ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Abdelmalek Azizi et Mohammed Taous

# Condition nécessaire et suffisante pour que certain groupe de Galois soit métacyclique

Volume 16, n° 1 (2009), p. 83-92.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_83_0>



*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France*

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 83-92 (2009)

# Condition nécessaire et suffisante pour que certain groupe de Galois soit métacyclique

Abdelmalek Azizi
Mohammed Taous

**Résumé**

Soient $d$ est un entier sans facteurs carrés, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}_2^{(1)}$ et $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$ le groupe de Galois de $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$. Notre but est de montrer qu'il existe une forme de $d$ tel que le 2-groupe $G$ est non métacyclique et de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $G$ soit métacyclique dans le cas où $d = 2p$ avec $p$ un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$.

*Necessary condition and sufficient for certain Galois group to be metacyclic*

**Abstract**

Let $d$ be positive square-free integers, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ and $i = \sqrt{-1}$. Let $\mathbf{K}_1^{(2)}$ be the Hilbert 2-class field of $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ be the Hilbert 2-class field of $\mathbf{K}_1^{(2)}$ and $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$ be the Galois group of $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$. Our goal is to show that there is some form of $d$ such $G$ is a nonmetacyclic 2-group and give the necessary condition and sufficient for the group $G$ to be metacyclic in case $d = 2p$ with $p$ a prime number such that $p \equiv 1 \pmod 4$.

## 1. Introduction

Soient $G$ un 2-groupe, $G'$ le groupe des commutateurs de $G$, $\mathbf{K}$ un corps de nombres, $\mathbf{K}^*$ le corps de genres de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}_2^{(1)}$. On dit que le 2-groupe $G$ est *métacyclique*, s'il existe un sous-groupe cyclique

*Mots-clés :* groupe des unités, système fondamentale d'unités, capitulation, corps de classes de Hilbert, 2-groupe métacyclique.
*Classification math. :* 11R27, 11R29, 11R37.

normal $H$, tel que le groupe quotient $G/H$ est cyclique. On sait que si $G/G^{'}$ est de type (2, 2), alors d'après [12] et [15], le groupe $G$ est métacyclique (exactement abélien de type (2, 2), quaternionique, diédral ou semi-diédral). Mais, si $G/G^{'}$ est de type $(2, 2^n)$ avec $n \geq 2$, alors d'après [8], le groupe $G$ peut être métacyclique ou non métacyclique ; le problème qu'on veut aborder dans cet article est le suivant : Pour $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ où $d$ est un entier sans facteurs carrés et $\mathbf{K}^*$ est une extension quadratique de $\mathbf{K}$, existe-t-il une forme de $d$ tel que le 2-groupe $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$ est non métacyclique et quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe $G$ soit métacyclique dans le cas où $d = 2p$ avec $p$ un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$ ?

## 2. Le rang du 2-groupe de classes de K où $[\mathbf{K}^* : \mathbf{K}] = 2$

Soit $p$ un diviseur premier du discriminant $D_{\mathbf{K}}$ de $\mathbf{K}$, on désigne par $e(p)$ l'indice de ramification de $p$ dans $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$. On sait, d'après [13] que

$$\prod_{p/D_{\mathbf{K}}} e(p) = [\mathbf{K}^* : \mathbf{Q}] = [\mathbf{K}^* : \mathbf{K}] \cdot [\mathbf{K} : \mathbf{Q}] = 4 \cdot [\mathbf{K}^* : \mathbf{K}].$$

Dans le cas où $\mathbf{K}^*$ est une extension quadratique de $\mathbf{K}$, on a $\prod_{p/D_{\mathbf{K}}} e(p) = 2^3 = 8$, alors si 2 est totalement ramifié dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, 2 figure dans la décomposition en facteurs premiers de $d$, par suite, $d$ est le produit d'un nombre premier et 2. Si 2 n'est pas totalement ramifié, 2 ne divise pas $d$, dans ce cas $d$ est le produit de deux nombres premiers impairs. Alors les formes possibles pour $d$ sont :

(i) $d = p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$ ;

(ii) $d = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 4$ ;

(iii) $d = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ ;

(iv) $d = 2q$ où $q \equiv -1 \pmod 4$ ;

(v) $d = q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$.

