(b) *N est un sous-module uniforme de M si et seulement si $(0, N)$ est un idéal uniforme de A.*

Démonstration. On va montrer le résultat pour le cas lorsque $M \neq 0$ et $Ann_R M \neq 0$. Dans les autres cas la preuve se fait d'une manière similaire.

(1) (a) $\Longrightarrow$ (b). On a $(Ann_R M, 0)$ est un idéal non nul de l'anneau A, par suite $0 \neq J \cap (Ann_R M, 0) = (I, 0)$ où I est un idéal non nul de R contenu dans $Ann_R M$. Il n'est pas difficile de voir alors que I est essentiel dans $Ann_R M$. Comme $(0, M)$ est aussi un idéal non nul de A, alors $0 \neq J \cap (0, M) = (0, N)$ où N est un sous-module non nul de M qu'on vérifie aisement qu'il est essentiel dans M et que (I, N) est contenu dans J.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Comme (I, N) est contenu dans J, il suffit alors de montrer que $(I, N) \subseteq^{ess} A$. Soit $0 \neq (a, x) \in A$. Supposons que $a \neq 0$. Si $aM = 0$, comme $I \subseteq^{ess} Ann_R M$ alors il existe $\alpha \in R$ tel que $0 \neq \alpha a \in I$. Si $\alpha x = 0$, alors $0 \neq (\alpha, 0)(a, x) = (\alpha a, \alpha x) = (\alpha a, 0) \in (I, N)$. Si $\alpha x \neq 0$, comme $N \subseteq^{ess} M$, alors il existe $\beta \in R$ tel que $0 \neq \beta\alpha x \in N$. D'où $0 \neq (\alpha a, \alpha x)(\beta, 0) = (\alpha a\beta, \beta\alpha x) \in (I, N)$. Si $aM \neq 0$, alors il existe $y \in M$ tel que $ay \neq 0$. Comme $N \subseteq^{ess} M$ alors il existe $\beta \in R$ tel que $0 \neq \beta ay \in N$. D'où $0 \neq (0, \beta y)(a, x) = (0, \beta ay) \in (I, N)$. Supposons maintenant que $a = 0$. Alors $x \neq 0$ et par suite il existe $\gamma \in R$ tel que $0 \neq \gamma x \in N$. D'où $0 \neq (\gamma, 0)(0, x) = (0, \gamma x) \in (I, N)$.

(2) Facile à vérifier. □

Corollaire 2.5. *Soient R un anneau et M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $Soc(A) \subseteq^{ess} A$.

(2) $Soc(Ann_R M) \subseteq^{ess} Ann_R M$ *et* $Soc(M) \subseteq^{ess} M$.

(3) $Soc((Ann_R M) \oplus M) \subseteq^{ess} (Ann_R M) \oplus M$.

Démonstration. (1) $\Longleftrightarrow$ (2). On a $Soc(A) = (Soc(R) \cap Ann_R M, Soc(M)))$ ([6], Exercice 10 page 331). On utilise alors le lemme 2.4.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3). $Soc((Ann_R M) \oplus M) = Soc(Ann_R M) \oplus Soc(M)$. □

Théorème 2.6. *Soient R un anneau et M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semiGoldie.*

(2) $u.dim Ann_R M < \infty$ *et* $u.dim M < \infty$.

