ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Abdelmalek Azizi et Mohammed Talbi

Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ où $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$

Volume 16, n° 1 (2009), p. 57-69.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_57_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 57-69 (2009)

Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ où $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$

Abdelmalek Azizi
Mohammed Talbi

Résumé

Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ où p et q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $\mathbf{K}_2^{(2)}/K$. D'après [4], la 2-partie $C_{2,\mathbf{K}}$ du groupe de classes de $\mathbf{K}$ est de type $(2,2)$, par suite $\mathbf{K}_2^{(1)}$ contient trois extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$; $i = 1,2,3$. Dans ce papier, on s'interesse au problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{F}_i$ $(i = 1,2,3)$ et à déterminer la structure de G.

Capitulation of 2-class ideals of $\mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *where* $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$

Abstract

Let $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ where p and q are two different prime numbers such that $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ the Hilbert 2-class field of $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ the Hilbert 2-class field of $\mathbf{K}_2^{(1)}$ and G the Galois group of $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$. According to [4], $C_{2,\mathbf{K}}$, the Sylow 2-subgroup of the ideal class group of $\mathbf{K}$ is isomorphic to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, consequently $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K}$ contains three extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ $(i = 1,2,3)$. In this paper, we are interested in the problem of capitulation of the classes of $C_{2,\mathbf{K}}$ in $\mathbf{F}_i$ $(i = 1,2,3)$ and to determine the structure of G.

1. Introduction

Soient $\mathbf{K}$ un corps de nombres, $\mathbf{F}$ une extension non ramifiée de $\mathbf{K}$ et p un nombre premier. L'extension $\mathbf{K}^{(1)}$ de $\mathbf{K}$, abélienne maximale et non

Mots-clés : Corps Quartiques, Groupes d'Unités, Corps de Classes de Hilbert, Capitulation.
Classification math. : 11R27, 11R29, 11R37.

ramifiée pour tous les idéaux premiers, finis et infinis, est dite corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$. De même l'extension $\mathbf{K}_p^{(1)}$ de $\mathbf{K}$ dont le degré est une puissance de p, abélienne maximale et non ramifiée pour tous les idéaux premiers, finis et infinis, est dite p-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$. Dans le cas où $\mathbf{F}$ est égal au corps de classes de Hilbert $\mathbf{K}^{(1)}$ de $\mathbf{K}$, D. Hilbert avait conjecturé que toutes les classes de $\mathbf{K}$ capitulent (deviennent principaux) dans $\mathbf{K}^{(1)}$ (théorème de l'idéal principal). La preuve de ce dernier théorème a été réduite par E. Artin à un problème de la théorie des groupes, et c'est Ph. Furtwängler qui l'avait achevée. Dans le cas où $\mathbf{F}/\mathbf{K}$ est une extension cyclique et $[\mathbf{F} : \mathbf{K}] = p$, un nombre premier, Hilbert avait prouvé qu'il y a au moins une classe non triviale dans $\mathbf{K}$ qui capitule dans $\mathbf{F}$ (théorème 94). De plus, on a :

Théorème 1.1. *Soit* $\mathbf{F}/\mathbf{K}$ *une extension cyclique non ramifiée de degré un nombre premier, alors le nombre des classes qui capitulent dans* $\mathbf{F}/\mathbf{K}$ *est égal à :*

$$[\mathbf{F} : \mathbf{K}][E_{\mathbf{K}} : N_{\mathbf{F}/\mathbf{K}}(E_{\mathbf{F}})],$$

où $E_{\mathbf{M}}$ *est le groupe des unités d'un corps de nombres* $\mathbf{M}$.

Démonstration. Voir [6]. □

Dans toute la suite de cette section on désigne par $\mathbf{K}$ un corps de nombres, $C_{\mathbf{K}}$ son groupe de classes, $C_{2,\mathbf{K}}$ la 2-partie de $C_{\mathbf{K}}$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}_2^{(1)}$, G le groupe de Galois de $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$ et G' son sous-groupe dérivé. Alors $G' \simeq Gal(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}_2^{(1)})$ et $G/G' \simeq Gal(\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K})$, et on sait par la théorie des corps de classes que $Gal(\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K}) \simeq C_{2,\mathbf{K}}$, ainsi $G/G' \simeq C_{2,\mathbf{K}}$.

