ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Abdelmalek Azizi, Mohamed Ayadi,
Moulay Chrif Ismaili et Mohamed Talbi

Sur les unités des extensions cubiques cycliques non ramifiées sur certains sous-corps de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Volume 16, n° 1 (2009), p. 71-82.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_71_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 71-82 (2009)

Sur les unités des extensions cubiques cycliques non ramifiées sur certains sous-corps de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Abdelmalek Azizi
Mohamed Ayadi
Moulay Chrif Ismaili
Mohamed Talbi

Résumé

Soient k le corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ (respectivement le corps biquadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$), d un entier positif sans facteur carré, K une extension cubique cyclique non ramifiée de k, diédrale sur $\mathbf{Q}$ totalement réelle, (respectivement diédrale sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.)

On constate qu'on a deux structures possibles pour le groupe des unités U_K de K, notées *alpha* et *delta*.

On the units of unramified cyclic cubic extensions of some subfields of $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Abstract

Let k be a real quadratic fields of type $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$(respectively biquadratic of type $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$), d positive integer, square free, K an extension not ramified of k dihedral over $\mathbf{Q}$ totally real, (respectively dihedral over $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.)

We notice that have two possible structures for the group of units U_K of K, denoted by *alpha* and *delta*.

1. Introduction

Soient $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel ou $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$ un corps biqudratique, où d est un entier positif sans facteur carré, U_F le groupe des unités du corps de nombres F, T_F le groupe des unités de

Mots-clés : Corps quartiques et biquadratiques, Unités, 3-nombre de Classes .
Classification math. : 11R27, 11R29, 11R37.

torsion de F et $E_F = U_F/T_F$ le groupe des unités sans torsion de F et K une extension cubique cyclique non ramifiée de k, diédrale sur $\mathbf{Q}$ totalement réelle, ou diédrale sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Nous déterminons la structure du groupe des unités de E_K moyennant les indices $[E_K : N_K/E_K]$ et $[E_K : E_L E_{L^\sigma} E_k]$, où $L = inv(<\tau>)$ est le corps fixé par τ, avec σ et τ les générateurs d'ordre 3 et 2 de $Gal(K/\mathbf{Q})$ respectivement de $Gal(K/\mathbf{Q}(\sqrt{-3}))$.

Plus précisément , on montre que dans le cas où k (quadratique réel) deux structures de U_K sont possibles qu'on notera par"*alpha*" et "*delta*", et si de plus le 3-groupe de classes de k est de type $(3,3)$, la structure de U_K correspond au cas "*delta*" si et seulement si K admet une unité de Minkowski.

Ensuite, nous prolongeons ces résultats aux corps biquadratiques de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$. Plus précisément, nous montrons qu'on a l'équivalence $[U_k : N_K/U_K][U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$ si et seulement si la racine $3^{ème}$ de l'unité $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ est norme d'une unité de L. Le calcul des indices $[U_k : N_K/U_K]$ et $[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k]$ joue un rôle essentiel dans la résolution du problème de capitulation des 3-classes d'idéaux de k.

2. Cas d'un corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$

Soient k une extension quadratique réelle , K une extension cubique de k non ranifiée diédrale sur $\mathbf{Q}$. On adopte les notations suivantes :

$$Gal(K/\mathbf{Q}) =<\sigma,\tau>,\ \sigma^3 = \tau^2 = 1,\ \sigma\tau = \tau\sigma^2, L = inv(<\tau>),$$
$$Gal(K/k) =<\sigma>,\ \mathbf{a} = [E_K : E_k E_L E_{L^\sigma}] \text{ et } \mathbf{b} = [E_k : N_{K/k} E_k].$$

Proposition 2.1. *Chacun des cas suivants*

$$\begin{array}{lll} (\alpha): & \mathbf{a} = 1, & \mathbf{b} = 3; \\ (\beta): & \mathbf{a} = 3, & \mathbf{b} = 3; \\ (\gamma): & \mathbf{a} = 9, & \mathbf{b} = 3; \\ (\delta): & \mathbf{a} = 3, & \mathbf{b} = 1; \\ (\epsilon): & \mathbf{a} = 9, & \mathbf{b} = 1; \end{array}$$

correspond à une structure bien déterminée du groupe des unités sans torsion de K.

