ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Hacène Belbachir et Farid Bencherif

Développement asymptotique de la somme des inverses d'une fonction arithmétique

Volume 16, n° 1 (2009), p. 93-99.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_93_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 93-99 (2009)

Développement asymptotique de la somme des inverses d'une fonction arithmétique

Hacène Belbachir
Farid Bencherif

Résumé

La somme des puissances des inverses de $\pi(n)$, $\pi(x)$ désignant le nombre de nombres premiers n'excédant pas x, a fait l'objet de nombreux travaux. Nous généralisons, dans cet article, les formules asymptotiques obtenues par ces auteurs à toute une classe de fonctions arithmétiques.

1. Introduction

Pour tout entier $r \geq 1$, et pour tout réel $x \geq 2$, on note $S_r(x) := \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$, où $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ est le nombre de nombres premiers p n'excédant pas x.

Le Théorème des nombres premiers affirme que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$.

Ce théorème permet de constater aisément que d'une part,

$$S_1(x) \sim \frac{1}{2} \log^2 x \quad (x \longrightarrow \infty) \tag{1.1}$$

et que d'autre part pour $r \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$ est convergente de somme C_r, et donc

$$S_r(x) \sim C_r \quad (x \longrightarrow \infty). \tag{1.2}$$

J.-M. De Koninck et A. Ivić [4, 1980], L. Panaitopol [5, 2000] et A. Ivić [3, 2002] ont donné des développements asymptotiques de $S_1(x)$ plus précis que l'évaluation (1.1), le dernier en date étant celui de A. Ivić.

Théorème 1.1. *Soit $(k_n)_{n \geq 1}$ la suite d'entiers définie par récurrence par la relation*

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \cdots + (n-1)!k_1 = n.n! \qquad (n \geq 1). \tag{1.3}$$

Mots-clés : Théorème des nombres premiers, Formules asymptotiques.
Classification math. : 11N05.

Alors pour tout entier $m \geq 2$, on a pour $x \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\pi(n)} &= \frac{1}{2}\log^2 x-\log x-\log\log x+C+\frac{k_2}{\log x}\\ &+\frac{k_3}{2\log^2 x}+\cdots+\frac{k_m}{(m-1)\log^{m-1}x}+O\left(\frac{1}{\log^m x}\right),\end{aligned}$$

où C est une constante absolue.

Dans le cas où $r \geq 2$, H. Belbachir et F. Bencherif [1, 2006] ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Pour un entier $r \geq 2$, soient $(k_n)_{n\geq 1}$ la suite d'entiers définie par (1.3), $(\alpha_{r,n})_{n\geq 0}$ la suite de rationnels définie par l'égalité dans $R[[X]]$:*

$$\left(1-X-\sum_{n\geq 1}k_nX^{n+1}\right)^r=\sum_{n\geq 0}\alpha_{r,n}X^n,$$

$(\lambda_{r,k})_{0\leq k\leq r}$ et $(\mu_{r,k})_{k\geq 1}$ les suites de rationnels définies par

$$\lambda_{r,k}:=-\sum_{s=k}^{r}\frac{s!}{k!\,(r-1)^{s-k+1}}\alpha_{r,r-s},\ \mu_{r,k}:=\sum_{s=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(s-1)!\,(1-r)^{k-s+1}}\alpha_{r,r+s}.$$

Alors pour tout entier $m \geq 2$, on a pour $x \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= C_r+\frac{1}{x^{r-1}}\Big(\lambda_{r,r}\log^r x+\cdots+\lambda_{r,2}\log^2 x\\ &\quad+\lambda_{r,1}\log x+\lambda_{r,0}+\frac{\mu_{r,1}}{\log x}\\ &\quad+\frac{\mu_{r,2}}{\log^2 x}+\cdots+\frac{\mu_{r,m-1}}{\log^{m-1}x}+O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\Big),\end{aligned}$$

où C_r est la constante absolue définie par (1.2).

Le Théorème 1.2 constitue une extension naturelle du Théorème 1.1 d'Ivić. A part la constante C_r qui peut être évaluée avec l'approximation que l'on veut, les constantes qui y figurent sont des rationnels, explicitement donnés et facilement calculables. Ainsi pour $r = 3$ et $m = 6$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^{3} &= C_3+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}\log^3 x+\frac{3}{4}\log^2 x+\frac{3}{4}\log x\right.\\ &\quad +\frac{19}{8}+\frac{21}{2\log x}+\frac{237}{4\log^2 x}+\frac{1583}{4\log^3 x}\\ &\quad \left.+\frac{24219}{8\log^4 x}+\frac{104091}{4\log^5 x}+O\left(\frac{1}{\log^6 x}\right)\right).\end{aligned}$$

Le théorème qui suit généralise les deux précédents et constitue le principal résultat de cet article.

2. Enoncé du Théorème

Précisons tout d'abord quelques notations.