Dans la suite de cette section, on va étudier le rang du 2-groupe de classes de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ avec $d$ prenant les formes précédentes. Pour cela nous allons rappeler le résultat suivant :

**Lemme 2.1** ([14]). *Le rang du 2-groupe de classes de* $\mathbf{K}$ *est :*

$$\begin{cases} s+s_0 & \text{si } d \text{ est pair et } p \equiv 1 \pmod 8 \text{ pour tout } p \in S_0. \\ s+s_0-1 & \text{si } d \text{ est pair et il existe } p \in S_0 \text{ tel que } p \equiv 5 \pmod 8 \\ & \text{ou } d \text{ est impair et } p \equiv 1 \pmod 8 \text{ pour tout } p \in S_0. \\ s+s_0-2 & \text{si } d \text{ est impair et il existe } p \in S_0 \text{ tel que } p \equiv 5 \pmod 8). \end{cases}$$

*(1)* $s = |S|$ *et* $S$ *est l'ensemble des premiers impairs ramifiés dans* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ *;*

*(2)* $s_0 = |S_0|$ *où* $S_0$ *est le sous-ensemble de* $S$ *contenant tous les premiers congrues à* 1 *modulo* 4.

**Théorème 2.2.** *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ *un corps biquadratique avec* $d$ *est un entier sans facteurs carrés,* $\mathbf{K}^*$ *le corps de genres de* $\mathbf{K}$ *et* $r$ *le rang du* 2*-groupe de classes de* $\mathbf{K}$*. Si* $\mathbf{K}^*$ *est une extension quadratique de* $\mathbf{K}$*, alors*

(1) $r = 1$, *si* $d$ *prend les formes suivantes :*
- (1.i) $d = 2p$ *où* $p \equiv 5 \pmod 8$ *;*
- (1.ii) $d = pq$ *où* $p \equiv 5 \pmod 8$ *et* $-q \equiv 1 \pmod 4$ *;*
- (1.iii) $d = 2q$ *où* $q \equiv -1 \pmod 4$ *;*
- (1.iv) $d = q_1q_2$ *où* $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$ *;*

(2) $r = 2$, *si* $d$ *prend les formes suivantes :*
- (2.i) $d = p_1p_2$ *où* $p_1 \equiv 5 \pmod 8$ *ou* $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ *;*
- (2.ii) $d = 2p$ *où* $p \equiv 1 \pmod 8$ *;*
- (2.iii) $d = pq$ *où* $p \equiv 1 \pmod 8$ *et* $-q \equiv 1 \pmod 4$ *;*

(3) $r = 3$, *si* $d$ *prend la forme suivante :*
- (3.i) $d = p_1p_2$ *où* $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 8$.

*Démonstration.* Il suffit de calculer $s$ et $s_0$ et appliquer le lemme précédent. □

## 3. Structure de $G$ dans le cas où $d = 2p$

Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ un corps biquadratique avec $d$ est un entier sans facteurs carrés, $\mathbf{K}^*$ le corps de genres de $\mathbf{K}$ et $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$ le groupe de Galois du deuxième 2-corps de classes de Hilbert par rapport à $\mathbf{K}$. Il est très important de savoir que $G$ est métacyclique ou non, car dans le cas métacyclique, $G$ est connu explicitement, ainsi ses sous-groupes, ce qui permet de calculer le nombre des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{K}$ qui capitulent dans les sous-extensions de $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K}$. A. Azizi a montré dans [1] et [2] que $G$ peut être métacyclique si $d$ prend les formes (2.i) et (2.iii) (notation du Théorème 2.2) avec des conditions supplémentaires, qui sont équivalentes de dire que $G/G'$ est de type (2, 2). Dans ce cas d'après un résultat de la théorie des groupes de Taussky ([15]), $G$ est métacyclique (exactement abélien de type (2, 2), quaternionique, diédral ou semi-diédral). Mais si $d$ prend la forme (2.ii), le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$ (et $G/G'$) ne peut pas être de type (2, 2), alors la question naturelle qui se pose est : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $G$ soit métacyclique ? Dans cette section, on va répondre à cette question.

Dans ce qui va suivre, on adoptera les notations et les conventions suivantes : $p$ un nombre premier, si $p \equiv 1 \pmod 8$, rappelons que le symbole $(\frac{2}{p})_4$ (biquadratique rationnel) est égal à 1 ou $-1$, suivant que $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1 \pmod p$. Le symbole $(\frac{p}{2})_4$ est égal à $(-1)^{\frac{p-1}{8}}$. Un 2-groupe est un groupe fini dont l'ordre est une puissance de 2. Pour tout 2-groupe $H$, le rang $d(H)$ de $H$ est le nombre minimal de générateurs de $H$. Pour tout corps de nombres $L$, $h(L)$ désigne le 2-nombre de classes de $L$.