Démonstration. Voir [6] □

Remarque 2.2. $K/\mathbf{Q}$ est diédrale totalement réelle, k aussi quadratique réel donc $[U_k \colon N_{K/k}U_K] = [E_k \colon N_{K/k}E_K]$, car $[K \colon k] = 3, T_K = \{\pm 1\}$ et $N_{K/k}(-1) = -1$. On a aussi

$$\begin{aligned}[E_K \colon E_L E_{L^\sigma} E_k] &= [U_K/\{\pm 1\} \colon U_L/\{\pm 1\}U_{L^\sigma}/\{\pm 1\}U_k/\{\pm 1\}] \\ &= [U_K/\{\pm 1\} \colon U_L U_{L^\sigma} U_k/\{\pm 1\}] \\ &= [U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k]\end{aligned}$$

Lemme 2.3. *On suppose que le nombre de classes de k est divisible par 3, alors* $[E_k \colon E_k^3] = \mathbf{ab}$.

Démonstration. Puisque le nombre de classes de k est divisible par 3, il existe une extension non ramifiée cubique cyclique K sur k, diédrale sur $\mathbf{Q}$ totalement réelle. D'autre part, on a :

$$[E_k \colon E_k^3] = [U_k \colon N_{K/k}U_K][N_{K/k}U_K \colon U_K^3],$$

donc :

$$[U_k \colon N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k \colon E_k^3]}{[N_{K/k}U_K \colon U_K^3]}. \tag{2.1}$$

Aussi : $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3$. En effet, $L/\mathbf{Q}$ est totalement réelle, donc $U_L = \{\pm 1\}. < e_1, e_2 >$, où $\{e_1, e_2\}$ est un système fondamental d'unités de L. Donc $U_L U_{L^\sigma} = \{\pm 1\}. < e_1, e_2, e_1^\sigma, e_1^\sigma >$, alors si pour $i \in \{1, 2\}$, $\varepsilon = e_i e_i^\sigma \in U_L U_{L^\sigma}$, on a :

$$\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}(e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}(e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2},$$

or : $L = inv(< \tau >$ i.e $e_i^\tau = e_i$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}(e_i^\tau)^{1+\sigma+\sigma^2} &= (e_i^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} \\ &= (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{k/\mathbf{Q}}(e_i) \in \{\pm 1\},\end{aligned}$$

d'où $N_{K/k}(\varepsilon) \in U_K^3$. Si $\varepsilon = e_1 e_2$, on a $N_{K/k}(\varepsilon) = (e_1 e_2)^{1+\sigma+\sigma^2}$. Comme $e_1 e_2 \in L$, on déduit que

$$\begin{aligned}(e_1 e_2)^{1+\tau} = (e_1 e_2)^2 &\Longrightarrow ((e_1 e_2)^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} = (N_{K/k}(e_1 e_2))^2 \\ &\Longrightarrow N_{K/\mathbf{Q}}(e_1 e_2) = (e_1 e_2)^{1+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{K/\mathbf{Q}}(e_1 e_2)^2,\end{aligned}$$

donc $N_{K/\mathbf{Q}}(e_1e_2)^2 = 1$. On raisonne de la même façon pour $\varepsilon = e_i$, $i \in \{1,2\}$, et $\varepsilon = e_1^\sigma e_2^\sigma$. Comme $N_{K/k}(U_k) = U_k^3$, alors $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3$. De (2.1) on tire :

$$[U_k\colon N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k\colon E_k^3]}{[N_{K/k}U_K\colon N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)]}.$$

