ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Ferdaous Kellil, Guy Rousseau

Transformation de Poisson sur un arbre localement fini

Volume 12, n°1 (2005), p. 91-116.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_1_91_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

Annales Mathematiques Blaise Pascal **12**, 91-116 (2005)

Transformation de Poisson sur un arbre localement fini

Ferdaous Kellil[1]
Guy Rousseau

Résumé

Dans cet article on étudie en premier lieu la résolvante (le noyau de Green) d'un opérateur agissant sur un arbre localement fini. Ce noyau est supposé invariant par un groupe G d'automorphismes de l'arbre. On donne l'expression générique de cette résolvante et on établit des simplifications sous différentes hypothèses sur G.

En second lieu on introduit la transformation de Poisson qui associe à une mesure additive finie sur l'espace Ω des bouts de l'arbre une fonction propre de l' opérateur. On montre que la bijectivité de cette transformation se déduit de la non nullité de certains déterminants et on montre celle-ci pour des cas assez généraux.

I - Introduction

L'analyse harmonique sur les arbres a été déjà l'objet de nombreux travaux d'abord dans le cas homogène [7],[14],[6],[8] et [9] puis dans le cas semi-homogène [5]. Ces travaux ne donnaient des résultats précis que dans le cas isotrope, c'est à dire n'individualisant pas les sommets voisins d'un sommet donné. Dans [18],[11] ou [10] A. Figa-Talamanca, P. Gerl, T. Steger et W. Woess ont étudié le cas anisotrope pour un arbre homogène; ces travaux ont été étendus au cas d'un arbre localement fini par K. Aomoto et différents auteurs [1],[2],[3],[4], [13],[16]. Nous allons continuer ces études.

Dans un arbre la valence $v(s)$ d'un sommet est le nombre de ses voisins, on suppose ici toujours $v(s) \geq 1$ pour tout s et presque toujours $v(s)$ finie

[1]Le comité Mixte Franco-Tunisien de Coopération Universitaire, a facilité nos rencontres et nous a aidé à l'élaboration de cet article, qu'il en soit remercié.

(arbre localement fini). Si $d(-,-)$ désigne la distance sur l'ensemble S des sommets, la relation "$d(s,t)$ paire" sur $S \times S$ est d'équivalence et partage S en deux classes S' et S''. L'arbre est dit *homogène* (respectivement *semi-homogène)* si v est constant sur S (respectivement constant sur S' et S''); si v vaut $q+1$ (respectivement $q+1$ et $\ell+1$) l'arbre est bien déterminé et noté X_q (respectivement $X_{q,\ell}$).

On considèrera un groupe G d'automorphismes de l'arbre. Ce groupe est dit *transitif* (respectivement *presque transitif)* sur S ou S' si S ou S' est contenu dans une orbite (respectivement la réunion d'un nombre fini d'orbites) de G.

Dans beaucoup de travaux d'analyse harmonique sur les arbres, on suppose l'existence de G simplement transitif sur S (ou S'). Alors les fonctions sur l'arbre peuvent être considérées comme des fonctions sur G et elles opèrent sur l'espace des fonctions par convolution. Ici les opérateurs sont d'une autre nature.

Un *noyau* complexe sur l'arbre (ou sur S') est une application R de $S \times S$ (ou $S' \times S'$) dans $\mathbb{C}$. Il est dit *probabiliste* si $R(s,t) \geq 0, \forall s,t$ et $\sum_s R(s,t) = 1,\ \forall t$; il correspond alors à une marche aléatoire sur S [10]. La formule $R * f(s) = \sum_{t \in S} R(s,t)f(t)$ permet de faire opérer (par convolution) ce noyau sur certaines classes de fonctions sur S (ou S').

Le noyau R est supposé *invariant* par un groupe G d'automorphismes de l'arbre *i.e.* $R(g(s),g(t)) = R(s,t), \forall s,t \in S$ et $\forall g \in G$. Bien entendu R n'est suffisament homogène pour être étudié précisément que si le groupe est gros. A. Figa-Talamanca et T. Steger [10] considèrent un unique groupe G simplement transitif sur S; cela permet d'identifier S à G et R à une fonction sur G. Nous supposerons souvent, comme Aomoto [1],[4], que G est presque transitif sur S (et même souvent transitif sur S').

Pour étudier la résolvante (*i.e.* le noyau de Green) de l'opérateur on se place, comme Aomoto [1], dans le cas où $R(s,t) = 0$ pour $d(s,t)$ plus grand qu'un nombre fixe. Dans le cas, considéré en [1], d'une marche aléatoire cela signifie que les sauts successifs sont de longueur bornée. Notons tout de suite que si R et R' sont à sauts de longueur bornée (et si l'arbre est localement fini) alors leur produit $R * R'$ est bien défini par $R * R'(s,t) = \sum_u R(s,u)R'(u,t)$ et vérifie encore cette condition.

Plus précisement on suppose au II soit $R(s,t) = 0$ pour $d(s,t) > 1$ comme

[4] (noyau à sauts de longueur 0 ou 1) soit $R(s,t) = 0$ pour $d(s,t) \neq 0$ ou 2 (noyau à sauts de longueur 0 ou 2) (ce cas permet d'étudier le carré d'un opérateur du type précédent). Sous ces conditions et sans supposer d'invariance sous un groupe G nous obtenons des renseignements sur le noyau de Green R_γ plus explicites que ceux de Aomoto qui prouve l'algébricité de R_γ pour un noyau probabiliste à sauts de longueur bornée et invariant par un groupe presque transitif [1]. Si le noyau R est symétrique et à sauts de longueur 0 ou 1 nos résultats sont dus à Aomoto [2],[4].

En 5 et 6 nous examinons différentes conditions d'invariance de R sous un groupe G transitif sur S' et nous généralisons ainsi les résultats de [10].

Au III on introduit la transformation de Poisson associée au noyau R (toujours supposé à sauts de longueur 0 ou 2 (*resp.*0 ou 1)). On montre que la bijectivité de cette transformation se déduit de la non nullité de certains déterminants et on montre celle-ci pour des cas assez généraux (incluant ceux déjà traités dans [10],[13] ou [16]). Quand le noyau R est invariant par certains groupes G, on obtient des formules explicites pour l'inverse de la transformation de Poisson.

II - Noyau de Green

1

On considère un arbre localement fini X et la décomposition de son ensemble de sommets S en deux parties S' et S'' selon la parité de la distance. On note $\Sigma(s,n)$ la sphère de centre $s \in S$ et de rayon n formée des sommets à distance n de s.
Soit R' un noyau sur $S' \times S'$. Les conditions suivantes seront intéressantes :

$$(N_0) \qquad \exists N > 0 \ / \ \forall u \in S' \ ; \ |\Sigma(u,2)| \leq N.$$

(N_1) R' est à sauts de longueur 0 ou 2 (*i.e.* $R'(s,t) \neq 0 \Longrightarrow d(s,t) = 0$ ou 2).

$$(N_2) \qquad \exists M \geq 0 \text{ tel que } \forall u \in S' \ ; \ \sum_{s \in S'} |R'(s,u)| \leq M.$$

Notons tout de suite que (N_0) et (N_2) sont vérifiés s'il existe un groupe G presque transitif sur S' ou S'' et si R' est invariant par G et vérifie (N_1).

Lemme 1.1: *Sous les conditions* $(N_0),(N_1)$ *et* $(N_2), R'$ *définit pour* $r \geq 1$ *un opérateur linéaire borné sur* $\ell^r(S')$ *de norme* $||R'||_{cvr} \leq (N+1)^a M$*, avec* $a = 0$ *si* $r = 1, a = 1$ *si* $r \geq 2$ *et* $a = 2/r$ *si* $1 < r < 2$.

Démonstration: Tous les sommets s, u, u' sont dans S'.

Pour $r = 1, ||R'f||_1 \leq \sum_{s\in S'} \sum_{u\in S'/d(s,u)\leq 2} |R'(s,u)||f(u)| \leq M||f||_1$.