Soient $\mathbf{F}$ une extension cyclique non ramifiée de $\mathbf{K}$ et j : l'application de $C_{\mathbf{K}}$ dans $C_{\mathbf{F}}$ qui fait correspondre à la classe d'un idéal $\mathcal{A}$ de $\mathbf{K}$, la classe de l'idéal engendré par $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{F}$ et N la norme de $\mathbf{F}/\mathbf{K}$. Alors, on dit que l'extension $\mathbf{F}/\mathbf{K}$ est :

- de type (A) si et seulement si $|ker j \cap N(C_{\mathbf{F}})| > 1$,
- de type (B) si et seulement si $|ker j \cap N(C_{\mathbf{F}})| = 1$.

Définition 1.2. Soient m un entier > 2, Q_m le groupe des quaternions, D_m le groupe diédral et S_m le groupe semi-diédral d'ordres 2^m. Chaque groupe est engendré par deux éléments x et y et ces groupes sont définis comme suit :

$$\begin{array}{llll} Q_m & =< x, y > & \text{où} & x^{2^{m-2}} = y^2 = a, \quad a^2 = 1,\, y^{-1}xy = x^{-1}, \\ D_m & =< x, y > & \text{où} & x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1}, \\ S_m & =< x, y > & \text{où} & x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1}. \end{array}$$

Supposons maintenant que $C_{2,\mathbf{K}} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, alors $G/G' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ce qui donne que G' est cyclique. Donc la tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$ s'arrête en $\mathbf{K}_2^{(2)}$. En plus on sait que si G est d'ordre 2^m, $m > 1$, et $G/G' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, alors, soit G est isomorphe à Q_m, D_m, ou S_m ($m > 2$), soit à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ($m = 2$). Dans tous ces cas, on a $G' =< x^2 >$ et les trois sous-groupes d'indice 2 dans G sont : $H_1 =< x >$, $H_2 =< x^2, y >$ et $H_3 =< x^2, xy >$, et si $G' \neq 1$, alors $\mathbf{K}_2^{(1)} \neq \mathbf{K}_2^{(2)}$ et $< x^4 >$ est l'unique sous-groupe de G' d'indice 2. Soient $\mathbf{L}$ le sous-corps de $\mathbf{K}_2^{(2)}$ laissé fixe par $< x^4 >$, $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, 3$) le sous-corps de $\mathbf{K}_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i et j_i l'application j définie pour $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i$.

Théorème 1.3. *On suppose que $G/G' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Alors on a :*
(1) Si $\mathbf{K}_2^{(1)} = \mathbf{K}_2^{(2)}$, alors les corps $\mathbf{F}_i$ sont de type (A), $|ker j_i| = 4$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
(2) Si $Gal(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \simeq Q_3$, alors les corps $\mathbf{F}_i$ sont de type (A), $|ker j_i| = 2$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq Q_3$.
(3) Si $Gal(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \simeq D_3$, alors les corps $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$ sont de type (B) et $|ker j_2| = |ker j_3| = 2$. De plus ; si $\mathbf{F}_1$ est de type (B) alors $|ker j_1| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si $\mathbf{F}_1$ est de type (A) et $|ker j_1| = 2$, alors $G \simeq Q_m$. Enfin si $\mathbf{F}_1$ est de type (A) et $|ker j_1| = 4$, alors $G \simeq D_m$.

Démonstration. Voir [8]. □

Dans le cas où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ avec p et q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$, on sait, D'après [4], que $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$, ainsi $\mathbf{K}_2^{(1)}$ contient trois extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ ($i = 1, 2, 3$). Notre but est d'étudier, dans ce cas, le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, 3$) et de déterminer la structure du groupe de Galois G de $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$.

2. Unités de certains corps de nombres de degré 4 ou 8 sur Q

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $d_3 = d_1 d_2$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $\mathrm{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$ (resp. $\mathrm{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{d_2})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{d_3})$), $\mathbf{K}_0 = \mathrm{k}_1\mathrm{k}_2$ et N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de $\mathbf{K}_0/\mathrm{k}_1$ (resp. $\mathbf{K}_0/\mathrm{k}_2$, $\mathbf{K}_0/\mathrm{k}_3$). D'après [9], on sait qu'un système fondamental d'unités (**SFU**) de $\mathbf{K}_0$ est, à une permutation près des indices, l'un des systèmes suivants :

(i)	$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$;	
(ii)	$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = 1)$;
(iii)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = 1)$;
(iv)	$\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_1(\varepsilon_2) = N_1(\varepsilon_3) = 1)$;
(v)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = N_3(\varepsilon_j) = 1,\ j = 1, 2)$;
(vi)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = N_2(\varepsilon_3) = \pm 1)$.