Si $N\colon U_K \to U_k$ est l'application norme de l'extension K/k, alors on a

$$[N(U_K)\colon N(U_L U_{L^\sigma} U_k)] = \frac{[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k]}{[\ker N\colon \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k]},$$

donc

$$[U_k\colon N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k\colon E_k^3][\ker N\colon \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k]}{[U_k\colon U_L U_{L^\sigma} U_k]},$$

et comme $[\ker N\colon \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k] = 1$ (d'après [5]) on tire que

$$[U_k\colon N_{K/k}U_K][U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = [E_k\colon E_k^3]$$

c'est à dire $\mathbf{ab} = [E_k\colon E_k^3]$. □

Lemme 2.4. *Si K/k une extension non ramifiée, alors on a*

$$E_k \cap N_{K/k}(K^\times) = E_k.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{P}$ un ideal premier de k et $\mathcal{B}$ un diviseur premier de $\mathcal{P}$ dans K, alors $K_\mathcal{B}/k_\mathcal{P}$ est une extension non ranifiée ($K_\mathcal{B}, K_\mathcal{P}$ les localisés en β et $\mathcal{P}$ respectivement), donc si $x \in E_k$, il existe γ unité de $K_\mathcal{B}$ tel que $x = N_{K_\mathcal{B}}(\gamma)$ et ceci pour tout idéal $\mathcal{P}$ premier fini de k,. D'autre part, si $\mathcal{P}_\infty$ est un premier réel infini de k non ramifié de K , $\mathcal{B}_\infty$ un diviseur de $\mathcal{P}_\infty$ dans K, alors les completions de k et K relativement à $\mathcal{P}_\infty$ et $\mathcal{B}_\infty$ sont $\mathbf{R}$, il est donc naturel de dire que les symboles de Forbenius associés , aux idéaux infinis sont égaux à 1, d'où tout élément de K est norme infinie d'un élément de k et comme l'extension K/k est cyclique, alors x est norme globale dans K (voir [3]). □

Lemme 2.5. *On suppose que K/k est non ramifiée, on note par S_K le 3-groupe de classes de K, $S_K^{(\sigma)} = \{[A] \in S_K\ /[A]^\sigma = [A]\}$ le groupe des classes amligues, $S_{K,fr}^{(\sigma)} = \{[A] \in S_K\ /A^\sigma = A\}$ le sous-groupe formé par les classes fortement ambigues, alors on a $\#S_K^{(\sigma)} = b \times \#S_{K,fr}^{(\sigma)}$.*

Démonstration. Soit l'application

$$\psi = \begin{cases} S_K^{(\sigma)} \longrightarrow U_k/N_{K/k}U_K \\ c = [A] \mapsto N_{K/k}(x)N_{K/k}U_K \end{cases}$$

où x est défini comme suit : si $c = [A] \in S_K^{(\sigma)}$, alors $c^{1-\sigma} = 1$ et $A^{\sigma-1} = (x)$ avec x un élément de K, $N_{K/k}(x)$ est une unité de E_k. L'application ψ est bien définie car si $c = [A] = [B]$ et $B^{\sigma-1} = (y)$ alors il existe $\zeta \in K^*$ tel que $A = \zeta B$, et $A^{\sigma-1} = \zeta^{\sigma-1}B^{\sigma-1} \Longrightarrow (x) = \zeta^{\sigma-1}(y) \Longrightarrow \exists z \in U_K$ tel que $x = z\zeta^{\sigma-1}y \Longrightarrow N_{K/k}(x) = N_{K/k}(z)N_{K/k}(y)$, ce qui montre que $N_{K/k}(x)$ et $N_{K/k}(y)$ ont même classe modulo le groupe de normes des unités de K.