(3) $u.dim((Ann_R M) \oplus M) < \infty$. *et dans ce cas on a :*

$$u.dim A = u.dim Ann_R M + u.dim M = u.dim((Ann_R M) \oplus M).$$

Démonstration. Le résultat étant évident dans le cas $M = 0$, on peut supposer que $M \neq 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons que $u.dimAnn_RM = \infty$, alors il existe une famille infinie $(I_i)_{i\in\Delta}$ d'idéaux indépendants non nuls de R contenus dans Ann_RM. L'anneau A contient alors une famille infinie $((I_i,0))_{i\in\Delta}$ d'idéaux indépendants non nuls, absurde. Supposons que $u.dimM = \infty$ et soit $(N_i)_{i\in\Omega}$ une famille infinie de sous-modules indépendants non nuls de M. Alors $((0,N_i))_{i\in\Omega}$ est une famille infinie d'idéaux indépendants non nuls de A, absurde.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons qu'on a $u.dimAnn_RM = l$ et $u.dimM = k$. Donc ils existent $I_1,\dots,I_l$ des idéaux uniformes indépendants de R contenus dans Ann_RM tels que la somme directe $I_1 \oplus \cdots \oplus I_l$ est essentielle dans Ann_RM et ils existent $N_1,\dots,N_k$ des sous-modules uniformes indépendants de M tels que la somme directe $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ est essentielle dans M. Par le lemme 2.4 on a $(I_1 \oplus \cdots \oplus I_l, N_1 \oplus \cdots \oplus N_k) \subseteq^{ess} A.$. En utilisant le même lemme on a $(I_1,0),\dots,(I_l,0),(0,N_1),\dots,(0,N_k)$ sont des idéaux indépendants et uniformes de l'anneau A. Or :
$(I_1,0)\oplus\cdots\oplus(I_l,0)\oplus(0,N_1)\oplus\cdots\oplus(0,N_k) = (I_1\oplus\cdots\oplus I_l, N_1\oplus\cdots\oplus N_k)$
Donc A est semiGoldie et $u.dimA = l + k = u.dimAnn_RM + u.dimM$.

L'égalité $u.dimAnn_RM + u.dimM = u.dim((Ann_RM)\oplus M)$ et l'équivalence (2) $\Longleftrightarrow$ (3) proviennent de la proposition 2.1. □

Corollaire 2.7. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$.*

(1) *Si M est fidèle alors A est semiGoldie si et seulement si M admet une dimension de Goldie finie.*

(2) *Si $M \neq 0$ alors A est uniforme si et seulement si M est un R-module fidèle et uniforme.*

Remarque 2.8. Par le théorème précédent, si R est un anneau semiGoldie et $u.dimM < \infty$ alors $A = R\alpha M$ est semiGoldie. En général la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, soit R un anneau local qui n'est pas semiGoldie (par exemple $R = k\alpha V$ où k est un corps commutatif et V un espace vectoriel de dimension infinie sur k) et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Le R-module $M = E(R/\mathfrak{m})$, enveloppe injective du R-module $R/\mathfrak{m}$, est fidèle ([7], Corollaire (3.76)') et $u.dimM = 1$. Donc $A = R\alpha M$ est semiGoldie. Cet exemple montre aussi qu'un sous-anneau d'un anneau semiGoldie n'est pas nécessairement semiGoldie. Si M est plat ou si M est de type fini alors la réciproque est vraie :

Proposition 2.9. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Si M est plat ou si M est de type fini alors :*

A est semiGoldie si et seulement si R est semiGoldie et $u.dimM < \infty$.

Démonstration. ($\Longleftarrow$). Theorème 2.6.

($\Longrightarrow$). Par le theorème 2.6 $u.dimM < \infty$. Si M est un R-module plat alors $A = R \oplus M$ est un R-module plat. Mais l'homomorphisme de R dans A défini par $a \mapsto (a, 0)$ est injectif, donc R est semiGoldie (Proposition 2.2). Si M est de type fini, alors R/Ann_RM s'injecte dans M^n pour un entier naturel n, d'où $u.dimR/Ann_RM < \infty$ (Proposition 2.1). Mais $u.dimAnn_RM < \infty$, donc R est semiGoldie (Proposition 2.1). □

Un R-module M est dit de cogénération finie si $Soc(M)$ est un sous-module de type fini et essentiel de M. Donc un module de cogénération finie admet une dimension de Goldie finie. Par ([7], Proposition 19.1), M est de cogénération finie si et seulement si pour toute famille $(N_i)_{i\in\Omega}$ de sous-modules de M tels que $\bigcap_{i\in\Omega} N_i = 0$, il existe un sous-ensembe fini $\Omega' \subseteq \Omega$ tel que $\bigcap_{i\in\Omega'} N_i = 0$. Un anneau R est dit de cogénération finie si le R-module R est de cogénération finie.