Proposition 2.1. *Soit $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres, abélien réel et β un entier algébrique de $\mathbf{K}_0$, positif, sans facteurs carrés. On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne sur $\mathbf{Q}$ et que $i = \sqrt{-1}$ n'appartient pas à $\mathbf{K}$. Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r\}$ un* **SFU** *de $\mathbf{K}_0$. On choisit, sans restreindre la généralité, les unités ε_j positives. Alors on a :*
(1) *S'il existe une unité de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}...\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \{0, 1\}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un* **SFU** *de* **K**.
(2) *Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r\}$ est un* **SFU** *de* **K**.

Démonstration. Voir [1]. □

Lemme 2.2. *Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-n(2+\sqrt{2})})$ avec n un entier naturel impair et sans facteurs carrés, alors $\{\varepsilon_1\}$ est un* **SFU** *de* **K** *où ε_1 est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.*

Démonstration. On a $\{\varepsilon_1\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et $n\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, alors d'après la proposition 2.1, $\{\varepsilon_1\}$ est un SFU de **K**. □

Lemme 2.3. *Soient d un entier relatif sans facteurs carrés et $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ où x et y sont des entiers ou bien des demi-entiers. On suppose que ε est de norme 1. Alors $2(x \pm 1)$ et $2d(x \pm 1)$ ne sont pas des carrés dans* **Q**.

Démonstration. Voir [2]. □

Lemme 2.4. *Soient p un nombre premier impair et $\varepsilon = x + y\sqrt{2p}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2p})$. On suppose que ε est de norme 1, alors $(x \pm 1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et 2ε est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2p})$.*

Démonstration. Voir [2]. □

Lemme 2.5. *Soient p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$ et $\varepsilon = s + t\sqrt{2pq}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$. Alors $(s-1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et 2ε est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$.*

Démonstration. On a ε est de norme 1, donc $(s+1)(s-1) = 2pqt^2$, et comme le plus grand commun diviseur de $(s+1)$ et $(s-1)$ divise 2, alors il existe α,β et γ dans $\{0,1\}$ tels que $2^\alpha p^\beta q^\gamma (s+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

- D'après le lemme 2.3, $2(s+1)$ et $pq(s+1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbf{N}$.
- Si $\sqrt{2p(s+1)} \in \mathbf{N}$, alors il existe $(t_1, t_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $\begin{cases} s+1 = 2p{t_1}^2 \\ s-1 = q{t_2}^2 \\ t_1 t_2 \ \ = t \end{cases}$ ainsi $2 = 2p{t_1}^2 - q{t_2}^2$, ce qui implique d'une part que $(\frac{2}{q}) = (\frac{2p}{q}) = (\frac{2}{q})(\frac{p}{q})$, donc $(\frac{p}{q}) = 1$, et d'une autre part que $(\frac{2}{p}) = (\frac{-q}{p}) = (\frac{-1}{p})(\frac{q}{p})$, donc $(\frac{q}{p}) = 1$, ainsi $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$, ce qui est impossible puisque $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$. Et de même on montre que $\sqrt{2q(s+1)} \notin \mathbf{N}$.
- Si $\sqrt{p(s+1)} \in \mathbf{N}$, alors il existe $(t_1, t_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $\begin{cases} s+1 = p{t_1}^2 \\ s-1 = 2q{t_2}^2 \\ t_1 t_2 \ \ = t \end{cases}$ ainsi $2 = p{t_1}^2 - 2q{t_2}^2$, ce qui implique d'une part que $(\frac{2}{p}) = (\frac{-2q}{p}) = (\frac{-1}{p})(\frac{2}{p})(\frac{q}{p})$, donc $(\frac{q}{p}) = -1$, et d'une autre part que $(\frac{2}{q}) = (\frac{p}{q})$, ainsi $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$, ce qui est impossible puisque $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$. Et de même on montre que $\sqrt{q(s+1)} \notin \mathbf{N}$.