Pour $r > 1$:

$$\begin{aligned} ||R'f||_r^r = & \sum_{s\in S'} |R'f(s)|^r = \sum_{s\in S'} |\sum_{u/d(s,u)\leq 2} R'(s,u)f(u)|^r \\ \leq & \sum_{s\in S'} \left[\left(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |R'(s,u)|^{\frac{r}{r-1}} \right)^{r-1} \left(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |f(u)|^r \right) \right]. \end{aligned}$$

1) Pour $1 < r < 2, (0 < r-1 < 1)$ on a :

$$\begin{aligned} ||R'f||_r^r \leq & \sum_{s\in S'} \left[(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |R'(s,u)|^r)(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |f(u)|^r) \right] \\ \leq & \sum_{s\in S'} \left[(N+1)M^r(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |f(u)|^r) \right] \leq (N+1)^2 M^r ||f||_r^r. \end{aligned}$$

2) Pour $r \geq 2, (r-1 \geq 1)$ on a :

$$\begin{aligned} ||R'f||_r^r \leq & \sum_{s\in S'} \left[(N+1)^{r-2}(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |R'(s,u)|^r)(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |f(u)|^r) \right] \\ \leq & \sum_{s\in S'} \left[(N+1)^{r-1}M^r(\sum_{u/d(s,u)\leq 2} |f(u)|^r) \right] \leq (N+1)^r M^r ||f||_r^r. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarques 1.2:

1. S'il existe un groupe libre G simplement transitif sur S', si les sommets de S'' sont de valence 2 et si $r = 2$; on connait la valeur exacte de la norme d'opérateur de R'; voir [19] et [15].

2. Il y a deux manières de déduire des résultats sur les noyaux R définis sur $S \times S$ et à sauts de longueur 0 ou 1 à partir des résultats de ce paragraphe sur les noyaux sur $S' \times S'$ et à sauts de longueur 0 ou 2 :

   (a) On considère pour R', la restriction du carré R^2 de R à $S' \times S'$, si R est à sauts de longueur 1. Voir en particulier 7.

   (b) A un arbre donné localement fini X, on associe l'arbre X_1 d'ensemble de sommets $S_1 = S_1' \coprod S_1''$ où $S_1' = S$ et $S'' = \{\text{milieux des arêtes de } X\}$. La distance sur $S \times S$ est alors multipliée par deux lorsqu'on la considère sur $S_1 \times S_1$ et ainsi un noyau R sur $S \times S$ à sauts de longueur 1 (resp. 0 ou 1), peut être considéré comme un noyau sur $S_1' \times S_1'$ à sauts de longueur 2 (resp. 0 ou 2). Voir 4 et 13.

2 Itérés de R'

On suppose toujours le noyau R' à sauts de longueur 0 ou 2. On peut alors définir ses itérés : $R'^0(s,t) = Id(s,t) = 1$ si $s = t, 0$ sinon et $R'^n = R'^{n-1} * R'$. Le noyau R'^n est à sauts de longueur $\leq 2n$; sous les conditions (N_0) et (N_2) c'est un opérateur ℓ^r sur S'.

On suppose dorénavant les conditions $(N_0), (N_1)$ et (N_2) vérifiées.

Définition 2.1: Soit $s, t \in S'$.

1. $\pi_n'(s,t)$ est l'ensemble des chemins de longueur $2n$ dans S' joignant t à s. un tel chemin est une suite $[x_0 = t, x_1, ..., x_n = s]$ de sommets de S' tels que $d(x_i, x_{i+1}) = 0$ ou 2 , $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

2. $\pi_n'(s,t,\{s\})$ est l'ensemble des chemins de $\pi_n'(s,t)$ qui ne passent qu'une fois par s.

3. $\pi'(s,t) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \pi_n'(s,t)$ et $\pi'(s,t,\{s\}) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \pi_n'(s,t,\{s\})$.

4. Pour $P = [x_0, x_1, ..., x_n] \in \pi'_n(s,t)$ on définit son espérance par :
$$E(P, R') = \prod_{j=0}^{n-1} R'(x_{j+1}, x_j).$$

On définit aussi pour tout ensemble $\mathcal{D}$ de chemins dans S', $E(\mathcal{D}, R') = \sum_{P \in \mathcal{D}} E(P, R')$.

Remarque 2.2: On définit de manière évidente le composé P_2P_1 d'un chemin (dans S') P_1 de t à s et d'un chemin P_2 de s à u et on a évidement :

$$E(P_2P_1, R') = E(P_1, R')E(P_2, R').$$

Lemme 2.3: *Si $r \geq 1$ et $\gamma \in \mathbb{C}^*$ vérifient $|\gamma| > ||R'||_{cvr}$, alors la série $R'_\gamma = \gamma^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (R'/\gamma)^n$ est normalement convergente et égale à $R'_\gamma = (\gamma - R')^{-1} = \gamma^{-1}(Id - R'/\gamma)^{-1}$ comme opérateur linéaire (borné) sur $\ell^r(S')$.*

De plus pour $s, t \in S'$, on a :

1. *$R'^n(s,t) = E(\pi'_n(s,t), R')$; (somme finie).*
2. *$R'_\gamma(s,t) = \gamma^{-1}[E(\pi'(s,t), R'/\gamma)]$ (convergence absolue).*

Démonstration: La première assertion est évidente. La relation 1) se montre par récurrence sur n et la relation 2) s'en déduit facilement. □

Définition 2.4: R'_γ est le noyau de Green associé à R' et γ.

Lemme 2.5: *Soient $s, t \in S'$, $y \in [s,t] \cap S'$, alors pour $\gamma \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\gamma| > ||R'||_{cvr}$ on a :*
$$E(\pi'(s,t), R'/\gamma) = E(\pi'(s,y), R'/\gamma)E(\pi'(y,t,\{y\}), R'/\gamma).$$

Démonstration: Tout chemin $P \in \pi'(s,t)$ s'écrit d'une manière unique P_2P_1 avec $P_1 \in \pi'(y,t,\{y\})$ et $P_2 \in \pi'(s,y)$. Le lemme se déduit donc de la remarque 2.2. □

Proposition 2.6: *Soient $s, t \in S'$ à distance $2n$, on note $[t,s]' = ([t,s] \cap S') = (x_0 = t, x_1, ..., x_n = s)$ la géodésique de t à s dans S'. Alors si $|\gamma| > ||R'||_{cvr}$, on a :*

$$E(\pi'(s,t), R'/\gamma) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} E(\pi'(x_{i+1}, x_i, \{x_{i+1}\}), R'/\gamma)\right] E(\pi'(s,s), R'/\gamma).$$

$$\text{et} \quad R'_\gamma(s,t) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} E(\pi'(x_{i+1}, x_i, \{x_{i+1}\}), R'/\gamma)\right] R'_\gamma(s,s).$$

Démonstration: On applique le lemme 2.5 successivement pour $y = x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. □

Définition 2.7: Pour $\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| > ||R'||_{cvr}$, on note :

$\dfrac{1}{2\alpha_\gamma(s)} = R'_\gamma(s,s) = \gamma^{-1}\left[E(\pi'(s,s), R'/\gamma)\right]$, pour $s \in S'$.

$\eta_\gamma(s,t) = \begin{cases} E(\pi'(s,t,\{s\}) \ , R'/\gamma) \ ; & \text{si} \quad s,t \in S' \ / \ d(s,t) = 2 \\ \quad 1 & \text{si} \quad d(s,t) = 0 \end{cases}$

Si R' est invariant par un groupe G, il est évident que α_γ et η_γ le sont aussi. Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.6 on a donc :

$$R'_\gamma(s,t) = \frac{1}{2\alpha_\gamma(s)} \eta_\gamma(x_n = s, x_{n-1}) ... \eta_\gamma(x_1, x_0 = t).$$

Remarque 2.8: On peut définir $\pi''_n(s,t,\{t\})$ comme l'ensemble des chemins de $\pi'_n(s,t)$ qui ne passent qu'une fois par t, $\pi''(s,t,\{t\}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \pi''_n(s,t,\{t\})$ et $E(\pi''(s,t,\{t\}), R'/\gamma) = \zeta_\gamma(s,t)$ si $d(s,t) = 2$. On a en fait $\zeta_\gamma(s,t) = \eta''_\gamma(t,s)$ où η''_γ est défini comme η_γ ci-dessus mais en employant le noyau R'' défini par $R''(s,t) = R'(t,s)$. Alors tout chemin $P \in \pi'(s,t), s \neq t$, s'écrit d'une manière unique P_2P_1 avec $P_1 \in \pi'(t,t)$ et $P_2 \in \pi''(s,t,\{t\})$. Par le raisonnement ci-dessus, on obtient la formule :

$$R'_\gamma(s,t) = \frac{1}{2\alpha_\gamma(t)} \zeta_\gamma(x_n = s, x_{n-1}) ... \zeta_\gamma(x_1, x_0 = t).$$

C'est le genre d'écriture utilisée par Massimo A. Picardello, Mitchell H. Taibleson et Wolfgang Woess dans [16].