Théorème 2.10. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un anneau de cogénération finie.*

(2) *Ann_RM et M sont des R-modules de cogénération finie.*

(3) *$(Ann_RM) \oplus M$ est un R-module de cogénération finie.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit$(I_i)_{i\in\Omega}$ une famille d'idéaux de R contenus dans Ann_RM tels que $\bigcap_{i\in\Omega} I_i = 0$. Alors $\bigcap_{i\in\Omega} (I_i, 0) = 0$ et par suite il existe un sous-ensembe fini $\Omega' \subseteq \Omega$ tel que $\bigcap_{i\in\Omega'} (I_i, 0) = 0$. Donc $\bigcap_{i\in\Omega'} I_i = 0$. Soit maintenant $(N_i)_{i\in\Omega}$ une famille de sous-modules de M tels que $\bigcap_{i\in\Omega} N_i = 0$. Alors $\bigcap_{i\in\Omega} (0, N_i) = 0$ et par suite il existe un sous-ensembe fini $\Omega' \subseteq \Omega$ tel que $\bigcap_{i\in\Omega'} (0, N_i) = 0$. D'où $\bigcap_{i\in\Omega'} N_i = 0$.

(2) $\Longleftarrow$ (1). Comme $Ann_R M$ et M sont des R-modules de cogénération finie alors $u.dim Ann_R M < \infty$ et $u.dim M < \infty$. Par le theorème 2.6 l'anneau A est semiGoldie et par suite $Soc(A)$ est de type fini. Comme $Soc(Ann_R M) \subseteq^{ess} Ann_R M$ et $Soc(M) \subseteq^{ess} M$ alors $Soc(A) \subseteq^{ess} A$ (Corollaire 2.5). D'où A est de cogénération finie.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3). Par ([9], Proposition 3*) une somme directe de deux R-modules est de cogénération finie si et seulement si chaque facteur est de cogénération finie. □

Remarque 2.11. Soit R un anneau local qui n'est pas semiGoldie et soit M le R-module $E(R/\mathfrak{m})$. Alors M est un R-module fidèle de cogénération finie. Donc $A = R\alpha M$ est de cogénération finie mais R ne l'est pas.

Proposition 2.12. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Si M est de type fini alors :*

A est de cogénération finie $\Longleftrightarrow$ R et M sont de cogénération finie.

Démonstration. Se fait de la même manière que la preuve de la proposition 2.9. □

3. Anneaux mininjectifs et anneaux QF

Soient R un anneau et M un R-module. On dit que M admet un socle sans carré (en englais "squarefree") si pour tout deux sous-modules simples S et S' de M tels que $S \simeq S'$ on a $S = S'$. Le lemme suivant donne une caractérisation des modules dont le socle est sans carré :

Lemme 3.1. *Soit M un R-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *M admet un socle sans carré.*
(2) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, $Ann_M \mathfrak{m}$ est soit nul soit un sous-module simple de M.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2). Si $Ann_M \mathfrak{m} \neq 0$, soit x un élément non nul de $Ann_M \mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m} \subseteq Ann_R Ann_M \mathfrak{m} \subseteq Ann_R x$ et donc $\mathfrak{m} = Ann_R x$ et xR est alors un R-module simple. Par suite $Ann_M \mathfrak{m} = Ann_M Ann_R x$. Soit $0 \neq y \in Ann_M Ann_R x$. On a $Ann_R x = Ann_R Ann_M Ann_R x \subseteq Ann_R y$; mais l'idéal $Ann_R x$ est maximal, d'où $Ann_R x = Ann_R y$ et par suite

$Rx \simeq Ry$. Par hypothèse $Rx = Ry$, impliquant $y \in Rx$. On obtient alors $Ann_M Ann_R x \subseteq Rx$, d'où l'égalité.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Montrons d'abord que $Ann_M Ann_R x = xR$ pour tout sous-R-module simple xR de M. Soit xR un tel sous-module. Comme $Ann_R x$ est un idéal maximal, $Ann_M Ann_R x$ est soit simple soit nul. Ce dernier module contient Rx, donc $Ann_M Ann_R x = xR$. Soient xR et yR deux sous-R-modules simples de M tels que $Rx \simeq Ry$. Donc $Ann_R x = Ann_R y$ et par suite $xR = Ann_M Ann_R x = Ann_M Ann_R y = yR$. □