Ainsi $2pq(s+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$, ce qui donne que $(s-1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et ainsi 2ε est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$. □

Théorème 2.6. *Soient $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ avec p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $\mathrm{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathrm{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{pq})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$) et $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. Alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de $\mathbf{K}_0$ et de $\mathbf{F}_1$.*

Démonstration. On sait d'après [11] que :

$$h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{1}{4} Q_{\mathbf{K}_0} h_2(2) h_2(pq) h_2(2pq),$$

où $Q_{\mathbf{K}_0}$ est l'indice des unités de $\mathbf{K}_0$, $h_2(\mathbf{K}_0)$ et $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ où $m = 2, pq, 2pq$. Or $h_2(2) = h_2(pq) = 1$ et comme $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, alors d'après [7], on a $h_2(2pq) = 2$, et on a $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$ est cyclique, donc $h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{h_2(2pq)}{2} = 1$, ainsi $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$. Et d'après le lemme 2.5, $2\varepsilon_3$ est un carré dans k_3, donc un carré dans $\mathbf{K}_0$, ce qui donne que $\sqrt{\varepsilon_3} \in \mathbf{K}_0$, ainsi en utilisant les résultats de [9], on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$. Et en utilisant la proposition 2.1, on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbf{F}_1$. □

Théorème 2.7. *Soient* $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ *avec* p, q *deux nombres premiers différents tels que* $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 (*resp.* ε_2, ε_3) *l'unité fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (*resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{pq})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$) *et* $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. *Alors* $\mathbf{K}_0$ *et* $\mathbf{F}_1$ *ont même* **SFU** *qui est l'un des systèmes* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Démonstration. Comme $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$, alors ε_3 est de norme -1, et on a ε_1 est aussi de norme -1, ainsi : si ε_2 est de norme 1, alors comme $\sqrt{\varepsilon_2} \notin \mathbf{K}_0$ (voir [3]), donc d'après les résultats de [9], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$. Et si ε_2 est de norme -1, alors toujours d'après les résultats de [9], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$ si $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \notin K_0$, et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$ dans le contraire. Et pour montrer que $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{F}_1$ ont même **SFU**, il suffit d'utiliser la proposition 2.1. □

Théorème 2.8. *Soient* $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$ *avec* p *un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \bmod 4$, ε_1 (*resp.* ε_2, ε_3) *l'unité fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (*resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p})$) *et* $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}_0(\sqrt{-q\varepsilon_1\sqrt{2}})$ *où* q *est un nombre premier impair. Alors :*
(1) *Si* ε_3 *est de norme* 1, *alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbf{K}_0$ *et de* $\mathbf{F}_2$.
(2) *Sinon,* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbf{K}_0$ *et de* $\mathbf{F}_2$.

Démonstration. Tout d'abord, d'après [11], on a

$$h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{1}{4} Q_{\mathbf{K}_0} h_2(2) h_2(p) h_2(2p),$$

où $h_2(\mathbf{K}_0)$, $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}_0$ et de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ avec $m = 2, p, 2p$. Comme $h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{1}{2}h_2(2p)$ et $h_2(2) = h_2(p) = 1$ alors $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$. Ainsi :

(1) Si ε_3 est de norme 1, alors d'après le lemme 2.4, $2\varepsilon_3$ est un carré dans k_3, donc ε_3 est un carré dans $\mathbf{K}_0$, et puisque ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, alors d'après les résultats de [9], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$. En utilisant la proposition 2.1, on montre que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbf{F}_2$.

(2) Si ε_3 est de norme -1, alors comme ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, donc en utilisant les résultats de [9] on trouve que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{K}_0$. En particulier on a ceci si $p \equiv 5 \bmod 8$. Et par la proposition 2.1, on montre que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbf{F}_2$.