**Lemme 3.1.** *Soient $\mathcal{G}$ un groupe métacyclique et $H$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$. Alors $H$ est aussi un groupe métacyclique. En particulier* $1 \leq d(H) \leq 2$

*Démonstration.* Comme $\mathcal{G}$ est un groupe métacyclique, alors il existe un sous-groupe cyclique normal $N$ de $\mathcal{G}$ tel que le groupe quotient $\mathcal{G}/N$ est cyclique. Soit $H$ un sous-groupe de $G$, d'après le 2-ème théorème d'isomorphisme on a $HN/N \simeq H/H \cap N$. Il est claire que $HN/N$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}/N$, ce qui prouve que $H/H \cap N$ est un groupe cyclique. Autrement dit, $H$ est un groupe métacyclique, en particulier $1 \leq d(H) \leq 2$. $\square$

**Corollaire 3.2.** *Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ un corps biquadratique avec $d$ est un entier sans facteurs carrés, $\mathbf{K}^*$ le corps de genres de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}_2^{(1)}$ et $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$. Si $\mathbf{K}^*$ est une extension quadratique de $\mathbf{K}$, alors*

1. *Si $d$ prend les formes* (1.i), (1.ii), (1.iii) *et* (1.iv), *alors $G$ est cyclique ;*
2. *Si $d$ prend la forme* (3.i), *alors $G$ est non métacyclique.*

*Démonstration.* Notons $\Phi(G)$ le sous-groupe de Frattini de G, intersection de ses sous-groupes maximaux et $r = d(G)$. Il est bien connu que $\Phi(G)$ est le plus petit sous-groupe de $G$ tel que $G/\Phi(G) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$. Puisque $G' \subseteq \Phi(G) = G^2$, le groupe quotient $G/\Phi(G)$ est vu comme un sous-groupe de $G/G'$, alors $d(G) = d(G/G')$. Si $d$ prend les formes (1.i), (1.ii), (1.iii) ou (1.iv), alors le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$ est cyclique, ainsi $d(G/G') = d(G) = 1$, enfin $G$ est cyclique. Si $d$ prend la forme (3.i), alors le 2-groupe de classes est égal à 3, le lemme précédent donne que $G$ est non métacyclique, car $d(G) = d(G/G') = 3$. $\square$

**Théorème 3.3.** *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2p},\, i)$ *avec* $p$ *un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \pmod 8$, $\mathbf{K}^* = \mathbf{Q}(\sqrt{2},\, \sqrt{p},\, i)$ *le corps de genres de* $\mathbf{K}$ *et* $C_{\mathbf{K}^*,2}$ *le* 2*-groupe de classes de* $\mathbf{K}^*$*. Alors le rang de* $C_{\mathbf{K}^*,2} = 2$ *ou* 3*. De plus le rang de* $C_{\mathbf{K}^*,2} = 3$ *si et seulement si* $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = 1$.

*Démonstration.* Notons $F$ le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\, i) = \mathbf{Q}(\zeta_8)$, $r$ le rang de $C_{\mathbf{K}^*,2}$, $Am(\mathbf{K}^*/F)$ le groupe de classes ambiguës dans $\mathbf{K}^*/F$, $E_F$ est le groupe des unités de $F$ et $\mathcal{N}_{\mathbf{K}^*/F}$ l'application norme de $\mathbf{K}^*/F$. On sait que le groupe des unités de $F$ est engendré par $\varepsilon_0 = 1+\sqrt{2}$, l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et $\zeta_8$ la racine 8-ème de l'unité. De plus le nombre de classes de $F$ est égal à 1. Alors la formule de genres donne le nombre des classes ambiguës dans $\mathbf{K}^*/F$ :

$$|Am(\mathbf{K}^*/F)| = \frac{2^3}{[E_F : E_F \cap \mathcal{N}_{\mathbf{K}^*/F}(\mathbf{K}^*)]} = 2^r,$$