Pour toute série formelle $T\left(X\right):=\sum_{n\geq 0}t_nX^n\in\mathbf{R}\left[\left[X\right]\right]$ de valuation nulle, et pour tout entier $r\geq 1$, la série formelle $\left(T\left(X\right)\right)^r$ est inversible et le coefficient de X^n dans $\left(T\left(X\right)\right)^{-r}$ ne dépend que de $t_0,t_1,\ldots,t_n$ et r. Désignons-le par $A_n\left(t_0,t_1,\ldots,t_n;r\right)$. Autrement dit

$$\left(T\left(X\right)\right)^{-r}=\sum_{n\geq 0}A_n\left(t_0,t_1,\ldots,t_n;r\right)X^n.$$

Un simple calcul donne

$$A_0\left(t_0;r\right)=\frac{1}{t_0^r}\quad\text{et}\quad A_1\left(t_0,t_1;r\right)=-r\frac{t_1}{t_0^{r+1}},$$

et en particulier pour $r=1$, on a (voir [2])

$$A_n\left(t_0,t_1,\ldots,t_n;1\right)=\frac{\left(-1\right)^n}{t_o^{n+1}}\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_n\\ t_0 & t_1 & \cdots & \cdots & t_{n-1}\\ 0 & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2}\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & t_0 & t_1\end{vmatrix}\qquad\left(n\geq 1\right).$$

Avec ces notations, on obtient le

Théorème 2.1. *Soient $q\geq 1$, $r\geq 1$, $s\geq 1$ des entiers, $\left(a_k\right)_{k\geq 0}$ une suite de réels telle que $a_0>0$ et $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{R}$ une fonction arithmétique* *admettant pour tout entier $m \geq 1$ un développement asymptotique, pour $n \to \infty$, s'écrivant*

$$f(n) = \frac{n^s}{\log^q n}\left(a_0 + \frac{a_1}{\log n} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\log^{m-1} n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right).$$

Soit $\sum\limits_{n \leq x}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r$ *une sommation étendue aux seuls entiers $n \leq x$ vérifiant $f(n) \neq 0$.*

Dans le cas où $rs = 1$, on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x}{}' \frac{1}{f(n)} &= \frac{b_0}{q+1}\log^{q+1} x + \frac{b_1}{q}\log^q x + \cdots + \frac{b_q}{1}\log x \\
&\quad + b_{q+1}\log\log x + C - \frac{b_{q+2}}{\log x} \\
&\quad - \frac{b_{q+3}}{2\log^2 x} - \cdots - \frac{b_{q+m}}{(m-1)\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right),
\end{aligned}$$

C étant une constante absolue indépendante de m et, pour $0 \leq k \leq q+m$, $b_k = A_k(a_0, a_1, \ldots, a_k; 1)$.

Dans le cas où $rs \geq 2$, $\sum_{n \geq 0}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r$ est convergente et on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\sum_{n > x}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r = \frac{\log^{qr} x}{x^{rs-1}}\left(c_0 + \frac{c_1}{\log x} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\right),$$

avec

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(qr-j)!}{(qr-k)!}(rs-1)^{j-k-1} A_j(a_0, a_1, \ldots, a_j; r), \quad (0 \leq k \leq m-1).$$

Remarque 2.2. Comme pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$\pi(n) = \frac{n}{\log n}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!}{\log^k n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right),$$

on peut choisir $f(n) = \pi(n)$ avec dans ce cas particulier $q = s = 1$ et $a_k = k!$ pour $k \geq 0$; on retrouve alors les résultats de J.-M. De Koninck et A. Ivić, L. Panaitopol, A. Ivić, et de H. Belbachir et F. Bencherif.

3. Démonstration du théorème principal

La démonstration du théorème principal repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Soient $m \geq 1$, $q \geq 1$, des entiers, $(b_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels. Alors en posant*

$$T_m(x) := \frac{\log^q x}{x}\left(b_0 + \frac{b_1}{\log x} + \cdots + \frac{b_{m+q}}{\log^{m+q} x}\right)$$

et

$$\begin{aligned} U_m(x) \quad : \quad &= \frac{b_0}{q+1}\log^{q+1} x + \frac{b_1}{q}\log^q x + \cdots + \frac{b_q}{1}\log x \\ &+ b_{q+1}\log\log x - \frac{b_{q+2}}{\log x} - \frac{b_{q+3}}{2\log^2 x} - \cdots - \frac{b_{q+m}}{(m-1)\log^{m-1} x}, \end{aligned}$$

on a $U_m'(x) = T_m(x)$.