Lemme 3.2. (1) *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Soient I un idéal de R et N un sous-module de M tels que $IM \subseteq N$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *(I, N) est un idéal simple de A.*

(b) *$I = 0$ et N est un sous-module simple de M ou $N = 0$ et I est un idéal simple de R contenu dans $Ann_R M$.*

(2) *Soient E et F deux R-modules. Soit H un sous-module de E et soit Q un sous-module de F. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$H \oplus Q$ est un sous-module simple de $E \oplus F$.*

(b) *$H = 0$ et Q est un sous-module simple de F ou $Q = 0$ et H est un sous-module simple de E.*

Démonstration. (1) (a) $\Longrightarrow$ (b). Si $N \neq 0$, alors $0 \neq (0, N) \subseteq (I, N)$ et par suite $(0, N) = (I, N)$. On déduit alors que $I = 0$ et N est un sous-module simple de M. Si $N = 0$, comme $IM \subseteq N$, alors $I \subseteq Ann_R M$. L'idéal $(I, 0)$ étant simple, I est alors un idéal simple de R.

(b) $\Longrightarrow$ (a). On vérifie sans peine que les idéaux considérés dans (b) sont simples.

(2) (a) $\Longleftrightarrow$ (b). Se fait en utilisant les même idées de la preuve de (1). □

Théorème 3.3. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est mininjectif.*

(2) *$(Ann_R M) \oplus M$ est un R-module qui admet un socle sans carré.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2). Si $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R alors $(\mathfrak{m}, M)$ est un idéal maximal de A et $Ann_{(Ann_R M)\oplus M}\mathfrak{m} = Ann_{Ann_R M}\mathfrak{m} \oplus Ann_M\mathfrak{m}$. L'idéal $Ann_A(\mathfrak{m}, M) = (Ann_{Ann_R M}\mathfrak{m}, Ann_M\mathfrak{m})$ est soit nul soit un idéal simple de A (Lemme 3.1). S'il est nul, $Ann_{Ann_R M\oplus M}\mathfrak{m}$ est aussi nul. S'il est simple alors, par le lemme 3.2, $Ann_{(Ann_R M)\oplus M}\mathfrak{m}$ est aussi simple. Donc le R-module $(Ann_R M) \oplus M$ admet un socle sans carré (Lemme 3.1).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Soit I un idéal maximal de A. Il est alors de la forme $(\mathfrak{m}, M)$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de R. Par suite $Ann_{(Ann_R M)\oplus M}\mathfrak{m} = Ann_{Ann_R M}\mathfrak{m} \oplus Ann_M\mathfrak{m}$ est soit nul soit un sous-module simple du module $(Ann_R M) \oplus M$. S'il est nul, $Ann_A(\mathfrak{m}, M) = (Ann_{Ann_R M}\mathfrak{m}, Ann_M\mathfrak{m})$ est nul. S'il est simple, en utilisant le fait que $Ann_{Ann_R M}\mathfrak{m} \subseteq Ann_R M$ et le lemme 3.2, on obtient que $Ann_A(\mathfrak{m}, M)$ est aussi un idéal simple de A. On applique alors le lemme 3.1. □

Corollaire 3.4. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Si M est fidèle alors A est mininjectif si et seulement si M admet un socle sans carré.*