car il existe quatre idéaux premiers de $F$ qui se ramifient dans $\mathbf{K}^*$, ces idéaux sont au-dessus de $p$. Comme $F$ est imaginaire, $\mathbf{K}^* = F(\sqrt{p})$ et grâce à la formule de produit pour le symbole de Hilbert $(\ ,\ )_\beta$ ; le théorème de Hasse entraîne qu'une unité $\varepsilon$ de $F$ est une norme si et seulement si $(p,\, \varepsilon)_\beta = 1$ pour tout idéal premier de $F$ qui n'est pas au-dessus de 2. En utilisant les propriétés du symbole de Hilbert on trouve que

$$(p,\ \varepsilon)_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta \text{ n'est pas au-dessus de } p, \\ (\frac{p}{2})_4 & \text{si} \quad \beta \text{ au-dessus de } p \text{ et } \varepsilon = \zeta_8, \\ (\frac{p}{2})_4(\frac{2}{p})_4 & \text{si} \quad \beta \text{ au-dessus de } p \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_0, \\ (\frac{2}{p})_4 & \text{si} \quad \beta \text{ au-dessus de } p \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_0\zeta_8. \end{cases}$$

En particulier

$$E_F \cap \mathcal{N}_{\mathbf{K}^*/F}(\mathbf{K}^*) = \begin{cases} \langle \zeta_8,\ \varepsilon_0 \rangle & \text{si} \quad (\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = 1, \\ \langle i,\ \varepsilon_0 \rangle & \text{si} \quad (\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1, \\ \langle \zeta_8,\ \varepsilon_0^2 \rangle & \text{si} \quad (\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4 = -1, \\ \langle i,\ \varepsilon_0\zeta_8 \rangle & \text{si} \quad (\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4 = 1. \end{cases}$$

Enfin

$$|Am(\mathbf{K}^*/F)| = \begin{cases} 2^3 & \text{si} \qquad (\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = 1, \\ 2^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où le résultat. □

**Théorème 3.4** ([3])**.** *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2p},\ i)$ *avec* $p$ *un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \pmod 8$*,* $\mathbf{K}_2^{(1)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{K}_2^{(2)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}_2^{(1)}$ *et* $h(-p)$ *le* 2*-nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$*. Alors on a*

$$\mathbf{K}_2^{(1)} \neq \mathbf{K}_2^{(2)} \Leftrightarrow h(-p) \geq 8 \Leftrightarrow (\tfrac{2}{p})_4 = (\tfrac{p}{2})_4$$

**Lemme 3.5.** *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2p},\ i)$ *un corps biquadratique avec* $p$ *est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \pmod 8$*,* $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$*,* $\mathbf{K}_2^{(1)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{K}_2^{(2)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}_2^{(1)}$*,* $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$*,* $H$ *et* $K$ *les deux sous-groupes maximaux de* $G$ *tels que* $H/G'$ *et* $K/G'$ *sont cycliques d'ordre* 4*. Alors* $[G' : H'] = [G' : K']$*.*

*Démonstration.* Comme $p \equiv 1 \pmod 8$, alors il existe deux entiers $x$ et $y$ tels que $p = x^2 + 16y^2$. On pose $\pi_1 = x + 4yi$, $\pi_2 = x - 4yi$, $K_1 = \mathbf{K}(\sqrt{\pi_1})$ et $K_2 = \mathbf{K}(\sqrt{\pi_2})$. Puisque les deux premiers $\pi_1$ et $\pi_2$ sont ramifiés dans $\mathbf{K}/\mathbf{Q}(i)$, les idéaux engendrés par $\pi_1$ et $\pi_2$ sont des carrés d'idéaux de $\mathbf{K}$. Observons que $x$ est un nombre impair, donc $x \equiv \pm 1 \equiv i^2 \pmod 4$, alors les deux équations $\pi_i \equiv \xi^2$ sont résolubles, ce qui implique que les deux extensions $\mathbf{K}(\sqrt{\pi_1})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{\pi_2})$ sont des extensions non ramifiées de $\mathbf{K}$. Supposons que $\mathbf{K}(\sqrt{\pi}_1) = \mathbf{K}(\sqrt{\pi}_2)$, alors il existe un élément $t \in \mathbf{K}$ tel que $\pi_1 = t^2\pi_2$, ce qui montre que $p = t^2\pi_2^2$, et ce n'est pas le cas, car $\sqrt{p} \notin \mathbf{K}$. Comme l'extension $\mathbf{K}^*/\mathbf{Q}$ est normale et $\mathbf{K}(\pi_i)/\mathbf{Q}$ $(i = 1, 2)$ n'est pas normale, donc $\mathbf{K}(\pi_i) \neq \mathbf{K}^*$. Ce qui prouve que $K_1$, $K_2$ et $\mathbf{K}^*$ sont des extensions différentes non ramifiées de $\mathbf{K}$. Or, la condition $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$ donne que le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$ est de type $(2, 4)$, alors