L'application ψ est surjective. En effet, si $\eta \in E_k$ d'après le lemme 2.4, il existe $x \in K^\times$ tel que $\eta = N_{K/k}(x)$ donc $N_{K/k}((x)) = (1)$, d'après le théorème 90 de Hilbert $(x) = C^{\sigma-1}$, où C est un idéal de K et par suite $\psi([C]) = \eta N_{K/k}U_K$. De plus on a $\ker\psi = \{c \in S_K^{(\sigma)}/\psi(c) = 1\}$, donc $c = [A] \in \ker\psi \Leftrightarrow x = N_{K/k}(\rho)$ où ρ est une unité de K, comme $A^{\sigma-1} = (z)$ et $N_{K/k}(z) = x$ alors z/ρ est une unité de norme 1, d'où $\rho/z = \beta^{1-\sigma} \Leftrightarrow \rho = z\beta^{1-\sigma}$ donc $z/\rho\beta^{1-\sigma} = 1$, comme ρ est une unité on aurait $(\beta A)^{1-\sigma} = 1$ d'où βA est ambigue et $[\beta A] = [A] = c \in S_{K,fr}^{(\sigma)}$, et par suite $\ker\psi \subset S_{K,fr}^{(\sigma)}$. L'autre inclusion est évidente, donc d'après le premier théorème d'isomorphisme, on déduit que

$$S_K^{(\sigma)}/S_{K,fr}^{(\sigma)} \simeq Im\psi = U_k/N_{K/k}U_K$$

et $\#S_K^{(\sigma)}/S_{K,fr}^{(\sigma)} = \mathbf{b}$. □

Théorème 2.6. *On suppose que K/k est non ramifiée, et $S_k \simeq (3,3)$, les cas (β) et (α) et (ε) ne peuvent avoir lieu. De plus, les trois affirmations sont équivalentes :*

(1) *la structure de E_K correspond au cas (δ).*

(2) *le sous-groupe des classes fortement ambigues dans K/k n'est pas trivial.*

(3) *le corps K admet une unité de Minkowski.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3, $\mathbf{ab} = [E_k \colon E_k^3]$. Comme $E_k/E_k^3 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{ab} = 3$, ce qui élimine les types $(\beta), (\alpha)$ et (ε). On montre les implications 2) $\Longrightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 3) et 1) $\Longrightarrow$ 2).

Soit $\mathcal{A}$ un idéal de K non principal tel que $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{A}$, alors $[\mathcal{A}] \neq 1$ est ambigue et $[A] \in S_{K,fr}^{(\sigma)}$, d'autre part on a $\#S_K^{(\sigma)} = 3$, car par [2] $\#S_K^{(\sigma)} = \#S_k \times 3^{t-2+q}$ avec t le nombre des premiers de k qui se ramifient dans K et

$$q = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ est norme dans } K/k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où e est l'unité fondamentale de k, et dans notre cas, K/k est non ramifiée, donc $t = 0$ et $q = 1$ [lemme 2.5]. Puisque S_k est de type $(3,3)$, alors $\#S_K^{(\sigma)} = 9/3 = 3$ entraîne que $S_{K,fr}^{(\sigma)} = S_K^{(\sigma)}$ et $\mathbf{b} = 1$ [lemme 2.5], d'où $\mathbf{a} = 3$ et on a le type (α). Comme l'anneau des entiers du sous-corps réel maximal de $\mathbf{Q}(\zeta_3)$ ($\zeta_3^3 = 1$, la racine $3^{\grave{e}me}$ de l'unité) est $\mathbf{Z}$ et il est principal et $K/\mathbf{Q} \simeq D_3$, alors d'après [6] le type (δ) est une condition nécessaire et suffisante pour que K admette une unité de Minkowski.