3 Inverse de $\gamma - R'$

Pour $\gamma \in \mathbb{C}$, on va encore chercher un inverse au noyau $(\gamma - R')$ sous la forme ci-dessus. Dans le cas qu'ils étudient, A. Figa-Talamanca et T. Steger [10] montrent par prolongement analytique que si γ est hors du spectre de l'opérateur R', tout inverse est forcément de cette forme.

On considère un noyau K sur $S' \times S'$ donné par la formule :

$$K(s,s) = \frac{1}{2\alpha(s)} \text{ et } K(s,t) = \frac{1}{2\alpha(s)}\eta(x_n = s, x_{n-1})...\eta(x_1, x_0 = t),$$

dès que la géodésique joignant t à s formée d'éléments de S' s'écrit $[t,s]' = (x_0 = t, ...x_n = s)$; avec une fonction $\alpha : S' \to \mathbb{C}^*$ et un noyau $\eta : S' \times S' \to \mathbb{C}$ à sauts de longueur 2 (ou 0).

On va exprimer les conditions nécessaires et suffisantes sur α et η pour que K soit l'inverse de $\gamma - R'$.

On va traduire les deux égalités $K * (\gamma - R')(s,t) = (\gamma - R') * K(s,t) = Id(s,t)$ dans deux cas pour le couple $(s,t) \in S' \times S'$, d'où quatre conditions (ces conditions sont en particulier vérifiées par α_γ et η_γ définis en 2.7).

1. Pour $s = t \in S'$:
   $1 = K * (\gamma - R')(t,t) = \dfrac{\gamma}{2\alpha(t)} - \dfrac{R'(t,t)}{2\alpha(t)} - \displaystyle\sum_{d(u,t)=2} \dfrac{\eta(t,u)}{2\alpha(t)} R'(u,t)$. Ceci donne :

$$(1) \qquad \forall t \in S', \gamma = 2\alpha(t) + R'(t,t) + \sum_{d(u,t)=2} \eta(t,u)R'(u,t).$$

2. Pour $s = t \in S'$:
   $1 = (\gamma - R') * K(t,t) = \dfrac{\gamma}{2\alpha(t)} - \dfrac{R'(t,t)}{2\alpha(t)} - \displaystyle\sum_{d(u,t)=2} R'(t,u)\dfrac{\eta(u,t)}{\alpha(u)}$. D'où

$$(1)\text{bis} \qquad \forall t \in S', \gamma = R'(t,t) + 2\alpha(t) + \sum_{d(u,t)=2} \frac{\alpha(t)}{\alpha(u)}\eta(u,t)R'(t,u).$$

3. pour $s \neq t \in S'$:
   $0 = K * (\gamma - R')(s,t) = (\gamma - R'(t,t))K(s,t) - \sum_{d(u,t)=2} K(s,u)R'(u,t).$
   Si $(x_0 = t, x_1, ..., x_n = s) = [t,s]'$, on a $\{u \in S'/d(u,t) = 2\} = \{x_1\} \cup \mu(x_1,t) \cup \varepsilon(x_1,t)$, avec pour $s', t \in S'/d(s',t) = 2$:
   $\mu(s',t) = \{u \in S'/d(u,s') = d(u,t) = 2\}$ et
   $\varepsilon(s',t) = \{u \in S'/d(u,t) = 2, d(u,s') = 4\}$. Ainsi :
   $$\begin{aligned} 0 = \frac{\gamma - R'(t,t)}{2\alpha(s)}\eta(s,x_{n-1})...\eta(x_1,t) - \frac{R'(x_1,t)}{2\alpha(s)}\eta(s,x_{n-1})...\eta(x_2,x_1) \\ - \sum_{u\in\mu(x_1,t)} \frac{R'(u,t)}{2\alpha(s)}\eta(s,x_{n-1})...\eta(x_2,x_1)\eta(x_1,u) \\ - \sum_{u\in\varepsilon(x_1,t)} \frac{R'(u,t)}{2\alpha(s)}\eta(s,x_{n-1})....\eta(x_2,x_1)\eta(x_1,t)\eta(t,u) \end{aligned}$$
   en simplifiant par $\dfrac{\eta(s,x_{n-1})...\eta(x_2,x_1)}{2\alpha(s)}$, on est ramené au cas $2n = d(s,t) = 2$ et $s = x_1$, donc
   $$\begin{aligned} 0 = (\gamma - R'(t,t))\eta(s,t) - R'(s,t) & - \sum_{u\in\mu(s,t)} R'(u,t)\eta(s,u) \\ & - \sum_{u\in\varepsilon(s,t)} R'(u,t)\eta(s,t)\eta(t,u) \end{aligned}$$
   et, en tenant compte de (1) appliqué à t, on aura :
   $$\begin{aligned} 0 = 2\alpha(t)\eta(s,t) & - R'(s,t) + \eta(t,s)R'(s,t)\eta(s,t) \\ & + \sum_{u\in\mu(s,t)} R'(u,t)(\eta(s,t)\eta(t,u) - \eta(s,u)) \end{aligned}$$
   donc en divisant par $\eta(s,t)R'(s,t)$, on obtient pour $s,t \in S'/d(s,t) = 2$:
   $$(2) \qquad \eta(s,t)^{-1} - \eta(t,s) = \frac{2\alpha(t)}{R'(s,t)} + \sum_{u\in\mu(s,t)} \frac{R'(u,t)}{R'(s,t)}\left(\eta(t,u) - \frac{\eta(s,u)}{\eta(s,t)}\right).$$

4. Pour $s \neq t \in S'$, la relation $0 = (\gamma - R') * K(s,t)$ se ramène de la même manière pour $s,t \in S'/d(s,t) = 2$ à :

$$(2)\text{bis } \eta(s,t)^{-1} - \eta(t,s) = \frac{2\alpha(t)}{R'(s,t)} + \sum_{u\in\mu(s,t)} \frac{R'(s,u)}{R'(s,t)} \times \frac{\alpha(t)}{\alpha(u)} \left[\eta(u,s) - \frac{\eta(u,t)}{\eta(s,t)}\right].$$

Question :

On pourrait espérer les relations suivantes :

$$\frac{R'(s,u)\eta(u,s)}{\alpha(u)} = \frac{R'(u,t)\eta(t,u)}{\alpha(t)} \text{ et } \frac{R'(s,u)\eta(u,t)}{\alpha(u)} = \frac{R'(u,t)\eta(s,u)}{\alpha(t)},$$

si $d(s,t) = 2$ et $u \in \mu(s,t)$, pour démontrer l'équivalence de (2) et (2)bis. Et $\dfrac{R'(u,t)\eta(t,u)}{\alpha(t)} = \dfrac{R'(t,u)\eta(u,t)}{\alpha(u)}$, si $d(u,t) = 2$ pour démontrer l'équivalence de (1) et (1)bis.

Le lemme suivant donne une réponse partielle dans un cas particulier; cette réponse est totale si $\mu(s,t) = \emptyset$ par exemple pour un arbre semi-homogène $X_{q;\ell}$ avec $S' = S^q$ et $\ell = 1$. Voir aussi le point 3 du 4.

Lemme 3.1: *On suppose* α_γ *et* η_γ *associés à* R'_γ *comme en 2.7, alors pour* $d(s,t) = 2$ *:*

$$\sum_{u\in\mu(s,t)\cup\{s\}} \frac{1}{2\alpha_\gamma(t)} \eta_\gamma(t,u) R'(u,t) = \sum_{u\in\mu(s,t)\cup\{s\}} \frac{1}{2\alpha_\gamma(u)} \eta_\gamma(u,t) R'(t,u).$$

Démonstration: On considère l'ensemble des cycles dans S' : $(x_0, x_1, ..., x_N = x_0)$. Chaque cycle a une espérance $R'(x_N, x_{N-1})...R'(x_1, x_0)$ qui est indépendante de l'origine choisie pour le cycle [on considère que le cycle $(x_0, x_1, ..., x_N = x_0)$ est le même que $(x_1, x_2, ..., x_N = x_0, x_1)$...etc].