$K_1$, $K_2$ et $\mathbf{K}^*$ sont exactement les 3 extensions quadratiques non ramifiées de $\mathbf{K}$. Observons que $K_1$ et $K_2$ sont deux corps conjugués, alors le groupe de Galois de $\mathbf{K}_2^{(1)}/K_1$ et de $\mathbf{K}_2^{(1)}/K_2$ ont la même structure qui doit être qu'un groupe cyclique d'ordre 4, alors on pose $H = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/K_1)$ et $K = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/K_2)$, ce qui entraîne que les groupes $H/G'$ et $K/G'$ sont cycliques d'ordre 4 et $[H : H'] = h(K_1) = [H : G'][G' : H'] = h(K_2) = [K : G'][G' : K']$. Enfin $[G' : H'] = [G' : K']$. $\square$

Soit $\mathcal{G}$ un 2-groupe. On désigne par $\gamma_i(\mathcal{G})$ *le i-ème terme de série centrale descendante* de $\mathcal{G}$ définie par $\gamma_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $\gamma_{i+1}(\mathcal{G}) = [\gamma_i(\mathcal{G}), \mathcal{G}]$. Si $\gamma_1(\mathcal{G})/\gamma_2(\mathcal{G})$ est de type (2, 4), la situation est schématisée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \gamma_3(\mathcal{G}) \arrow[d] & \\
& \mathcal{G}' \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
N_1 \arrow[dr] & N_3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & N_2 \arrow[dl] \\
H \arrow[dr] & M \arrow[d] & N \arrow[dl] \\
& \mathcal{G} &
\end{tikzcd}$$

N. Blackburn a montré dans [10] que $\gamma_2(\mathcal{G})/\gamma_3(\mathcal{G})$ est un groupe cyclique d'ordre $\leq 2$ et que l'exposant du groupe quotient $\gamma_i(\mathcal{G})/\gamma_{i+1}(\mathcal{G})$ est $\leq 2$ ($i \geq 2$). Soit $c$ le plus petit entier tel que $\gamma_{c+1}(\mathcal{G}) = 1$, on appel *coclasse* de $\mathcal{G}$ l'entier $n - c$ avec $2^n$ est l'ordre de $\mathcal{G}$, il est à noter que la coclasse de $\mathcal{G}$ est égal à 2 si et seulement si le groupe quotient $\gamma_i(\mathcal{G})/\gamma_{i+1}(\mathcal{G})$ est d'ordre 2 ($2 \leq i \leq c$). Dans [11] et [4], on trouvera la classification complète de tous les groupes dont la coclasse est 2.

**Lemme 3.6.** *Soit $\mathcal{G}$ un 2-groupe tel que $\mathcal{G}/\mathcal{G}' \simeq (2, 4)$. Soient $H$ et $M$ deux sous-groupes maximaux de $\mathcal{G}$ tels que $H/\mathcal{G}'$ est un groupe cyclique d'ordre 4 et $M/\mathcal{G}' \simeq (2, 2)$. Alors*

(i) *Si* $\mathcal{G}' \simeq (2,\, 2)$*, alors* $[\mathcal{G}' : H'] = 2$.

(ii) *Si la coclasse de* $\mathcal{G}$ *est égal à* $2$ *et* $d(\mathcal{G}') = 2$*, alors* $d(M) \geq 3$*. En particulier* $\mathcal{G}$ *est non métacyclique.*