Si toutes les classes ambigues ne contiennent aucun idéal ambigue, on aurait $S_{K,fr}^{(\sigma)}$ trivial, d'où $\#S_K^{(\sigma)} = \mathbf{b}$ [lemme 2.4] et donc $\mathbf{b} = 3$ et par suite $\mathbf{a} = 1$ c'est à dire le type (δ). □

Exemple 2.7. On prend $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ où $d = 4uw^3 - 27u^2$ avec u et w sont premiers entre eux, et $P(x) = x^3 - uwx - u^2$ irréductible, de plus u et w remplissent l'une des conditions suivantes :

- $3 \nmid w$.
- $3 \mid w \quad uw \not\equiv 3 \bmod 9 \quad u = w \pm 1 \bmod 9$.
- $3 \mid w \quad uw \equiv 3 \bmod 9 \quad u \equiv w \pm 1 \bmod 27$.

Soient θ une racine de P, $L = \mathbf{Q}(\theta)$, u et w sont choisis de manière a avoir le discriminant de L égal a d. On a $ranS_L = ranS_k - 1$, dans notre cas on a toujours S_L est cyclique. D'après [4], le corps de décomposition de P définit une extension cubique cyclique non ramifiée de k, qu'on notera K diéderale sur $\mathbf{Q}$ (car disc$(P) = u^2d$) n'est pas un carré, et on a $h_K = ah_L^2$, où h désigne le 3-nombre de classes de F (voir [6]). En se basant sur tout cela et à l'aide du logiciel PARI nous donnons des exemples qui illustrent les deux types de structure qu'on notera par *alpha* et *delta*.

$u = 1$

w	$4w^3 - 27 = d$	h_L	h_K	structure
38	219461	3	3^2	*alpha*
64	1048549	3	3^2	*alpha*
80	2047973	3	3^2	*alpha*
88	2725861	3	3^2	*alpha*
89	2819849	3	3^3	*delta*
98	3764741	3	3^3	*delta*
113	5771561	3	3^3	*delta*
121	7086217	3	3^2	*alpha*
122	7263365	9	3^4	*alpha*
146	12448517	9	3^4	*alpha*
151	13771777	3	3^3	*delta*
187	26156785	3	3^2	*alpha*
227	46788305	9	3^4	*alpha*
229	48035929	3	3^3	*delta*
244	58107109	3	3^2	*alpha*
248	61011941	3	3^2	*alpha*
265	74438473	3	3^3	*delta*
295	102689473	3	3^2	*alpha*
302	110174405	3	3^3	*delta*
305	113490473	3	3^2	*alpha*
310	119163973	3	3^3	*delta*
314	123836549	9	3^5	*delta*
322	133544965	3	3^2	*alpha*
331	145058737	3	3^2	*alpha*
340	157215973	9	3^5	*delta*
343	161414401	3	3^3	*delta*
368	199344101	3	3^2	*alpha*
380	219487973	3	3^2	*alpha*

$u \neq 1$

u	w	$d = 4uw^3 - 27u^2$	h_L	h_K	structure
3	74	4862445	3	3^2	*alpha*
3	143	35090241	3	3^3	*delta*
5	76	8778845	3	3^3	*delta*
5	116	31217245	3	3^2	*alpha*
5	131	44961145	3	3^3	*delta*
5	191	139356745	3	3^2	*alpha*
7	32	916181	3	3^2	*alpha*
7	82	15436981	3	3^2	*alpha*
7	86	17808245	9	3^4	*alpha*
7	122	50842421	3	3^3	*delta*
7	188	186049493	3	3^2	*alpha*
11	38	2411101	3	3^2	*alpha*
11	103	48076721	9	3^5	*delta*
11	133	103512761	3	3^2	*alpha*
11	134	105865309	3	3^2	*alpha*
11	172	223888445	3	3^2	*alpha*
13	22	549133	3	3^2	*alpha*
13	25	807937	3	3^2	*alpha*
13	44	4425005	3	3^2	*alpha*
13	58	10141261	3	3^3	*delta*
15	49	7052865	3	3^2	*alpha*

Remarque 2.8. Chaque corps de décomposition des pôlynomes suivants admet une unité de Minkowski

$$\begin{array}{llll} 1) & P(x) = x^3 - 89x - 1; & 2) & P(x) = x^3 - 98x - 1; \\ 3) & P(x) = x^3 - 113x - 1; & 4) & P(x) = x^3 - 256x - 1; \\ 5) & P(x) = x^3 - 340x - 1; & 6) & P(x) = x^3 - 343x - 1; \end{array}$$