□

3. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K et structure de G

Proposition 3.1. *Soient $\mathbf{L}/\mathbf{M}$ une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, et $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ ses sous extensions quadratiques. Alors*

$$h(\mathbf{L}) = \frac{2^{d-\kappa-2-v}q(\mathbf{L})h(\mathbf{L}_1)h(\mathbf{L}_2)h(\mathbf{L}_3)}{h(\mathbf{M})^2},$$

où $q(\mathbf{L}) = [E_{\mathbf{L}} : E_1E_2E_3]$ est l'indice des unités de $\mathbf{L}/\mathbf{M}$, d le nombre des premiers infinis de $\mathbf{M}$ qui se ramifient dans $\mathbf{L}/\mathbf{M}$, κ est le $\mathbf{Z}$-rang du groupe $E_{\mathbf{M}}$ des unités de $\mathbf{M}$, est $v = 0$ sauf si $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}(\sqrt{E_{\mathbf{M}}})$ où $v = 1$.

Démonstration. Voir [10]. □

Dans toute la suite, Soient p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 5 \bmod 8$, $\mathrm{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, ε_1 l'unité fondamentale de k, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K}$. Alors, d'après [4], $C_{2,\mathbf{K}}$ est de type $(2,2)$, d'où $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K}$ contient trois extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ $(i = 1,2,3)$, la tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$ s'arrête en $\mathbf{K}_2^{(2)}$ et on a :

• Si $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, alors $\mathbf{K}_2^{(1)} = \mathbf{K}(\sqrt{-p}, \sqrt{-q})$ de sous-corps quadratiques sur $\mathbf{K}$: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{-p})$ et $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{-q})$.

• Si $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, alors $\mathbf{K}_2^{(1)} = \mathbf{K}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ de sous-corps quadratiques sur $\mathbf{K}$: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{p})$ et $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{q})$.

On va faire une étude du problème de la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{K}$ dans les différentes sous-extensions quadratiques $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ de $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{K}$, et par suite nous déterminons la structure de G.

3.1. **Cas où** $p \equiv q \equiv -5 \bmod 8$

Théorème 3.2. *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *où* p, q *sont deux nombres premiers différents tels que* $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{-p})$ *et* $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{-q})$. *Alors* $\mathbf{K}_2^{(2)} = \mathbf{K}_2^{(1)}$, $G = Gal(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$ *est abélien et les quatre classes de* $C_{2,\mathbf{K}}$ *capitulent dans chacune des extensions* $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Démonstration. Comme $\mathbf{F}_1/\mathrm{k}$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2, 2)$, de sous extensions quadratiques $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}(\sqrt{-(2+\sqrt{2})})$, alors d'après la proposition 3.1, on trouve que :

$$h_2(\mathbf{F}_1) = \frac{q(\mathbf{F}_1)h_2(\mathbf{K})h_2(\mathbf{K}')h_2(\mathbf{K}_0)}{2h_2(\mathrm{k})^2},$$

et puisque $h_2(\mathrm{k}) = 1$, $h_2(\mathbf{K}) = 4$, d'après [4] $h_2(\mathbf{K}') = 1$ et comme $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, alors, d'après [7], ona $h_2(2pq) = 2$, et comme $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$ est cyclique, donc $h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{h_2(2pq)}{2} = 1$, ainsi $h_2(\mathbf{F}_1) = 2q(\mathbf{F}_1)$. Or comme $E_{\mathbf{K}}E_{\mathbf{K}'}E_{\mathbf{K}_0} = E_{\mathbf{K}_0}$, alors $q(\mathbf{F}_1) = [E_{\mathbf{F}_1} : E_{\mathbf{K}_0}] = 1$, ainsi $C_{2,\mathbf{F}_1}$ est cyclique d'ordre 2, et comme $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{F}_1$ est une extension non ramifiée, alors $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{K}_2^{(1)}$ ont même 2-corps de classes de Hilbert à savoir $\mathbf{K}_2^{(2)}$ or $h_2(\mathbf{F}_1) = 2$, donc $\mathbf{K}_2^{(2)} = \mathbf{K}_2^{(1)}$, ainsi, d'après le théorème 1.3, G est abélien ($\simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) et les quatre classes de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ (i=1,2,3). □

Exemple 3.3. Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-3.11(2+\sqrt{2})})$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{3.11})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{-3})$ et $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{-11})$. Comme $3 \equiv 11 \equiv 3 \bmod 8$, alors d'après le théorème 3.2, $G \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et les quatre classes de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbf{F}_i/\mathbf{K}$ $(i = 1, 2, 3)$.

3.2. Cas où $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$

Théorème 3.4. *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *où* p, q *sont deux nombres premiers différents tels que* $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{p})$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{q})$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ *et* $Q_{\mathbf{K}_0}$ *son indice des unités. Donc :*
(1) Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 1$, *alors les quatres classes de* $C_{2,\mathbf{K}}$ *capitulent dans* $\mathbf{F}_1$ *et dans chaque* $\mathbf{F}_i$, $i \in \{2,3\}$, *deux classes seulement de* $C_{2,\mathbf{K}}$ *capitulent .*
(2) Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, *alors dans chaque extension* $\mathbf{F}_i$, $i \in \{1,2,3\}$, *il existe exactement deux classes de* $C_{2,\mathbf{K}}$ *qui capitulent.*

Démonstration. Soient ε_1 (resp. ε_2, ε_3, η_2, η_3) l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2p})$). Alors, d'après le théorème 2.7, $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{F}_1$ ont même **SFU** qui est l'un des systèmes : $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ou $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, et d'après le théorème 2.8, $\{\sqrt{\varepsilon_1\eta_2\eta_3}, \eta_2, \eta_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{F}_2$. On a $N_{\mathbf{F}_2/\mathbf{K}}(\sqrt{\varepsilon_1\eta_2\eta_3}) = \pm\varepsilon_1$, ainsi $N_{\mathbf{F}_2/\mathbf{K}}(E_{\mathbf{F}_2}) = E_{\mathbf{K}}$, d'où, d'après le théorème 1.1, deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans $\mathbf{F}_2$, et de même pour $\mathbf{F}_3$, car p et q jouent des rôles symétriques.
(1) Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 1$, donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est **SFU** de $\mathbf{F}_1$, alors $N_{\mathbf{F}_1/\mathbf{K}}(E_{\mathbf{F}_1}) \neq E_{\mathbf{K}}$. D'où d'après le théorème 1.1, les quatre classes de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans $\mathbf{F}_1$.
(2) Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, donc $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbf{F}_1$, ainsi $N_{F_1/K}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$, par suite $N_{\mathbf{F}_1/\mathbf{K}}(E_{\mathbf{F}_1}) = E_{\mathbf{K}}$. D'où d'après le théorème 1.1, deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans $\mathbf{F}_1$. Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarque 3.5. Soient $\mathcal{P}$ l'idéal premier de $\mathbf{K}$ au dessus de p et $\mathcal{Q}$ celui de $\mathbf{K}$ au dessus de q, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ restent inerte dans $\mathbf{F}_1$ et $\mathcal{P}$ se décompose dans $\mathbf{F}_3$ et $\mathcal{Q}$ se décompose dans $\mathbf{F}_2$, il s'ensuit, en utilisant la loi de réciprocité d'Artin que $C_{2,\mathbf{K}}$ est engendré par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{Q}]$ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ respectivement.

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant concernant le symbole du reste normique.

Proposition 3.6. *Soient* $\mathbf{M}$ *un corps de nombres contenant la racine primitive* m*-ème de l'unité,* $\mathbf{L}$ *une extension finie de* $\mathbf{M}$, $\alpha \in \mathbf{M}^*$ *et* $\beta \in \mathbf{L}^*$. *On note* P *un idéal premier de* $\mathbf{M}$, *et* $\mathcal{P}$ *un idéal premier de* $\mathbf{L}$ *au-dessus de* P. *Alors*

$$\prod_{\mathcal{P}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathcal{P}}\right)_m = \left(\frac{N_{\mathbf{L}/\mathbf{M}}(\beta), \alpha}{P}\right)_m,$$

où le produit est pris sur tous les premiers de $\mathbf{L}$ *qui sont au-dessus de* P.

Démonstration. Voir [5]. □

Théorème 3.7. *Soient* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *où* p *et* q *sont deux nombres premiers différents avec* $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{p})$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{q})$ *et* $G = Gal(K_2^{(2)}/K)$. *Alors* G *est diédral ou quatérnionique d'ordre* 2^m $(m \geq 3)$ *suivant que* $Q_{\mathbf{K}_0} = 1$ *ou* $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$.

Démonstration. Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 1$, alors les quatre classes de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans $\mathbf{F}_1$ et dans chaque $\mathbf{F}_i$ $(i = 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent, ainsi d'après le théorème 1.3, G est isomorphe à D_m $(m \geq 3)$.

Si $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, alors dans chaque $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ les idéaux premiers de $\mathbf{K}$ au dessus de p et q respectivement. Alors $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{p})$, $\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{q})$ et $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$

Montrons que $\mathbf{F}_1$ est de type (A) et que $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$ sont de type (B). En effet pour $\mathbf{F}_2$, soit $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}(\sqrt{-q(2+\sqrt{2})})$, alors on a $\mathbf{K}\mathbf{K}' = \mathbf{F}_2$, $N_{\mathbf{K}/\mathrm{k}}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifié dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$, ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbf{F}_2/\mathbf{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$ (théorème de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-q\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right)$. On a $p \in \mathbf{Q}$ est inerte dans $\mathrm{k}/\mathbf{Q}$ et $-q\varepsilon_1\sqrt{2} \in \mathrm{k}$, donc en utilisant la proposition 3.6, on trouve $\left(\frac{p,-q\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathrm{k}/\mathbf{Q}}(-q\varepsilon_1\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p,2q^2}{p}\right) = (\frac{2}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbf{F}_2/\mathbf{K}$, ainsi $\mathbf{F}_2/\mathbf{K}$ est de type (B), et de même on montre que $\mathcal{Q}$ est inerte dans $\mathbf{F}_3/\mathbf{K}$, ce qui donne aussi que $\mathbf{F}_3/\mathbf{K}$ est de type (B). Pour $\mathbf{F}_1$, soit $\mathbf{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$, alors on a $\mathbf{K}\mathbf{K}' = F_1$, $N_{\mathbf{K}/\mathrm{k}}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifié dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$, ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$ et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right)$. En utilisant la proposition 3.6, on a $p \in \mathbf{Q}$ est inerte dans $\mathrm{k}/\mathbf{Q}$ et $\varepsilon_1\sqrt{2} \in \mathrm{k}$, ainsi $\left(\frac{p,-\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathrm{k}/\mathbf{Q}}(-\varepsilon_1\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p,2}{p}\right) = (\frac{2}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbf{K}'/\mathrm{k}$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$, et de même on montre que $\mathcal{Q}$ est aussi inerte dans

$\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$, d'où $\mathcal{PQ}$ est norme dans $\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$, ainsi $\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$ est de type (A), et en utilisant le théorème 1.3, le groupe G est isomorphe à Q_m $(m > 3)$. □

Théorème 3.8. *Soient* $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$ *où* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *avec p, q deux nombres premiers différent tels que* $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$. *Alors* $C_{2,\mathbf{F}_1}$*, la 2-partie du groupe de classes de* $\mathbf{F}_1$*, est cyclique d'ordre*

$$h_2(\mathbf{F}_1) = 2Q_{\mathbf{K}_0}h_2(pq),$$

où $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$*,* $Q_{\mathbf{K}_0}$ *son indice des unités et* $h_2(pq)$ *est le 2-nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{pq})$*.*

Démonstration. Tout d'abord, comme l'extension $\mathbf{F}_1/\mathbf{K}$ est de type (A), alors, d'après [8], $C_{2,\mathbf{F}_1}$ est cyclique, et on a $\mathbf{F}_1/\mathrm{k}$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, de sous-extensions quadratiques $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-(2+\sqrt{2})})$ et $\mathbf{K}_0$, alors d'après la proposition 3.1, on trouve que : $h_2(\mathbf{F}_1) = \frac{1}{2}q(\mathbf{F}_1)h_2(\mathbf{K})h_2(\mathbf{K}')h_2(\mathbf{K}_0)$. Or on a $h_2(\mathbf{K}) = 4$, $h_2(\mathbf{K}') = 1$, d'après [11] $h_2(\mathbf{K}_0) = \frac{1}{4}Q_{\mathbf{K}_0}h_2(2)h_2(pq)h_2(2pq)$, et comme $h_2(2) = 1$ et $h_2(2pq) = 4$ (d'après [7]), donc $h_2(\mathbf{K}_0) = Q_{\mathbf{K}_0}h_2(pq)$, ainsi $h_2(\mathbf{F}_1) = 2q(\mathbf{F}_1)Q_{\mathbf{K}_0}h_2(pq)$. et d'aprés le théorème 2.7, $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{F}_1$ on même **SFU** donc $q(\mathbf{F}_1) = 1$, d'où le résultat. □

Remarque 3.9. Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ où p, q sont deux nombres premiers différents $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$ et $G = Gal(\mathbf{K}_2^{(2)}/\mathbf{K})$, alors

$$|G| = 4Q_{\mathbf{K}_0}h_2(pq),$$

où $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, $Q_{\mathbf{K}_0}$ son indice des unités et $h_2(pq)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{pq})$.

Démonstration. Soit $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$, alors $\mathbf{K}_2^{(1)}/\mathbf{F}_1$ est une extension non ramifiée et on a $C_{2,\mathbf{F}_1}$ est cyclique, ainsi $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{K}_2^{(1)}$ ont même 2-corps de classes de Hilbert, à savoir $\mathbf{K}_2^{(2)}$, donc $|G| = 2h_2(\mathbf{F}_1) = 4Q_{\mathbf{K}_0}h_2(pq)$. □

Exemple 3.10. Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ et $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ avec p et q sont deux nombres premiers tels que $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, $(\frac{p}{q}) = 1$ et $(\frac{p}{q})_4 = -(\frac{q}{p})_4$.

L'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{pq})$ est de norme 1, ainsi $Q_{\mathbf{K}_0} = 1$, par suite, en utilisant le théorème 3.7, G est diédral et les quatre classes de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent dans $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{pq})$ et dans chacune des extensions $\mathbf{F}_2 =$

$\mathbf{K}(\sqrt{p})$ et $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{q})$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent. De plus, on sait que $h_2(pq) = 2$, ainsi, en utilisant la remarque 3.9, on trouve que $|G| = 8$ ce qui donne que $G \simeq D_3$.

Exemple 3.11. Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-5.13(2+\sqrt{2})})$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5.13})$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{5.13})$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{K}(\sqrt{5})$ et $\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}(\sqrt{13})$. Comme $5 \equiv 13 \equiv 5 \bmod 8$ et $Q_{\mathbf{K}_0} = 2$, alors, d'après le théorème 3.7, G est quaternionique et dans chacune des extensions F_i $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbf{K}}$ capitulent, et comme $(\frac{5}{13}) = -1$, on a $h_2(5.13) = 2$, ainsi, en utilisant la remarque 3.9, on trouve que $|G| = 16$, ce qui donne que $G \simeq Q_4$.

Remarque 3.12. Pour les résultats concernant le calcul du 2-nombre de classes des corps quadratiques sur $\mathbf{Q}$, voir P. Kaplan [7].

Références

[1] A. AZIZI – « Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur $\mathbf{Q}$ », *Annales des Sciences Mathématiques du Québec* **23** (1999), p. 15–21.

[2] ———, « Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ », *Acta Arithmetica* **94** (2000), p. 383–399.

[3] A. AZIZI et A. MOUHIB – « Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés », *Acta Arithmetica* **109** (2003), p. 27–63.

[4] E. BROWN et C. J. PARRY – « The 2-class group of certain biquadratic number fields, II », *Pac. Jour. of Math.* **78** (1978), p. 11–26.

[5] H. HASSE – « Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols », *J. Reine Angew. Math.* **162** (1930), p. 134–143.

[6] F. P. HEIDER et B. SCHMITHALS – « Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten Primzyklischen Erweiterungen », *J. Reine Angew. Math.* **366** (1982), p. 1–25.

[7] P. KAPLAN – « Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques », *J. Reine Angew. Math.* **283/284** (1976), p. 313–363.

[8] H. KISILEVSKY – « Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and hilbert's theorem 94 », *J. Number Theory* **8** (1976), p. 271–279.

[9] S. KURODA – « Über den Dirichletschen Zahlkörper », *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I* **4** (1943), p. 383–406.

[10] F. Lemmermeyer – « Kuroda's class number formula », *Acta Arith.* **66** (1994), p. 245–260.

[11] H. Wada – « On the class number and the unit group of certain algebraic number fields », *Tokyo U. Fac. of Sc. J., Serie I* **13** (1966), p. 201–209.

Abdelmalek Azizi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
abdelmalekazizi@yahoo.fr

Mohammed Talbi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
talbimm@yahoo.fr