On considère l'ensemble des cycles comprenant au moins une fois un passage $t \longmapsto u$ avec $u \in \mu(s,t) \cup \{s\}$, chacun compté avec comme multiplicité le nombre de ces passages. Mais ce nombre de passages est forcément égal au nombre de passages $u \longmapsto t$ avec $u \in \mu(s,t) \cup \{s\}$. Donc si on calcule l'espérance de cet ensemble de cycles avec multiplicités, on trouve le membre de gauche si on choisit comme origine un $x_0 = t$ tel que $x_1 \in \mu(s,t) \cup \{s\}$ et on trouve le membre de droite si on choisit comme origine un $x_0 \in \mu(s,t) \cup \{s\}$, tel que $x_1 = t$, d'où l'égalité. $\square$

4 Application à des noyaux sur S

Soit X un arbre localement fini à valence bornée (hypothèse (N_0) de 1). Soit R un noyau sur $S\times S$ à sauts de longueur 0 ou 1. On suppose l'analogue suivant de (N_2) vérifiée :

$$\exists M \geq 0/\forall u \in S, \sum_{s\in S} |R(s,u| \leq M.$$

Par le procédé décrit dans la remarque 1.2 2.(b), on construit un arbre X_1 et un noyau R' sur $S'_1 \times S'_1$ (en fait égal à R). Les hypothèses $(N_0),(N_1)$ et (N_2) sont vérifiées pour X_1 et R'. En notant que pour $s,t \in S'_1$, $\mu_1(s,t)=\emptyset$, on obtient les résultats suivants :

1) Pour $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $|\gamma| > ||R||_{cvr}$, l'opérateur $R_\gamma = (\gamma - R)^{-1}$ est défini et vaut $R_\gamma(s,s) = \dfrac{1}{2w_\gamma(s)}$ et $R_\gamma(s,t) = \dfrac{1}{2w_\gamma(s)}\xi_\gamma(x_n = s, x_{n-1})\cdots\xi_\gamma(x_1, t = x_0)$ si $d(s,t) = n \geq 1$ et $[t,s] = (x_0 = t, x_1\cdots, x_n = s)$.

De plus $\dfrac{1}{2w_\gamma(s)} = \gamma^{-1}E(\pi(s,s), R/\gamma)$ et $\xi_\gamma(t,s) = E(\pi(t,s,\{t\}, R/\gamma)$ si $d(s,t)=1$. Ceci avec des définitions évidentes de l'espérance et des ensembles de chemins (dans S et avec $d(x_i,x_{i+1}) = 0$ ou 1).

2) Si un noyau est abstraitement défini sur $S\times S$ par $K(s,s) = \dfrac{1}{2w(s)}$ et $K(s,t) = \dfrac{1}{2w(s)}\xi(x_n = s, x_{n-1})\cdots\xi(x_1, x_0 = t)$ si $[t,s] = [x_0 = t, \cdots, x_n = s]$ alors K est l'inverse de $\gamma - R$ si et seulement si :

(1) $\quad \forall t \in S\ ,\ \gamma = 2w(t) + R(t,t) + \displaystyle\sum_{u/d(u,t)=1} \xi(t,u)R(u,t).$

(1) bis $\quad \forall t \in S\ ,\ \gamma = 2w(t) + R(t,t) + \displaystyle\sum_{u/d(u,t)=1} \frac{w(t)}{w(u)}\xi(u,t)R(t,u).$

(2) $\Longleftrightarrow$ (2) bis $\quad \forall s,t \in S/\ d(s,t) = 1\ ;\ \xi(s,t)^{-1} - \xi(t,s) = \dfrac{2w(t)}{R(s,t)}.$

Ces relations s'appliquent en particulier à w_γ et ξ_γ définis en 1).

3) Si on compare les relations (2) ci-dessus pour (s,t) et (t,s) on obtient un système de degré 2 en $\xi(s,t)$ et $\xi(t,s)$ qu'il est facile de résoudre (avec un signe ε unique ne dépendant que de s,t) :

$$\xi(t,s) = \frac{-w(s)w(t) + \varepsilon\sqrt{(w(s)w(t))^2 + w(s)w(t)R(s,t)R(t,s)}}{w(s)R(s,t)},$$

$$\xi(s,t) = \frac{-w(s)w(t) + \varepsilon\sqrt{(w(s)w(t))^2 + w(s)w(t)R(s,t)R(t,s)}}{w(t)R(t,s)}.$$

En particulier $\xi(t,s)w(s)R(s,t) = \xi(s,t)w(t)R(t,s)$, ce qui permet de répondre positivement à la question dans ce cas et de montrer l'équivalence de (1) et (1) bis ci-dessus (modulo la relation (2)).

Pour R symétrique, ces résultats sont dus à Aomoto [4].

5 Cas particuliers de noyaux sur S

1. On suppose que X est l'arbre homogène X_q, qu'un groupe G agit transitivement sur S et que le noyau R est défini sur S, à sauts de longueur 1, invariant par G et symétrique (*i.e.* $R(s,t) = R(t,s), \quad \forall s,t$). Alors les fonctions w_γ et ξ_γ définies en 1 dans 4 vérifient :

   $w_\gamma(s) = w_\gamma$ =constante, $\xi_\gamma(s,t) = \xi_\gamma(t,s)$ et par suite si $(t_j)_{1\leq j\leq q+1}$ sont les voisins de t fixé dans S les nombres $\xi_\gamma(t,t_j)$ (resp. $R(t,t_j)$) déterminent entièrement ξ_γ (resp. R) et on a :

   $$\gamma = 2w_\gamma + \sum_{j=1}^{q+1} \xi_\gamma(t,t_j)R(t_j,t).$$

   $$\frac{2w_\gamma}{R(t,t_j)} = \xi_\gamma(t,t_j)^{-1} - \xi_\gamma(t,t_j).$$

   $$\xi_\gamma(t,t_j) = \frac{-w_\gamma \pm \sqrt{w_\gamma^2 + R^2(t,t_j)}}{R(t,t_j)}.$$

   Ce sont les résultats de A. Figa-Talamanca et T. Steger ([10]II.1).

2. On suppose que X est un arbre localement fini d'ensemble de sommets $S = S' \cup S''$ et qu'un groupe G opère transitivement sur $S' = S^q$.

   On considère un noyau R sur S invariant par G. Le nombre $w_\gamma(s)$ est indépendant de $s \in S'$, on le note w_q. Si $(t_i)_{1\leq i\leq q+1}$ sont les voisins de t_0 fixé dans S' , les nombres $w_q = w_\gamma(t_0)$ et $w_\gamma(t_i) = w_i$ (resp. $R(t_0,t_i) = R'_i$ et $R(t_i,t_0) = R_i, \xi_\gamma(t_0,t_i) = \xi'_i$ et $\xi_\gamma(t_i,t_0) = \xi_i$) déterminent entièrement w_γ (resp. R, ξ_γ). Les relations de 3 du 4 s'écrivent

$$\xi_i' = \frac{-w_q + \varepsilon\sqrt{w_q^2 + \frac{w_q}{w_i} R_i' R_i}}{R_i} \quad \text{et} \quad \xi_i = \frac{-w_i + \varepsilon\sqrt{w_i^2 + \frac{w_i}{w_q} R_i' R_i}}{R_i'}.$$

La première relation de 2 du 4 s'écrit pour $t \in S'$:

$$\gamma = 2w_q + \sum_{i=1}^{q+1} \xi_i' R_i.$$

Si $t \in S''$, cette même relation ne se décrit pas bien avec t et les t_i sauf dans le cas particulier où le groupe G vérifie :

(M) $\forall s, t \in S'$ / $d(s,t) = 2$, il existe $g \in G$ fixant le milieu de $[s,t]$ tel que $g(s) = t$.

Alors pour $s \in S', t \in S''$ voisins $R(s,t), R(t,s), \xi_\gamma(s,t)$ et $\xi_\gamma(t,s)$ ne dépendent que de $t \in S''$. Avec les notations ci-dessus on a :

$$\gamma = 2w_i + (\ell_i + 1)\xi_i R_i' \; ; \quad 1 \leq i \leq q+1.$$

6 Cas particulier de noyau sur S'

On suppose que X est un arbre localement fini d'ensemble de sommets $S = S' \cup S''$, qu'un groupe G agit transitivement sur S' et que le noyau R' défini sur S' est invariant par G et à sauts de longueur 0 ou 2.

On suppose de plus que le groupe G vérifie une condition plus forte que celle de 2 du 5 :

(M') $\forall s \in S''$, le fixateur G_s de s dans G est doublement transitif sur $\Sigma(s,1)$.

Alors α_γ est constante, ainsi que $R'(s,s)$ que l'on note R_0'. De plus $\forall s, t \in S'$ tels que $d(s,t) = 2$, $R'(s,t) = R'(t,s)$ et $\eta_\gamma(s,t) = \eta_\gamma(t,s)$ ne dépendent que du milieu de $[s,t]$ (dans S'').