3. Cas du corps biquadratique $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Dans ce cas, k désigne une extension quadratique du corps $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, on suppose toujours que le 3-groupe de classes $S_k \simeq (3,3)$. On singale que les lemmes 2.4 et 2.5 restent valables dans ce cas, et on démontre un lemme qui généralise le lemme 2.3 dans le cas où F est un corps le nombres ayant nombre de classes premier à 3, qui est la base de notre étude dans cette section.

Lemme 3.1. *Soit F un corps de nombres, dont le nombre de classes est premier à 3, et soit k une extension quadratique de F. Si K est une extension cyclique non ramifiée de degré 3 sur k, alors K/F est galoisienne et diédrale de degré 6, et on a :*

$$[U_K\colon U_LU_{L^\sigma}U_k][U_k\colon N_{K/k}U_k] = \frac{[U_k\colon U_k^3][U_F\colon N_{L/F}U_L]}{[U_F\colon U_F^3]}$$

où L est l'une des extensions cubiques non galoisiennes de F.

Démonstration. D'après [7] K/F est une extension galoisienne et diédrale. Posons $Gal(K/F) \simeq D_3 =< \sigma, \tau >$ tel que $\sigma^3 = \tau^2 = 1,\ \sigma\tau = \tau\sigma^2$ $L = inv(< \tau >)$. On a $[U_k\colon U_k^3] = [U_k\colon N_{K/k}U_K][N_{K/k}U_k\colon U_k^3]$, donc :

$$\begin{aligned}[U_k\colon N_{K/k}U_K] &= \frac{[U_k\colon U_k^3]}{[N_{K/k}U_K\colon U_k^3]} \qquad (3.1)\\ &= \frac{[U_k\colon U_k^3]}{[N_{K/k}U_K\colon U_k^3N_{L/F}U_L][U_k^3N_{L/F}U_L\colon U_k^3]}.\end{aligned}$$

D'autre part, on montre que $N_{K/k}(U_LU_{L^\sigma}U_k) = U_k^3N_{L/F}U_L$. En effet, soient $\{e_1, e_2, ...e_r\}$ un système fondamental d'unités de U_L, et $\varepsilon \in U_LU_{L^\sigma}$, alors si $\varepsilon = e_ie_i^\sigma (1 \leq i \leq r)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} =&(e_ie_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}(e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}(e_i)^{1+\sigma+\sigma^2}\\ &\Longrightarrow \varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i^2)^{1+\sigma+\sigma^2}.\end{aligned}$$

Comme $L = inv(< \tau >)$ on déduit que

$$\begin{aligned}N_{K/k}(\varepsilon) =&(e_i^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} = e_i^{1+\sigma+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{K/F}(e_i)\\ =&N_{L/F} \circ N_{K/L}(e_i) \Longrightarrow N_{K/k}(\varepsilon) = N_{L/F}(e_i^2) \in N_{L/F}U_L.\end{aligned}$$

Si $\varepsilon = e_ie_j$ $(i \neq j)$ on a $\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_ie_j)^{1+\sigma+\sigma^2}$, or $e_ie_j \in U_L$ et donc $(e_ie_j)^{1+\tau} = (e_ie_j)^2$ entraîne que $(N_{K/k}(\varepsilon))^2 = (e_je_i)^{1+\tau}$, on raisonne comme le cas précédent et on obtient $(N_{K/k}(\varepsilon))^2 = N_{L/F}((e_je_i)^2) \in N_{L/F}U_L$, or $U_F/N_{L/F}U_L$ est un 3–groupe, alors $N_{K/k}(\varepsilon) \in N_{L/F}U_L$, (même raisonnement pour le cas $\varepsilon = e_i^\sigma e_i^\sigma$). On a aussi $N_{K/k}(U_k) = U_k^3$, donc $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3 N_{L/F} U_L$. De (3.1) on tire :