Lemme 3.2. *Soient $m \geq 0$, $u \geq 1$, $v \geq 2$,des entiers, $(\alpha_k)_{0\leq k\leq m}$ et $(\beta_k)_{0\leq k\leq m}$ des réels tels que*

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(u-j)!\,(v-1)^{j-k-1}}{(u-k)!}\alpha_j.$$

Alors, en posant

$$V_m(x) := \frac{\log^u x}{x^v}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\log x} + \cdots + \frac{\alpha_m}{\log^m x}\right)$$

et

$$W_m(x) := -\frac{\log^u x}{x^{v-1}}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{\log x} + \cdots + \frac{\beta_m}{\log^m x}\right),$$

on a

$$W_m'(x) = V_m(x) + \frac{(m-u)\,\beta_m}{x^v \log^{m+1-u} x}.$$

Preuve des lemmes. La preuve du Lemme 3.1 est immédiate, alors que celle du Lemme 3.2 nécessite le calcul suivant. On a

$$\begin{aligned} W_m'(x) \quad = \quad & \frac{\log^u x}{x^v}\left((v-1)\,\beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{(v-1)\,\beta_j + (j-1-u)\,\beta_{j-1}}{\log^j x}\right. \\ & \left. + \frac{m-u}{\log^{m+1} x}\beta_m\right). \end{aligned}$$

On vérifie que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ satisfont les relations

$$\begin{cases} (v-1)\,\beta_0 = \alpha_0 \\ (v-1)\,\beta_j + (j-1-u)\,\beta_{j-1} = \alpha_j \quad (1 \leq j \leq m)\,. \end{cases}$$

$\square$

Démonstration du Théorème 3. a) Si $rs = 1$, c'est à dire $r = s = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(n)} &= \frac{\log^q n}{n}\left(a_0 + \frac{a_1}{\log n} + \cdots + \frac{a_{m+q}}{\log^{m+q} n} + O\left(\frac{1}{\log^{m+q+1} n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{\log^q n}{n}\left(b_0 + \frac{b_1}{\log n} + \cdots + \frac{b_{m+q}}{\log^{m+q} n}\right) + O\left(\frac{1}{n\log^{m+1} n}\right) \\ &= T_m(n) + O\left(\frac{1}{n\log^{m+1} n}\right). \end{aligned}$$

On a donc, à la lumière du Lemme 3.1

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x}{}' \frac{1}{f(n)} &= C_1 + \sum_{n\leq x} U_m'(n) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right) \\ &= C + U_m(x) + O\left(\frac{\log^q x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right) \\ &= C + U_m(x) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right). \end{aligned}$$

b) Si $rs \geq 2$, alors avec $\alpha_k = A_k(a_0, a_1, \ldots, a_k; r)$ pour $0 \leq k \leq m-1$, $u = qr$ et $v = rs$, on a

$$\left(\frac{1}{f(n)}\right)^r = \frac{\log^u n}{n^v}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\log n} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{\log^{m-1} n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right).$$

Comme $f(n)^{-r} \sim a_0^{-r} n^{-v} \log^u n$ avec $v \geq 2$, $\sum_{n\geq 0}{}' f(n)^{-r}$ converge, et l'on a, à l'aide du Lemme 3.2 (on omet de justifier certains passages classiques)

$$\begin{aligned}\sum_{n>x}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r &= \sum_{n>x}\left(V_{m-1}(n) + O\left(\frac{\log^u n}{n^v \log^m n}\right)\right)\\ &= \sum_{n>x} W'_{m-1}(n) + O\left(\frac{\log^u x}{x^{v-1}\log^m x}\right)\\ &= \int_x^{\infty} W'_m(t)\,dt + O\left(\frac{\log^u x}{x^v}\right) + O\left(\frac{\log^u x}{x^{v-1}\log^m x}\right)\\ &= -W_{m-1}(x) + O\left(\frac{\log^{qr} x}{x^{rs-1}\log^m x}\right),\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Théorème 2.1. □

Références

[1] H. Belbachir & F. Bencherif – « On a sum involving powers of the prime counting function », *Univ. Beograd. Publikac. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **17** (2006), p. 45–51.

[2] L. Comtet – *Analyse Combinatoire*, Puf, Coll. Sup., Paris, Vol. 1 & 2, 1970.

[3] A. Ivić – « On a sum involving the prime counting function $\pi(\mathrm{x})$ », *Univ. Beograd. Publikac. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **13** (2002), p. 85–88.

[4] J.-M. D. Koninck & A. Ivić – *Topics in Arithmetical Functions*, vol. 43, North Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, 1980.

[5] L. Panaitopol – « A formula for $\pi(\mathrm{x})$ applied to a result of Koninck-Ivić », *Nieuw Archief Woor Wiskunde* **5/1** (2000), p. 55–56.

Hacène Belbachir
USTHB, Faculté de Mathématiques,
PB 32, El Alia, Alger, Algérie.
hbelbachir@usthb.dz
hacenebelbachir@gmail.com

Farid Bencherif
USTHB, Faculté de Mathématiques,
PB 32, El Alia, Alger, Algérie.
fbencherif@usthb.dz
fbencherif@gmail.com