On choisit $t_0 \in S'$ on note $(t_i)_{1\leq i\leq q+1}$ les voisins de t_0 et $(t_{i,j})_{1\leq j\leq \ell_i}$ les sommets voisins de t_i et différents de t_0. On pose pour $1 \leq i \leq q+1$:

$$R'(t_0, t_{i,j}) = R'(t_{i,j}, t_0) = R_i' \;\text{ et }\; \eta_\gamma(t_{i,j}, t_0) = \eta_\gamma(t_0, t_{i,j}) = \eta_i \; ; \; 1 \leq j \leq \ell_i.$$

On a alors les simplifications suivantes dans 3 :

$$(1) \iff (1)\text{bis} \iff \gamma = 2\alpha_\gamma + R'_0 + \sum_{i=1}^{q+1} \ell_i \eta_i R'_i.$$

$$(2) \iff (2)\text{bis} \iff \eta_i^{-1} - \eta_i = \frac{2\alpha_\gamma}{R'_i} + (\ell_i - 1)(\eta_i - 1).$$

D'où $\eta_i = \dfrac{-2\alpha_\gamma + (\ell_i - 1)R'_i \pm \sqrt{[2\alpha_\gamma - (\ell_i - 1)R'_i]^2 + 4\ell_i {R'_i}^2}}{2\ell_i R'_i}.$

Remarques 6.1:

1. Pour $\ell_i = 1, 1 \leq i \leq q+1$, on retrouve les résultats de [10] déjà signalés en 1 du 5.

2. Il est assez facile de construire un groupe G agissant sur un arbre X qui satisfait la condition (M') et donc (M) : on utilise la notion de graphe de groupe de [17] comme dans [12]. En fait on peut construire G discret, transitif sur S' tel que pour $s' \in S', \Sigma(s', 1) = \{s''_1, \cdots, s''_{q+1}\}$ forme un système de représentants des orbites de G dans S'' et pour $s''_i \in S''$, le fixateur $G_{s''_i}$ de s''_i dans G induit sur $\Sigma(s''_i, 1) = \{s'_{i,1} = s', \cdots, s'_{i,\ell_i+1}\}$ toutes les permutations de cet ensemble fini :

   Il suffit de considérer les fixateurs suivants,

   $G_{s'} = \prod_{i=1}^{q+1} S(\ell_i)$ qui s'injecte canoniquement dans $G_{s''_i} = S(\ell_i+1) \prod_{j\neq i} S(\ell_j)$,

   en considèrant $S(\ell_i)$ comme fixateur de s' dans le groupe $S(\ell_i + 1)$ identifié au groupe des permutations de $\Sigma(s''_i, 1)$.

   Il est alors facile de construire des noyaux à sauts de longueur 0, 1 ou 2 invariants par G.

7 Carré d'un noyau sur S

On se replace dans les conditions de 4, avec un noyau R à sauts de longueur 1.

1. Si un noyau $K(s,t)$ est abstraitement défini sur $S \times S$ et est l'inverse de $(\gamma - R)$, alors on vérifie facilement que le noyau K' défini par $K'(s,t) = (-1)^{d(s,t)+1}K(s,t)$ est l'inverse de $-\gamma - R$ (abstraitement et comme opérateur ℓ^r car il vaut $\begin{pmatrix} -K & K \\ K & -K \end{pmatrix}$ dans la décomposition $\ell^r(S) = \ell^r(S') \oplus \ell^r(S''))$. Ainsi le spectre ℓ^r de R est symétrique par rapport à 0.

2. On a $\ell^r(S) = \ell^r(S') \oplus \ell^r(S'')$ et R échange les deux facteurs. Alors que $R' = R^2$ stabilise ces 2 facteurs, on va lier son spectre à celui de R.

   (a) Supposons, pour $\gamma \neq 0$, que $K'(s,t)$ défini sur S' soit l'opérateur ℓ^r inverse de $\gamma^2 - R^2$ restreint à S', alors $K'' = \gamma^{-2}(1 + RK'R)$ est l'inverse de $\gamma^2 - R^2$ restreint à S''. En effet :
   $(\gamma^2 - R^2)K'' = 1 - \gamma^{-2}R^2 + \gamma^{-2}(\gamma^2 - R^2)RK'R = 1 - \gamma^{-2}R^2 + \gamma^{-2}R(\gamma^2 - R^2)K'R = 1$. Et de même $K''(\gamma^2 - R^2) = 1$.

   (b) Bien sur $\gamma^2 - R^2 = (\gamma - R)(\gamma + R)$ est inversible si et seulement si chacun de ces facteurs est inversible. On a vu de plus en 1) que le spectre de R est symétrique. Donc le spectre de R est exactement l'ensemble des γ tels que γ^2 soit dans le spectre de R^2 agissant sur $\ell^r(S)$.

   D'après le a) et sauf peut être pour 0 le spectre de R^2 est le même qu'on considère qu'il agisse sur $\ell^r(S), \ell^r(S')$ ou $\ell^r(S'')$.

   (c) Il peut effectivement arriver que 0 soit dans le spectre de R^2 agissant sur $\ell^r(S'')$ mais pas dans celui de R^2 agissant sur $\ell^r(S')$:

   On considère l'arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ avec $q \geq 2$ et $\ell = 1$. Le groupe G transitif sur $S' = S^q$ et $S'' = S^\ell$ est formé de tous les automorphismes de $X_{q,\ell}$ fixant un bout noté ∞. Le noyau R symétrique, invariant par G et à sauts de longueur 1 est défini par $R(s,t) = 0$ sauf $R(s,t) = 1$ dans le cas où, à l'ordre près, $s \in S', t \in S'', d(s,t) = 1$ et $d(t,\infty) - d(s,\infty) = 1$.

   On voit alors facilement que $R^2 = qId$ sur $\ell^r(S')$ tandis que sur $\ell^r(S''), R^2$ n'est ni injectif ni surjectif.

3. On suppose R réel, $R(s,t) \neq 0 \Leftrightarrow d(s,t) = 1$, et R^2 symétrique. On voit alors facilement qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $R(s,t) = kR(t,s)$ si $s \in S', t \in S''$. Alors l'opérateur de multiplication par $\sqrt{\pm k}$ sur $\ell^2(S')$ et par l'identité sur $\ell^2(S'')$ conjugue R en un noyau réel symétrique (si $k > 0$) ou antisymétrique (si $k < 0$), son spectre est donc ou réel ou imaginaire pur.

   N.B : Si $R(s,t)$ peut s'annuler quand $d(s,t) = 1$, on peut avoir des constantes k différentes dans différentes zones de l'arbre et alors R peut avoir à la fois des valeurs propres réelles et des valeurs propres imaginaires pures.

4. Dans le cas particulier d'un arbre semi-homogène, où le groupe G vérifie la condition (M') de 6 il est facile de voir quels noyaux R' définis sur S', positifs, symétriques et invariants par G peuvent s'écrire sous la forme $R' = R^2$ (avec R positif, à sauts de longueur 1 et invariant par G).

   (a) Si $R' = R^2$ et si $s, t \in S' = S^q$ sont à distance 2 on a :
   $$R'(s,s) = \sum_u R(s,u)R(u,s)$$
   $$R'(s,t) = R(s,u_0)R(u_0,t) \quad \text{où} \quad \{u_0\} = [s,t] \cap S''.$$
   or d'après l'hypothèse (M'), $R(u_0,t) = R(u_0,s)$, donc
   $$\ell R'(s,s) = \sum_{t \in \Sigma(s,2)} R'(s,t).$$

   (b) Inversement si un noyau R' sur S' à sauts de longueur 0 ou 2 vérifie cette dernière condition, on définit R comme suit :

   si $s \in S'$ et $u \in S''$ sont à distance 1, on pose $R(s,u) = R(u,s) = \sqrt{R'(s,t)}$ où t est tel que $d(s,t) = 2$ et $u \in [s,t]$.

   Ceci ne dépend bien que de u d'après (M'). Le noyau R ainsi défini convient.

5. Pour γ suffisament grand, on peut relier les fonctions α, η associées à γ^2 et $R' = R^2$ agissant sur S' (définition 2.7) aux fonctions w, ξ associées à γ et R (1 du 4).