$$[U_k \colon N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k \colon U_k^3]}{[N_{K/k} U_K \colon N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)][U_k^3 N_{L/F} U_L \colon U_k^3]}$$

et comme dans le lemme 2.3 on a

$$[N_{K/k} U_K \colon N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)] = [U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k)],$$

alors :

$$[U_k \colon N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k \colon U_k^3]}{[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_k^3 N_{L/F} U_L \colon U_k^3]}.$$

D'autre part,

$$[U_k^3 N_{L/F} U_L \colon U_k^3] = [N_{L/F} U_L \colon N_{L/F} U_L \cap U_k^3] = [N_{L/F} U_L \colon U_F^3]$$

et aussi $[U_F \colon U_F^3] = [U_F \colon N_{L/F} U_L][N_{L/F} U_L \colon U_F^3]$ implique que

$$[U_{kL/F}^3 U_L \colon U_k^3] = \frac{[U_F \colon U_F^3]}{[U_F \colon N_{L/F} U_L]}.$$

Finalement on a : $[U_k \colon N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k \colon U_k^3][U_F \colon N_{L/F} U_L]}{[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_F \colon U_F^3]}$ et

$$[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K \colon N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k \colon U_k^3][U_F \colon N_{L/F} U_L]}{[U_F \colon U_F^3]}.$$

□

Proposition 3.2. $[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K \colon N_{K/k} U_K] = 3$ *si et seulement si* ζ_3 *est norme d'une unité de* L *(la norme de l'extension* L/F *).*

Remarque 3.3. Lorsque ζ_3 est norme d'une unité de L, où ζ_3 est racine $3^{ème}$ de l'unité, les cas possibles sont :

$(\widetilde{\alpha})$ $[U_K \colon N_{K/k} U_K] = 3$; $[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 1$.

$(\widetilde{\delta})$ $[U_K \colon N_{K/k} U_K] = 1$; $[U_K \colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$.

Ce qui caratérise deux types de structures possibles comme dans le premier cas.

Preuve de la proposition. Calculons les indices $[U_F \colon U_F^3]$ et $[U_k \colon U_k^3]$, on a $U_F = \{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\} = \{\pm 1, \pm\zeta_3, \zeta_3^2\}$, donc il est clair que $U_F^3 = \{\pm 1\}$ et $[U_F \colon U_F^3] = 3$. D'autre part, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{d})$ $d \neq 1$ et 3 d'après [1], si

$\varepsilon_0 = s + t\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, déterminer un système fondamental d'unités de k revient à savoir quand est ce que $3\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Plus précisément :

i) Si ε_0 est de norme -1, $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k.

ii) Si ε_0 est de norme 1, alors $\{\sqrt{-\varepsilon_0}\}$ est un système fondamental d'unités de k si et seulement si $6(s \pm 1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$, et $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k sinon.

Donc si $N(\varepsilon_0) = 1$ ou $N(\varepsilon_0) = -1$ et $6(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$, $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k, soit $\varepsilon \in U_k$ alors $\varepsilon = \zeta(\varepsilon_0)^n$ où $\zeta \in U_F$, d'où $\varepsilon^3 = \zeta^3(\varepsilon_0^3)^n = \pm(\varepsilon_0^3)^n \Longrightarrow U_k/U_k^3 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et on a $[U_k\colon U_k^3] = 9$. Si $N(\varepsilon_0) = -1$ et $6(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. Soit $\varepsilon \in U_k$ alors $\varepsilon = \zeta(\sqrt{-\varepsilon_0})^n$ où $\zeta \in U_F$ d'où $\varepsilon = \zeta(\varepsilon_0)^n = \pm((\sqrt{-\varepsilon_0})^3)^n \Longrightarrow [U_k\colon U_k^3] = 9$, donc d'après le lemme 3.1 on a $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K\colon N_{K/k}U_K] = 3[U_F\colon N_{L/F}U_L]$, d'où si ζ_3 est norme d'une unité de L on déduit facilement que $[U_F\colon N_{L/F}U_L] = 1$, sinon $[U_F\colon N_{L/F}U_L] = 3$ donc $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K\colon N_{K/k}U_K] = 3 \Leftrightarrow \exists\varepsilon \in U_L$ tel que $N_{L/F}(\varepsilon) = \zeta_3$. □