Remarques 3.5. (1) Si l'anneau $A = R\alpha M$ est mininjectif alors le R-module $(Ann_R M) \oplus M$ admet un socle sans carré (Théorème 3.3) et par suite il en est de même pour $Ann_R M$ et M. Cependant, la réciproque n'est pas en générale vraie. En effet, soit R un anneau mininjectif tel que $Soc(R) \cap RadR \neq 0$ et soit $\Omega = Max(R)$. Soit $M = \underset{\mathfrak{m}\in\Omega}{\oplus} R/\mathfrak{m}$. Alors $Ann_R M = RadR$ et M admettent des socles sans carré. Mais $Soc((Ann_R M) \oplus M) = (Soc(R) \cap RadR) \oplus M$ n'est pas sans carré. En effet, comme $Soc(R) \cap RadR \neq 0$, alors il existe un idéal simple S contenu dans $Soc(R) \cap RadR$. Mais $S \simeq R/\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal. Pour l'exemple d'un tel anneau R, on prend $R = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ où p est un nombre premier. On a alors $Soc(R) = p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ est simple, donc R est mininjectif. De plus $RadR = p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} = Soc(R)$, donc $Soc(R) \cap RadR \neq 0$.

(2) La condition $A = R\alpha M$ est mininjectif n'est pas équivalente à la condition $M \oplus R$ est de socle sans carré. Si R est un anneau mininjectif tel que $Soc(R) \neq 0$. Alors $A = R\alpha R$ est mininjectif (Théorème 3.3). Mais $Soc(R \oplus R) = Soc(R) \oplus Soc(R)$ n'est sans carré.

Un anneau R est dit quasi-Frobeniusien (=QF) si R est auto-injectif artinien. Dans le cas commutatif, R est QF si et seulement si R est artinien mininjectif ([7], Théorème 15.27). Dans le théorème suivant on caractérise les extensions triviales QF :

Théorème 3.6. *Soit M un R-module et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est QF.*

(2) *R et M sont artiniens et $(Ann_R M) \oplus M$ admet un socle sans carré.*

Démonstration. La condition A est QF est équivalente à la condition A est artinien mininjectif. Mais il est facile de voir que A est un anneau artinien si et seulement si R et M sont artiniens. On a aussi A est mininjectif si et seulement si $(Ann_R M) \oplus M$ admet un socle sans carré (Théorème 3.3). □

Corollaire 3.7. *Soit M un R-module fidèle de type fini et soit $A = R\alpha M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est QF.*

(2) *M est artinien admettant un socle sans carré.*

(3) *R est artinien et M admet un socle sans carré.*

Démonstration. Comme M est un R-module fidèle de type fini alors M est artinien si et seulement si R est artinien. □

Voici une application du corollaire précédent :

Corollaire 3.8. *Tout anneau commutatif nœthérien R est sous-anneau d'un anneau QF.*

Démonstration. Comme tout anneau nœthérien est sous-anneau d'un anneau artinien ([7], Corollaire 12.25), on peut supposer alors que R est un anneau artinien. Soit $\{V_1, \ldots, V_n\}$ un ensemble complet de R-modules simples (i.e. tout R-module simple est isomorphe à un et un seul V_i). Soit $M = E(V_1) \oplus \cdots \oplus E(V_n)$. Alors $A = R\alpha M$ est un anneau QF. En effet, M est un R-module fidèle de type fini ([7], Théorème 3.64). Comme $soc(M) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ est sans carré, alors A est QF (Corollaire 3.7). □

Références

[1] N. Bourbaki – *Algèbre commutative, chapitres 1 et 2*, Masson, Paris, 1985.

[2] C. Faith – « Annihilator ideals, associated primes and Kasch-McCoy commutative rings », *Comm. Algebra* **19** (1994), p. 1867–1892.

[3] S. Glaz – *Commutative coherent rings*, Lecture Notes in Math., Springer–Verlag, 1989.

[4] K. Goodearl – *Ring Theory : Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker, New York, 1976.

[5] J. Huckaba – *Commutative rings with zero divisors*, Marcel Dekker, NewYork-Basel, 1988.

[6] F. Kasch – *Modules and rings*, Academic Press, London, 1982, (English translation).

[7] T. Lam – *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Math., NewYork-Basel, 1999.

[8] W. Nicholson et M. Yousif – « Mininjective rings », *J. Algebra* **187** (1997), p. 548–578.

[9] P. Vamos – « The dual of the notion of 'finitely generated' », *J. London Math. Soc.* **43** (1968), p. 643–646.

Farid Kourki
Département de Mathématiques
et Informatique
Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences, B.P. 2121
Tétouan, Maroc
kourkifarid@hotmail.com