   Pour $s, t \in S', d(s,t) = 2$ et $u \in ([s,t] \cap S'')$:

$$\begin{aligned}\eta_{\gamma^2}(s,t) = &\ E(\pi'(t,s,\{t\}),R'/\gamma^2) = E(\pi(t,u,\{t\}),R/\gamma)E(\pi(u,s,\{u\}),R/\gamma) \\ = &\ \xi_\gamma(s,u)\xi_\gamma(u,t) = \xi_\gamma(s,u)\xi_\gamma(u,s).\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\alpha_{\gamma^2}(s)} = \gamma^{-2}E(\pi'(s,s),R'/\gamma^2) = \gamma^{-2}E(\pi(s,s),R/\gamma) = \frac{1}{2\gamma w_\gamma(s)}.$$

Donc $\alpha_{\gamma^2}(s) = \gamma w_\gamma(s)$.

En utilisant les relations entre γ, w_γ et ξ_γ, on a pour $s,t \in S', u \in ([s,t] \cap S''), d(s,t)=2$

$$\begin{aligned}(1)\quad \xi_\gamma(s,u)^{-1} - \xi_\gamma(u,s) = &\ \frac{2w_\gamma(u)}{R(s,u)} \\ (2)\quad \xi_\gamma(u,s)^{-1} - \xi_\gamma(s,u) = &\ \frac{2w_\gamma(s)}{R(u,s)}.\end{aligned}$$

On fait le produit de (1) par (2), on obtient :

$$\xi_\gamma(s,u)^{-1}\xi_\gamma(u,s)^{-1} + \xi_\gamma(s,u)\xi_\gamma(u,s) - 2 = \frac{4w_\gamma(u)w_\gamma(s)}{R(s,u)R(u,s)}.$$

D'où on a $(1')$ $\quad \eta_{\gamma^2}(s,t)^{-1} + \eta_{\gamma^2}(s,t) - 2 = \dfrac{4w_\gamma(u)\alpha_{\gamma^2}(s)}{\gamma R'(s,t)}.$

Si on suppose maintenant que R est invariant par un groupe G vérifiant l'hypothèse (M') de 6 on a :

$(2')$ $\quad 2\alpha_{\gamma^2}(s) + R'(t,s)[\ell_u\eta_{\gamma^2}(s,t) - \eta_{\gamma^2}(s,t)^{-1}] - (\ell_u - 1)R'(t,s) = 0.$

On fait la somme de (1') multiplié par $R'(s,t) = R'(t,s)$ et (2'), on obtient :

$$i)\ \eta_{\gamma^2}(s,t) = \frac{4w_\gamma(u)\alpha_{\gamma^2}(s)}{\gamma R'(t,s)(\ell_u+1)} - \frac{2\alpha_{\gamma^2}(s)}{R'(t,s)(\ell_u+1)} + 1.$$

Ceci permet de calculer $w_\gamma(u)$ pour $u \in S''$ en fonction de R', α_{γ^2} et η_{γ^2}.

D'autre part $\quad \eta_{\gamma^2}(s,t) = 1 - \dfrac{2w_\gamma(u)}{R(s,u)}\xi_\gamma(s,u)$ (à partir de (1)). D'où :

$$ii)\ \xi_\gamma(s,u) = \frac{\alpha_{\gamma^2}(s)}{(\ell_u+1)R(u,s)}[\frac{-2}{\gamma} + \frac{1}{w_\gamma(u)}].$$

En utilisant maintenant (1) on aura :

$$iii)\ \xi_\gamma(u,s) = w_\gamma(u)\left[\frac{\gamma(\ell_u+1)R(u,s)}{\alpha_{\gamma^2}(s)\,(-2w_\gamma(u)+\gamma)} - \frac{2}{R(s,u)}\right].$$

On a donc calculé ξ_γ en fonction de R', α_{γ^2} et η_{γ^2}.

III - Transformation de Poisson

8

On considère un arbre localement fini X, un noyau R' sur S' à sauts de longueur 0 ou 2 et vérifiant les conditions de 1. On suppose R' invariant par un groupe G, mais on ne fait pas d'hypothèse sur celui-ci pour l'instant.

On note $sp_r(R')$ le spectre de l'opérateur ℓ^r associé à R'. Les résultats suivants sont valables en supposant le complémentaire du spectre ℓ^r de R' connexe ou en se restreignant à γ dans la composante connexe non bornée du complémentaire du spectre : en effet sous ces hypothèses les relations de 2.7 et celles du 3 pour le noyau de Green se prolongent analytiquement pour tous ces γ.

On note Ω l'espace compact des bouts de l'arbre, on rappelle qu'un *bout* est une classe d'équivalence (à racourcissement près) de géodésique infinie $(s_0, \cdots, s_n, \cdots)$ de l'arbre. Un sommet s et un bout b de l'arbre définissent une unique géodésique infinie $[s, b) = (s_0 = s, , s_1 \cdots, s_n, \cdots)$ d'origine s et dont la classe d'équivalence est b. La topologie de Ω est donnée par une base d'ouverts, $\{\Omega(y), y \in S'\}$ où pour s_0 fixé dans S' et $y \in S'$, $\Omega(y) = \{b \in \Omega \ / \ y \in [s_0, b)\}$, voir [6] ou [5].

9 Noyau de Poisson

Soit $\gamma \in \mathbb{C} \setminus sp_r(R')$ et $s_0 \in S'$ fixés. On suppose $R'_\gamma(s_0, -)$ jamais nul.

Pour $s, s' \in S'$ on note $P'_{\gamma,s_0}(s, s') = \dfrac{R'_\gamma(s, s')}{R'_\gamma(s_0, s')}$.

Pour $s \in S'$ et $b \in \Omega$, on pose $P'_{\gamma,s_0}(s, b) = P'_{\gamma,s_0}(s, s')$ où s' est n'importe quel sommet de $([s_0, b) \cap [s, b) \cap S')$.

D'après l'expression de R'_γ donnée en 2.7 cette définition ne dépend pas de s'. Plus précisément si on considère les géodésiques dans S' $[s', s_0]' = (x_0 = s', x_1, \cdots, x_p = s_0)$ et $[s', s]' = (y_0 = s', y_1, \cdots, y_n = s)$ on a :

$$P'_{\gamma,s_0}(s, b) = P'_{\gamma,s_0}(s, s') = \frac{\alpha_\gamma(s_0)}{\alpha_\gamma(s)} \frac{\prod_{i=1}^{n} \eta_\gamma(y_i, y_{i-1})}{\prod_{j=1}^{p} \eta_\gamma(x_j, x_{j-1})},$$

et si on modifie s' on ajoute ou retranche aux deux géodésiques les même premiers termes.

Remarque : En utilisant la remarque 2.8 on obtient une autre formule analogue qui a l'avantage de ne faire apparaitre que les ζ_γ, mais pas α_γ (ni η_γ).

Proprietés : Il est facile de montrer que

1) La fonction $P'_{\gamma,s_0}(s,-)$ sur Ω est localement constante.

2) Pour $g, g' \in G$ on a : $P'_{\gamma,s_0}(gg's_0, b) = P'_{\gamma,s_0}(g's_0, g^{-1}b)P'_{\gamma,s_0}(gs_0, b)$.

3) $\displaystyle\sum_{u\in S'} R'(s,u)P'_{\gamma,s_0}(u,b) = \gamma P'_{\gamma,s_0}(s,b)$.

10 Transformation de Poisson

On note $K'(\Omega)$ l'espace des mesures additives finies sur Ω. On définit un opérateur linéaire $\mathcal{P}'_\gamma$ associé à P'_{γ,s_0} de $K'(\Omega)$ dans les fonctions sur S' par :

$$\mathcal{P}'_\gamma(\mu) = \mathcal{P}'_\gamma\mu \ \text{ avec } \ \mathcal{P}'_\gamma\mu(s) = \int_\Omega P'_{\gamma,s_0}(s,w)d\mu(w).$$

D'aprés le point 3 du 9; on a : $R' * \mathcal{P}'_\gamma\mu = \gamma\mathcal{P}'_\gamma\mu$.

On veut étudier la réciproque : c'est à dire, essayer de montrer que toute fonction propre sur S' correspondant à la valeur propre γ pour l'action (à gauche) de R' est la transformée de Poisson d'une unique mesure μ de $K'(\Omega)$. Pour un noyau à sauts de longueur 1 ce résultat a été obtenu par A. Figa-Talamanca et T. Steger [10] dans le cas homogène et par A. Koranyi, M. Picardello, M. Taiblesson et W. Woess [13],[16] dans le cas d'un arbre localement fini. On va s'inspirer de leur raisonnement.