Corollaire 3.4. *Les cas possibles des deux indices* $[U_K\colon N_{K/k}U_K]$ *et* $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k]$ *sont :*

$(\widetilde{\alpha})$ $[U_K\colon N_{K/k}U_K] = 3$; $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 1$

$(\widetilde{\beta})$ $[U_K\colon N_{K/k}U_K] = 3$; $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$

$(\widetilde{\delta})$ $[U_K\colon N_{K/k}U_K] = 1$; $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$

$(\widetilde{\varepsilon})$ $[U_K\colon N_{K/k}U_K] = 1$; $[U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 9$

ce qui caractérise complètement la structure du groupe des unités de K.

Démonstration. Les conditions du lemme 2.4 et du lemme 2.5 sont remplies, d'autre part, d'après la formule des classes ambigues on a le nombre des classes ambigues est 3 d'où les valeurs possibles de $[U_K\colon N_{K/k}U_K]$ sont 1 et 3 et comme $[U_K\colon N_{K/k}U_K][U_K\colon U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3^m$ avec $m = 1$ ou $m = 2$, alors les cas possibles sont $(\widetilde{\alpha}), (\widetilde{\beta}), (\widetilde{\delta})$ et $(\widetilde{\varepsilon})$. □

Exemple 3.5. Si $d = (4(3m)^3 + 1)$ $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$, $F_1 = \mathbf{Q}(\theta)$ où θ est une racine de $P(x) = X^3 - 9mX^2 - 1$, $L = F_1(\sqrt{-3})$ et $K = L.k$, et on a d'après [5] $h_K = ah_L^2 = 3$. D'autre part, d'après [7] la tour de Hilbert dans ce cas s'arrête au premier étage donc $h_L = 0$ et par suite $rang_3(L) = 0$, ce qui entraîne que ζ_3 n'est pas norme d'une unité de L voir [5], et aussi $[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$, et donc $[U_k : N_{K/k} U_K] = 3$ c'est à dire le type (β).

Références

[1] A. Azizi – « Unités de certains corps de nombres imaginaires et abeliens sur **Q**. », *Ann.Sci.Math. Quebec* **23** (1999), p. 71–92.

[2] F. Gerth, III – « Ranks of 3-class groups of non-Galois cubic fields », *Acta Arith.* **30** (1976), no. 4, p. 307–322.

[3] G. Januzs – *Algerbraic number fields*, Academic press newyork,baton rouge, louisiana, 1992.

[4] Y. Kishi et K. Miyake – « Parametrization of the quadratic fields whose class numbers are divisible by three », *J. Number Theory* **80** (2000), no. 2, p. 209–217.

[5] F. Lemmermeyer – « Class groups of dihedralextansions », *Math, Nacher* **278** (2005), p. 679–691.

[6] N. Moser – « Unités et nombre de classes d'une extension diédrale de **Q** », *Société mathématique de France. Astérisque* (1975), p. 24–25.

[7] E. Yoshiba – « On the 3−class field tower of some biquadratic fields », *Acta Arithmetica* **107.4** (2003), p. 327–336.

Abdelmalek Azizi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
abdelmalekazizi@yahoo.fr

Mohamed Ayadi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
Ayadi@univ.ac.ma

Moulay Chrif Ismaili
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
mcismaili@yahoo.fr

Mohamed Talbi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
ksirat1971@yahoo.fr