*Démonstration.* (i) Puisque $\mathcal{G}/\mathcal{G}' \simeq (2,\, 4)$, alors il existe deux éléments $a$ et $b$ tels que $a^2 \equiv b^4 \equiv 1 \mod \mathcal{G}'$ et $H = \langle b,\, \mathcal{G}'\rangle$. On pose $c_2 = [a,\, b]$ et $c_{j+1} = [b,\, c_j]$ ($[x,\, y]$ le commutateur de $x$ et $y$). Alors $\mathcal{G}' = \langle c_2,\, c_3,\, ...\rangle$ , $H' = \langle c_3,\, c_4,\, ...\rangle$ et le groupe quotient $\mathcal{G}'/H'$ est engendré par la classe de $c_2$ modulo $H'$, ainsi la condition $\mathcal{G}' \simeq (2,\, 2)$ entraîne que $[\mathcal{G}' : H'] = 2$.
(ii) Dans [4], on trouve que $\mathcal{G} = \langle x_1,\, x_2,\, y\rangle$ et $\mathcal{G}' = \langle x_1^2,\, x_2\rangle$ avec $y^4 \in \mathcal{G}'$. Comme $\mathcal{G}/\mathcal{G}' \simeq (2,\, 4)$, alors $M = \langle x_1,\, y^2,\, \mathcal{G}' >= \langle x_1,\, x_2,\, y^2\rangle$ et $\mathcal{G}$ admet 3 sous-groupes normaux $N_1$, $N_2$ et $N_3$ (voir le diagramme précédent) tels que $N_1 = \langle x_1, \mathcal{G}'\rangle = \langle x_1,\, x_2\rangle$, $N_2 = \langle y^2,\, \mathcal{G}'\rangle = \langle x_1^2,\, x_2,\, y^2\rangle$ et $N_3 = \langle y^2x_1,\, \mathcal{G}'\rangle = \langle y^2x_1,\, x_1^2,\, x_2\rangle$. Supposons que $d(M) = 2$, alors $M$ admet exactement 3 sous-groupes d'indice 2, qui sont les $N_i$ $(1 \leq i \leq 3)$. Le groupe $N_4 = \langle x_1,\, x_2^2,\, y^2\rangle$ est sous-groupe d'indice 2 de $M$ tel que $N_4 \neq N_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, ce qui montre que $d(M) \geq 3$. $\square$

**Théorème 3.7.** *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2p},\, i)$ *un corps biquadratique avec* $p$ *est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \pmod 4$*,* $\mathbf{K}^*$ *le corps de genres de* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{K}_2^{(1)}$ *le 2-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{K}_2^{(2)}$ *le 2-corps de classes de Hilbert de* $\mathbf{K}_2^{(1)}$ *et* $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$*. Si* $\mathbf{K}^*$ *est une extension quadratique de* $\mathbf{K}$*. Alors* $G$ *est métacyclique non abélien si et seulement si* $p \equiv 1 \pmod 8$ *et* $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$.

*Démonstration.* Supposons que $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$, alors $G$ est un groupe non abélien et le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$ est de type $(2,\, 4)$ et $h(\mathbf{K}^*) = 2h(-p)$ où $h(-p)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ ([3]). Soit $\gamma_i(G)$ le i-ème terme de série centrale descendante de $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$. Dans ce cas $\gamma_1(G)/\gamma_2(G)$ est de type $(2,\, 4)$. Puisque $\mathbf{K}^*$ est la plus grande extension abélienne non ramifiée de $\mathbf{K}$ telle que l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$ est abélienne et si on pose $\mathcal{P} = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{Q})$, alors $M = \mathcal{P}' = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}^*)$, ainsi $\mathcal{P}'/\mathcal{P}''$ est isomorphe à $C_{\mathbf{K}^*,2}$ le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}^*$, d'après le théorème précédent le rang de $\mathcal{P}'/\mathcal{P}''$ est égal à 2. N. Blackburn a montré dans [9] que dans cette situation $\mathcal{P}'$ est un groupe métacyclique. Comme $G'$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{P}'$, alors le lemme 3.1 entraîne que $1 \leq d(G') \leq 2$.

Commençons par étudier le cas où $[G' : H'] > 2$. Soit $N_1$ l'un des deux sous-groupes normaux cycliques d'indice 4 sur $G$. Soit $L_1$ le sous-corps de

$\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$ laissé fixe par $N_1$. Suivant [7] on a :

$$[N_1 : N_1^{'}] = h(L_1) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad d(G^{'}) = 1; \\ 8 & \text{si} \quad d(G^{'}) = 2. \end{cases}$$

Comme $L_1$ est une extension non ramifiée de $\mathbf{K}^*$, alors $h(L_1) \geq h(\mathbf{K}^*)/2 = h(-p) \geq 8$, par suite $h(L_1) = h(\mathbf{K}^*)/2 = 8$ et $d(G^{'}) = 2$, la proposition 7 de [6] donne que $\mathcal{P}^{'}$ est abélien, alors il est de type (2, 8) ou (4, 4), puisque $G^{'}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}^{'}$ tel que $\mathcal{P}^{'}/G^{'}$ est de type (2, 2) et $d(G') = 2$, alors $G^{'}$ est de type (2, 2). Le (i) du lemme précédent montre que $[G^{'} : H^{'}] = 2$, ce qui affirme que le cas où $[G^{'} : H^{'}] > 2$ est impossible.