Lemme 10.1: *On suppose $\gamma \in \mathbb{C}\backslash sp_r(R')$ et $R'_\gamma(s_0,-)$ jamais nul.*

Soient $u \in S''$ et $\{x_1, x_2, ..., x_N\} = \Sigma(u,1)$, les $\left(P'_{\gamma,s_0}(-,x_i)\right)_{1\le i\le N}$ sont linéairement indépendantes en tant que fonctions sur $\Sigma(u,1)$ si et seulement si le déterminant : $\delta_\gamma(u) = det\left(\eta_\gamma(x_i,x_j)_{1\le i,j\le N}\right)$ est non nul (en posant $\eta_\gamma(x,x) = 1, \forall x \in S'$).

Démonstration: C'est un calcul facile d'algèbre linéaire. □

Lemme 10.2: *On suppose $R'(s,t) \neq 0$ si $d(s,t) = 2$. On suppose de plus l'une des trois conditions suivantes :*

1. *γ est assez grand et G est presque transitif sur S'.*

2. *tout sommet de S'' est de valence 2, $\gamma \notin sp_r(R')$ et γ n'est pas l'un des pôles des fonctions $\alpha_\gamma(s)$.*

3. *$\gamma \notin sp_r(R')$, γ est différent du pôle de $\alpha_\gamma(s)$ et le groupe G vérifie la condition :*

   $\forall s \in S''$, le fixateur G_s de s dans G est doublement transitif sur $\sum(s,1)$.

Alors $\forall s,t \in S', R'_\gamma(s,t)$ est bien défini et non nul et $\forall u \in S''$ le déterminant $\delta_\gamma(u)$ est non nul.

Remarque : Le cas 2) est essentiellement celui traité par A. Figa Talamanca et T. Steger [10] ou A. Koranyi, M. Picardello, M. Taiblesson et W. Woess [13],[16]. Si G est presque transitif sur S', les fonctions $\alpha_\gamma(s)$ sont en nombre fini.

Démonstration: 1) Pour γ réel suffisament grand, R'_γ est bien défini (par une série) et alors :
$R'_\gamma(s,s)\#\gamma^{-1}, R'_\gamma(s,t)\#\gamma^{-2}R'(s,t)$ donc $\eta_\gamma(s,t)\#\gamma^{-1}R'(s,t)$ si $d(s,t) = 2$. Ainsi R'_γ n'est jamais nul. Pour la non nullité du déterminant il suffit de prendre γ assez grand pour que les $\eta_\gamma(s,t)$ soient petits. D'après la presque transitivité de G ceci n'impose qu'un nombre fini d'inégalités pour $|\gamma|$.

2) Il faut d'abord voir la non nullité des $\eta_\gamma(s,t)$: cela résulte de la formule (2) de 3 (ou plutôt de la formule précédant celle-ci) puisque $\mu(s,t) = \emptyset$ et $R'(s,t) \neq 0$. Le déterminant vaut alors $1 - \eta_\gamma(x_1,x_2)\eta_\gamma(x_2,x_1) = 2\alpha_\gamma(x_2)\dfrac{\eta_\gamma(x_1,x_2)}{R'(x_1,x_2)} \neq 0$.

3) La non nullité des $\eta_\gamma(s,t)$ vient encore de la même formule puisque $R'(s,t) \neq 0$ et $\eta_\gamma(s,u) = \eta_\gamma(s,t)\quad \forall u \in \mu(s,t)$. Pour le déterminant, $\eta_\gamma(x_i,x_j) = \eta(\gamma)$ est indépendant de i,j $(i \neq j)$; donc si, $v(u) = \ell + 1$, $\delta_\gamma(u) = (1-\eta(\gamma))^\ell(1+\ell\eta(\gamma))$. On vérifie que 1 et $-\dfrac{1}{\ell}$ ne sont pas racine de l'equation (2) de 6 vérifiée par $\eta(\gamma)$, donc $\delta_\gamma(u) \neq 0$. □

11 Passage à des boules

On note B_n la boule de centre s_0 et de rayon n et $\Sigma_n = \Sigma(s_0,n)$.

Une fonction définie sur $(B_{2n} \cap S')$ est appelée fonction propre de l'opérateur R' si $(R' * f)(s) = \gamma f(s)$ pour tout s dans $(B_{2n} \cap S') \setminus \Sigma_{2n}$.

Pour $b \in \Omega$, la restriction de $P'_{\gamma,s_0}(-,b)$à B_{2n} vaut $P'_{\gamma,s_0}(-,b)_{|B_{2n}} = P'_{\gamma,s_0}(-,x)$ où x est le dernier sommet de $[s_0,b)$ qui soit dans B_{2n}. On a nécessairement $x \in \Sigma_{2n}$.

Lemme 11.1: *Soit $\gamma \notin sp_r(R')$, on suppose $R'_\gamma(s_0,-)$ jamais nul et les déterminants $\delta_\gamma(u)$ non nuls pour $u \in S''$, alors :*

1) Les $\left(P'_{\gamma,s_0}(-,x_j)\right)_{x_j\in\Sigma_{2n}}$ sont linéairement indépendantes en tant que fonctions en $s \in (B_{2n} \cap S')$.

2)La dimension de l'espace des fonctions définies sur $(B_{2n} \cap S')$, propres pour R' et la valeur propre γ, est le cardinal de Σ_{2n}.

Démonstration: C'est un raisonnement par récurrence analogue à celui de T. Steger [18]. Le passage de n à $n+1$ se fait en plusieurs étapes, à chaque fois on ajoute un sommet de Σ_{2n+1} et tous ses voisins dans Σ_{2n+2}. □

Théorème 11.2: *On suppose $\gamma \notin sp_r(R')$ et $R'_\gamma(s_0,-)$ jamais nul.*

Si, pour $u \in S''$, les $\left(P'_{\gamma,s_0}(-,x_i)\right)_{1\leq i\leq|\Sigma(u,1)|}$ sont linéairement indépendantes en tant que fonction sur $\Sigma(u,1)$ on a :

1) La transformation de Poisson $\mathcal{P}'_\gamma$ est une bijection de $K'(\Omega)$ sur l'espace des fonctions sur S' propres pour R' et la valeur propre γ .

2) Soit f une fonction définie sur S', propre pour R' et la valeur propre γ et soit μ l'unique mesure détérminée par $f(s) = \int_\Omega P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b);\ \forall s \in S'$. On a :

$$f(s_0) = \mu(\Omega).$$

Démonstration: 1)Soit f une fonction sur S' propre pour R' et la valeur propre γ. La restriction de f à B_{2n} est une fonction propre sur B_{2n}; ceci entraine qu'il existe des constantes $(\mu_y)_{y\in\Sigma_{2n}}$ uniques telles que $f_{|B_{2n}}(s) = \sum_{y\in\Sigma_{2n}} \mu_y P'_{\gamma,s_0}(s,y)$, car $(P'_{\gamma,s_0}(-,y))_{y\in\Sigma_{2n}}$ est une base de cet espace de fonctions propres. L'unicité de μ_y entraine que $\mu_y = \sum_{\substack{y_j/d(y,y_j)=2\\ d(s_0,y_j)=d(s_0,y)+2}} \mu_{y_j}$ (car $P'_{\gamma,s_0}(-,y_i)_{|B_{2n}} = P'_{\gamma,s_0}(-,y)_{|B_{2n}}$).

Pour $y \in S'$ et comme $(\Omega(y))_{y\in S'}$ forme une base d'ouverts de Ω, on pose alors $\mu(\Omega(y)) = \mu_y$. On a alors pour $s \in S'$, $f(s) = \int_\Omega P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b)$.

Comme μ est déterminée d'une manière unique, l'application définie ci-dessus est bijective.

2) $f(s_0) = \int_\Omega P'_{\gamma,s_0}(s_0,b)d\mu(b) = \int_\Omega d\mu(b) = \mu(\Omega)$. $\square$

Remarque 11.3: Le théorème s'applique en particulier sous l'une des trois hypothèses du lemme 10.2. Aux 12 et 13 on va généraliser 2), dans certains cas, en déterminant explicitement la transformation de Poisson inverse.