Nous avons montré que si $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$, alors $[G^{'} : H^{'}] = 2$ et $1 \leq d(G^{'}) \leq 2$. E. Benjamin, F. Lemmermeyer et C. Snyder ont montré dans [5] que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ est d'ordre $\leq 2$ et que si $G$ est non métacyclique, alors $d(G^{'}) = 1$ si et seulement si $[G^{'} : H^{'}] = 2$ et $[G^{'} : K^{'}] > 2$. Pour notre cas le lemme 3.5 donne que $[G' : H'] = [G' : K']$. Cela signifie que la coclasse de $G$ est égal à 2 avec $G$ soit un groupe métacyclique, soit un groupe (non métacyclique) dont la coclasse est 2 et $d(G^{'}) = 2$. (ii) du lemme précédent affirme que ce deuxième cas est impossible, alors $G$ est métacyclique non abélien.

Réciproquement, supposons que $G$ est métacyclique non abélien, alors le théorème précédent nous donnera que $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = \pm 1$. Si $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = 1$, alors le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}^*$ est égal à 3, ainsi $d(M) = 3$ et ce n'est pas le cas car $M$ est sous-groupe d'un groupe métacyclique. $\square$

## Références

[1] A. Azizi – « Capitulation of the 2-ideal classes of $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2}, i)$ where $p_1$ and $p_2$ are primes such that $p_1 \equiv 1 \pmod 8$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ and $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ », *Lecture notes in pure and applied mathematics* **208** (1999), p. 13–19.

[2] ______, « Sur une question de capitulation », *Proc. Amer. Math. Soc* **130** (2002), p. 2197–2202.

[3] A. Azizi et M. Taous – « Capitulation of 2-ideal classes of $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2p}, i)$ in the genus field of $\mathbf{k}$ where $p$ is prime such that $p \equiv 1 \pmod 8$ », *IJPAM* **35** (2007), no. 2, p. 481–487.

[4] C. BAGINSKI et A. KONOVALOV – « On 2-groups of almost maximal class », *Publ. Math* **65** (2004), no. 1-2, p. 97–131.

[5] E. BENJAMIN, F. LEMMERMEYER et C. SNYDER – « Imaginary Quadratic fields $k$ with Cyclic $cl_2(k^1)$ », *J. Number Theory* **67** (1997), p. 229–245.

[6] ———, « Real quadratic fields with abelian 2-class field tower », *J. Number Theory* **73** (1998), p. 182–194.

[7] ———, « Imaginary quadratic fields with $cl_2(k) = (2, 2^m)$ and rank $cl_2(k^1) = 2$ », *Pac. J. Math* **198** (2001), p. 15–31.

[8] E. BENJAMIN et C. SNYDER – « Number Fields with 2-class Number Isomorphic to (2, $2^m$) », preprint, 1994.

[9] N. BLACKBURN – « On Prime Power Groups in which the Derived Group has Two Generators », *Proc. Cambridge Phil. Soc* **53** (1957), p. 19–27.

[10] N. BLACKBURN – « On a special class of $p$-groups », *Acta Math* **100** (1958), p. 45–92.

[11] R. JAMES – « 2-groups of Almost Maximal Class », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **19** (1975), p. 343–357.

[12] H. KISILEVSKY – « Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's theorem 94 », *J. Number Theory* **8** (1976), no. 3, p. 271–279.

[13] T. KUBOTA – « Über die Beziehung der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen Zahlkörpers », *Nagoya Math. J* **6** (1953), p. 119–127.

[14] T. MCCALL, C. PARRY et R. RANALLI – « On imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic 2-class group », *J. Number Theory* **53** (1995), p. 88–99.

[15] O. TAUSSKY – « A remark on the class field tower », *J. Number Theory* **12** (1937), p. 82–85.



ABDELMALEK AZIZI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed 1
Oujda
Maroc
abdelmalekazizi@yahoo.fr

MOHAMMED TAOUS
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed 1
Oujda
Maroc
taousm@hotmail.com