12 Premier cas particulier

On considère un arbre localement fini X d'ensemble de sommets $S = S' \coprod S''$, un groupe G opérant transitivement sur S', vérifiant la condition (M') de 6 et un noyau R' sur $S' \times S'$ à sauts de longueur 0 ou 2 invariant par G.
On suppose $R'(s,t) \neq 0$ si $d(s,t) = 2, \gamma \notin sp_r(R')$ et γ différent du pôle de $\alpha_\gamma(s) = \alpha(\gamma)$. D'après le lemme 10.2 on peut appliquer le théorème 11.2 et on a :

Proposition 12.1: *Soit f une fonction définie sur S', propre pour R' et la valeur propre γ et soit μ l'unique mesure déterminée par :*

$$f(s) = \int_\Omega P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b)\ ,\ s \in S'.$$

On considère $s \in S'$ et $s_i \in \Sigma(s,1), s_i \notin [s_0,s]$; alors :

$$\mu(\Omega(s_i)) = R'_\gamma(s_0,s)R'_i\left[\sum_{j=1}^{\ell_i} f(s_{i,j}) - \ell_i\eta_i f(s)\right],$$

où on note $\Sigma(s_i,1)\setminus \{s\} = \{s_{i,j}\ /\ 1 \leq j \leq \ell_i\}, R'_i = R'(s,s_{i,j})$ et $\eta_i = \eta_\gamma(s,s_{i,j})$, qui ne dépendent pas de j.

Démonstration: Il faut distinguer trois cas :

1^{er} cas :

Si $b \in \Omega \setminus \Omega(s_i)$ alors $P'_{\gamma,s_0}(s_{i,j},b) = \eta_i P'_{\gamma,s_0}(s,b)$.

$2^{\text{ème}}$ cas :

Si $b \in \Omega(s_i) \setminus \Omega(s_{i,j})$ alors $P'_{\gamma,s_0}(s_{i,j},b) = P'_{\gamma,s_0}(s,b)$.

$3^{\text{ème}}$ cas :

Si $b \in \Omega(s_{i,j})$ alors $P'_{\gamma,s_0}(s_{i,j},b) = \eta_i^{-1} P'_{\gamma,s_0}(s,b)$ et par suite

$$f(s_{i,j}) = \eta_i \int_{\Omega \ \setminus \ \Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) + \int_{\Omega(s_i) \ \setminus \ \Omega(s_{i,j})} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) +$$
$$\eta_i^{-1} \int_{\Omega(s_{i,j})} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b).$$

Et comme $\Omega(s_i) = \coprod_{j=1}^{\ell_i} \Omega(s_{i,j})$ on aura :

$$\sum_{j=1}^{\ell_i} f(s_{i,j}) = \ell_i \eta_i \int_{\Omega\setminus \ \Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) + (\ell_i - 1) \int_{\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) +$$
$$+\eta_i^{-1} \int_{\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b).$$

D'autre part :
$\int_{\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) = \left(2\alpha(\gamma)R'_\gamma(s_0,s)\right)^{-1} \mu(\Omega(s_i))$. Et comme,
$f(s) = \int_{\Omega} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) = \int_{\Omega\setminus\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) + \int_{\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b)$.
On obtient alors $\int_{\Omega\setminus\Omega(s_i)} P'_{\gamma,s_0}(s,b)d\mu(b) = f(s) - \left(2\alpha(\gamma)R'_\gamma(s_0,s)\right)^{-1} \mu(\Omega(s_i))$, d'où

$$\sum_{j=1}^{\ell_i} f(s_{i,j}) = \ell_i\eta_i f(s) + \left(2\alpha(\gamma)R'_\gamma(s_0,s)\right)^{-1} \mu(\Omega(s_i))[-\ell_i\eta_i + \eta_i^{-1} + \ell_i - 1].$$

Et en utilisant la relation (2) de 6 liant α et η; à savoir :

$$-\ell_i\eta_i + \eta_i^{-1} + \ell_i - 1 = \frac{2\alpha(\gamma)}{R'_i}.$$

On aura :

$$\mu(\Omega(s_i)) = R'_\gamma(s_0,s)R'_i \left[\sum_{j=1}^{\ell_i} f(s_{i,j}) - \ell_i\eta_i f(s)\right].$$

□

13 Second cas particulier

On considère un arbre localement fini X, d'ensemble de sommets S et un noyau R à sauts de longueur 1 défini sur $S \times S$ invariant par un groupe G opérant presque transitivement sur l'arbre. On suppose $R(s,t) \neq 0 \Leftrightarrow$

$d(s,t) = 1, \gamma \notin sp_r(R)$ et γ différent des pôles des fonctions $w_\gamma(s)$. Par le même genre de calcul qu'au numéro 12 et en utilisant les relations de 2 du 4; on obtient :

Proposition 13.1: *Soit f une fonction définie sur S, propre pour R et la valeur propre γ et soit μ l'unique mesure déterminée par:*
$f(x) = \int_\Omega P_{\gamma,s_0}(x,b)d\mu(b)$, $x \in S$. *On a alors :*

$$\mu(\Omega(y)) = \frac{R(x,y)}{w_\gamma(y)} \left[w_\gamma(y)f(y) - w_\gamma(x)\xi_\gamma(y,x)f(x)\right] R_\gamma(s_0,x);$$

pour $x \in S, y \in \Sigma(x,1)$ et $d(s_0,y) = d(s_0,x)+1$.

Remarque 13.2: Ceci généralise ([10] III 2.1) qui traite le cas d'un arbre homogène et d'un groupe d'invariance G gros (simplement transitif sur S) et les résultats de [13] (voir plus précisement l'appendice) qui travaillent avec un noyau probabiliste et un arbre pas nécessairement homogène, voir aussi ([16] 3.3, 3.4).

Références

[1] K. Aomoto. Spectral theory on a free group and algebraic curves. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, 31:297– 317, 1984.

[2] K. Aomoto. Algebraic equations for Green kernel on a tree. *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci*, 64:123–125, 1988.

[3] K. Aomoto. Self-adjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree. *J. Analyse Math*, 53:219–232, 1989.

[4] K. Aomoto. Point spectrum on a quasi homogeneous tree. *Pacific J. Math*, 147:231–242, 1991.

[5] F. Bouaziz-Kellil. Représentations sphériques des groupes agissant transitivement sur un arbre semi-homogène. *Bull. Soc. Math. France*, 116:255–279, 1988.

[6] P. Cartier. Fonctions harmoniques sur un arbre. *Symp. Math*, 9:203–270, 1972.

[7] E. B. Dynkin and M. B. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 137:1042–1045, 1961.

[8] A. Figa-Talamanca and M. Picardello. Spherical functions and harmonic analysis on free groups. *J. Funct. Anal*, 47:281–304, 1982.

[9] A. Figa-Talamanca and M. Picardello. Harmonic analysis on free groups. Lec. Notes in pure and appl. Math. 87, Marcel Dekker, 1983.

[10] A. Figa-Talamanca and T. Steger. Harmonic analysis for anisotropic random walks on homogeneous trees. Memoirs of AMS, 531, 1994.

[11] P. Gerl and W. Woess. Local limits and harmonic functions for non-isotropic random walks on free groups. *Probab. Theory Relat. Fields*, 71:341–355, 1986.

[12] F. Kellil and G. Rousseau. Généralisation d'un théorème de Haagerup. Studia mathematica, à paraître.

[13] A. Koranyi, M. Picardello, and M. Taiblesson. Hardy spaces on non-homogeneous trees, (avec un appendice de M. Picardello, W. Woess). In *Symp. Math. 29*, pages 205–265. Acad. Press, 1987.

[14] B. Ja. Levit and S. A. Molčanov. Invariant chains on a free group with a finite number of generators. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, 26:80–88, 1971.

[15] M. Picardello and T. Pytlik. Norms of free operators. *Proc. Amer. Math. Soc*, 104:257–261, 1988.

[16] M. Picardello, M. Taibleson, and W. Woess. Harmonic functions on cartesian products of trees with finite graphs. *J. Funct. Anal*, 102:379–400, 1991.

[17] J. P. Serre. *Arbres amalgames* SL_2. Astérisque 46, 1977.

[18] T. Steger. Harmonic analysis for an anisotropic random walk on a homogeneous tree. Thesis, Washington Univ. St. Louis, 1985.

[19] W. Woess. A short computation of the norms of free convolution operators. *Proc. Amer. Math. Soc*, 96:167–170, 1986.

Ferdaous Kellil
Faculté des sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5000 Monastir
Tunisie
kellilferdaous@yahoo.fr

Guy Rousseau
Universite Henri Poincaré
Institut Elie Cartan Nancy
54506 Vandoeuvre les Nancy
France
Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr