ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS LOESER

Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 1 (1985), p. 75-92

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_1_75_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 75-92

QUELQUES CONSÉQUENCES LOCALES DE LA THÉORIE DE HODGE

par François LOESER

Introduction.

Soit $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique non constante et $f : X \longrightarrow D$ un représentant de Milnor. Barlet montre dans [1] que pour toute forme différentielle C^∞ de type $(n, n)\,\varphi$ sur X, l'intégrale sur la fibre $X(t) = X \cap f(t)$ possède un développement asymptotique :

$$\int_{X(t)} \varphi \sim \sum_{r \in A} \sum_{j=0}^{n} \sum_{(m,m') \in \mathbf{N}^2} T^{r,j}_{m,m'}(\varphi)\, t^m \bar{t}^{m'} |t|^r (\log|t|)^j$$

(avec $T^{r,j}_{m,m'}$ des courants de type $(1, 1)$ sur X et $A \subset [0, 2[$ un ensemble fini de rationnels) et pose le problème de la description des développements asymptotiques qui apparaissent effectivement. D'après (loc. cit.), r et k étant fixés, il existe φ, m, m' et $j \geqslant k$ tels que $T^{r,j}_{m,m'}(\varphi) \neq 0$ si et seulement si il existe une forme ψ C^∞ de type $(n+1, n+1)$ sur X et $\nu \in \mathbf{N}$ tels que le prolongement méromorphe au plan complexe de la fonction holomorphe définie pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ par $\int_X |f|^{2Z} \psi$ a un pôle d'ordre au moins k au point $-\dfrac{r}{2} - \nu$.

Un problème naturel est alors de déterminer les pôles de la distribution $|f|^{2Z}$. Barlet montre dans (loc. cit.) que les pôles de $|f|^{2Z}$ sont contenus dans $\{s - m \mid b(s) = 0 \text{ et } m \in \mathbf{N}^*\}$, b désignant le polynôme de Bernstein-Sato de f, et dans [2] que chaque zéro s de b contribue à la création de pôles dans le sens suivant : il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $s - m$ soit pôle de $|f|^{2Z}$ (dans [4] est décrite de manière analogue la contribution "sureffective" des zéros entiers). Dans le cas où f définit une courbe à singularité isolée

Mots-clefs : Singularités, Structures de Hodge mixtes, Polynôme de Bernstein-Sato.

($n = 1$) ou une singularité quasi homogène nous déterminons l'ensemble des pôles de $|f|^{2Z}$ en démontrant le résultat suivant : *tout* rationnel de la forme $s - m$ avec $m \in \mathbf{N}^*$ et s zéro de b est un pôle, et si de plus s est entier et zéro de $b(x)/x$, ce pôle est d'ordre au moins deux (contribution "sureffective").
Dans le cas général des fonctions à singularité isolée nous obtenons le résultat partiel suivant : si α est un exposant de Steenbrink-Varchenko, alors $-(\alpha + 1)$ est un pôle de $|f|^{2Z}$. Ces résultats sont obtenus dans la première partie à l'aide de la théorie de Hodge.

Rappelons que dans [3] Barlet a montré que, pour une $n + 1$ forme holomorphe ω sur X, le développement asymptotique "microlocal" de $\int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df}$ (c'est-à-dire modulo les termes C^∞ que l'on néglige pour ne pas être embarrassé par le courant d'intégration) est déterminé par la connaissance du développement asymptotique des intégrales $\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}$, avec $\gamma(t)$ une famille horizontale multiforme de classes d'homologie de dimension n dans $X(t)$, et de la forme hermitienne semi-horizontale canonique. Il montre de plus que pour les exposants non entiers cette forme coincide avec la forme d'intersection sur la fibre de Milnor (rendue hermitienne). Pour les exposants entiers nous établissons un résultat analogue en considérant la forme d'intersection sur une compactification de la fibre de Milnor.

Nous sommes alors en mesure d'utiliser les travaux de Malgrange sur le lien des développements asymptotiques d'intégrales $\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}$ avec la monodromie et le polynôme de Bernstein-Sato ([9], [10]) ainsi que ceux de Varchenko qui dans ([17], [18]) définit une filtration sur la cohomologie de la fibre de Milnor à l'aide de ces développements. Cette filtration coincide sur les gradués par le poids de la monodromie avec la filtration de Hodge définie par Steenbrink dans [16] pour munir la cohomologie de la fibre de Milnor d'une structure de Hodge mixte. La forme d'intersection vérifie des propriétés de positivité vis à vis de cette structure de Hodge mixte, établies par Schmid dans [15] pour la limite d'une variation de structures de Hodge polarisées, et c'est ce qui nous permet d'obtenir nos résultats.

Dans la seconde partie nous montrons, toujours pour f à singularité isolée, que dès que la forme residu $\frac{\omega}{df}$ est de carré intégrable sur X(0) l'intégrale $\int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df}$ a pour limite $\int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df}$. Ce résultat est un peu surprenant car a priori on pourrait s'attendre à une contribution des composantes verticales au dessus de zéro qui apparaissent après une désingularisation plongée de X(0). La théorie de Hodge intervient ici encore de façon essentielle dans la démonstration : on utilise les travaux de Varchenko sur la filtration asymptotique ([17], [18]) ainsi que le théorème de M. Saito ([13]) sur le genre géométrique des hypersurfaces à singularité isolée.

Je tiens à remercier D. Barlet, C. Sabbah et B. Teissier pour de fructueuses discussions.

Notations et rappels.

Soit $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$ une fonction analytique à singularité isolée en zéro qui définit un germe d'hypersurface réduite V.

On note $B_\epsilon = \{Z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |Z| < \epsilon\}$ et $S_\epsilon = \{Z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |Z| = \epsilon\}$ et on choisit ϵ_0 tel que pour $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$ $f^{-1}(0)$ soit transverse à S_ϵ. On pose $X(t) = f^{-1}(t) \cap B_{\epsilon_0/2}$ et $X = f^{-1}(D_\eta) \cap B_{\epsilon_0/2}$, avec $D_\eta = \{Z \in \mathbf{C} \mid |Z| < \eta\}$ pour $0 < \eta \ll \epsilon_0$.

Sur un petit disque épointé D^* les $H^n(X_t, \mathbf{C})$ forment un système local $\underline{H}$ et on note H l'espace vectoriel des sections multiformes globales de $\underline{H}$.

On note E le sous-espace vectoriel de Nilss $\otimes_{\mathbf{C}}$ H invariant par la monodromie, où Nilss est l'espace vectoriel des germes à l'origine de fonctions de classe de Nilsson.

Il est alors connu qu'on a un morphisme canonique :

$$s : \Gamma(B_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}}) \longrightarrow E$$

qui à une $n+1$ forme holomorphe ω associe l'image de sa forme résidu $\frac{\omega}{df}$ dans E ([17], [18]).

On peut alors écrire $s(\omega) = \sum_{\alpha \in A+\mathbf{N}} t^{\alpha}\, t^{N}\, u_{\alpha}^{\omega}$ avec A un ensemble fini de rationnels > -1 (cf [9]), $\frac{2\pi}{i}$ N le logarithme de la partie unipotente de la monodromie, et $u_{\alpha}^{\omega} \in \mathrm{H}$.

On pose $\alpha(\omega) = \inf\{\alpha \in A \mid u_{\alpha}^{\omega} \neq 0\}$ et $w(\omega)$ le poids de $u_{\alpha(\omega)}^{\omega}$ pour l'action de la monodromie locale.

On rappelle que l'exposant d'Arnold $\sigma(f)$ est par définition égal à $\inf\{\alpha(\omega) + 1 \mid \omega \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})\}$.

Soit $\mathfrak{N}$ le $\mathbf{C}[[t, \bar{t}]]$ module

$$\sum_{r,j} \mathbf{C}[[t, \bar{t}]]\, |\bar{t}|^{r} (\log t\, \bar{t})^{j} / \mathbf{C}[[t, \bar{t}]]$$

avec $r \in \mathbf{Q}$ et $j \in [0, n]$.

Depuis les travaux de Barlet ([1], [3]) on sait qu'on a un morphisme naturel

$$\psi : \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}}) \longrightarrow \mathfrak{N}$$

qui à ω associe le développement asymptotique de $\int_{\mathrm{X}(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{\overline{df}}$ modulo les fonctions C^{∞}.

1. Sur les pôles de $|f|^{2\mathrm{Z}}$.

DEFINITION. — *Soit* $\omega \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})$. *On dit que* ω *est initiale si pour tout* $\omega' \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})$,

$$si\ \ \alpha(\omega) - \alpha(\omega') \in \mathbf{Z}\ \ alors\ \alpha(\omega) \leqslant \alpha(\omega').$$

THEOREME 1.1. — *Si* ω *est initiale, alors la partie principale de* $\psi(\omega)$ *est* $\mathrm{K}\,|t|^{2\alpha(\omega)} \log |t|^{w(\omega)-n}$ *avec* $\mathrm{K} \neq 0$.

On a $w(\omega) - n \geqslant 0$ *et si* $\alpha(\omega) \in \mathbf{Z}$, $w(\omega) - n \geqslant 1$.

Démonstration. — Si λ est une valeur propre de la monodromie, on pose H_{λ} le sous espace propre généralisé qui lui correspond.

On a donc $\mathrm{H} = \oplus\, \mathrm{H}_{\lambda}$.

Sur H on dispose de la filtration asymptotique de Varchenko (cf.

[12] [17] [18]) notée F_a, ainsi que de la filtration de Hodge de Steenbrink ([16]) notée F. Par définition de F_a on a $\forall j : F_a^j H = \oplus (F_a^j \cap H_\lambda)$ de plus si $x \in F_a^j H$, il existe des nombres complexes α_i^λ tels que

$$x + \sum_{i \geqslant 1} \alpha_i N^i x \in F^j H \text{ d'après [18].}$$

Enfin sur $\mathrm{Gr}^W H$, F et F_a coïncident ([18], [12]).

On note $h_\lambda^{p,q} = \dim \mathrm{Gr}_{F_a}^p \mathrm{Gr}_{p+q}^W H_\lambda$, $h^{p,q} = \dim \mathrm{Gr}_{F_a}^p \mathrm{Gr}_{p+q}^W H$.

Lemme 1.3. — *Si ω est initiale, alors $w(\omega) - n \geqslant 0$. Si de plus $\alpha(\omega)$ est entier, $w(\omega) - n \geqslant 1$.*

Démonstration. — Soit $j = -[-\alpha(\omega)]$, par hypothèse on a

(*) $\qquad h_{\lambda(\omega)}^{p,q} = 0$ si $p > n - j$ avec $\lambda(\omega) = e^{2i\pi\alpha(\omega)}$.

Pour montrer le lemme il suffit de vérifier que

$$h_{\lambda(\omega)}^{n-j,k+j-n} = 0 \text{ si } k < n$$

et

$$h_1^{n-j,k+j-n} = 0 \text{ si } k \leqslant n.$$

On remarque pour cela que si $\lambda(\omega) \neq 1$,

$$h_{\lambda(\omega)}^{n-j,k+j-n} = h_{\lambda(\omega)}^{2n-k-j,j}$$

et que

$$h_1^{n-j,k+j-n} = h_1^{2n-k-j+1,j+1},$$

par dualité des exposants.

Comme quand $k < n$ (resp $k \leqslant n$), on a $2n - k - j > n - j$ (resp $2n - k - j + 1 > n - j$), on conclut d'après (*).

Nous allons maintenant utiliser une méthode de compactification éprouvée : d'après [14] on peut par un changement analytique de coordonnées dans $\mathbf{C}^{n+1}$ au voisinage de zéro supposer que f est un polynôme tel que :

a) $Y(0) = \overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$ a zéro pour unique point singulier

b) $Y(t) = \overline{f^{-1}(t)} \subset \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$ est lisse pour $t \neq 0$, $|t|$ petit

c) le degré de f est suffisamment grand pour que le morphisme de restriction $r_t : H^n(Y(t), \mathbf{C}) \longrightarrow H^n(X(t), \mathbf{C}$ soit surjectif pour $0 < |t| \ll \epsilon_0$.

Suivant Varchenko ([18]) on construit une forme polynomiale η de la façon suivante :
il existe un entier p tel que si ω' a un p jet nul, alors $\alpha(\omega') > \alpha(\omega)$ (cf. loc. cit.). Quitte à effectuer un changement de coordonnées supplémentaires, on peut supposer $\deg(f) > p + n + 1$.

Dans ce cas si η est le jet à l'ordre p de ω :

a) on a $\alpha(\omega) = \alpha(\eta)$ et $u^{\omega}_{\alpha(\omega)} = u^{\eta}_{\alpha(\eta)}$

b) la forme $\dfrac{\eta}{f-t}$ se prolonge sur $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$ en une forme méromorphe à pôles logarithmiques le long de $Y(t)$ notée $\widetilde{\eta}_t$ pour $t \neq 0$ petit.

On note $\underline{H}'$ le système local $PH^n(Y(t), \mathbf{C})$ où P désigne la partie primitive, sur un petit disque épointé D^*, H' l'espace des sections multiformes globales de $\underline{H}'$ et E' la partie invariante par la monodromie de Nilss $\otimes_{\mathbf{C}} H'$.

Le résidu de $\widetilde{\eta}_t$ le long de $Y(t)$ noté $R_t(\widetilde{\eta}_t)$ définit alors un élément de E' noté $[R_t(\widetilde{\eta}_t)]$.

D'après le théorème des cycles invariants on peut écrire :

$$[R_t(\widetilde{\eta}_t)] = \sum_{i \in \mathbf{N} \cap [0, j-1]} t^i U_i^{\omega} + t^{\alpha(\omega)} t^{N'} U^{\omega}_{\alpha(\omega)} + \sum_{\beta \in B + \mathbf{N}} t^{\beta} t^{N'} U^{\omega}_{\beta},$$

où les U^{ω} appartiennent à H', les U_i^{ω} sont invariants par la monodromie, B un ensemble fini de rationels $> \alpha(\omega)$, $\dfrac{2\pi}{i} N'$ est le logarithme de la partie unipotente de la monodromie de H' et $r(U^{\omega}_{\alpha(\omega)}) = u^{\omega}_{\alpha(\omega)}$, r étant la flèche de restriction $H' \longrightarrow H$.

On note par $Q(\,.\,,.\,)$ la forme d'intersection sur $H_{\neq 1} = \bigoplus_{\lambda \neq 1} H_{\lambda}$ et $Q'(\,.\,,.\,)$ la forme d'intersection sur H'.

On pose $r = w(\omega) - n$ et on remarque que d'après le théorème des cycles invariants et le lemme 1.3, $U^{\omega}_{\alpha(\omega)}$ et $u^{\omega}_{\alpha(\omega)}$ ont le même poids.

LEMME 1.4. – a) *Si* $\alpha(\omega) \in \mathbf{N}$, $Q'(U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N'^k \overline{U^{\omega}_{\alpha(\omega)}})$ *est non nul pour* $k = r$ *et est nul pour* $k > r$.

b) *Si* $\alpha(\omega) \notin \mathbf{N}$, $Q(u^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N^k \overline{u^{\omega}_{\alpha(\omega)}})$ *est non nul pour* $k = r$, *et nul pour* $k > r$.

Démonstration. – Si on pose

$$\mathrm{I}^{p,q} = \mathrm{F}^p\,\mathrm{H}'\cap \mathrm{W}_{p+q}\,\mathrm{H}'\cap(\overline{\mathrm{F}}^q\,\mathrm{H}'\cap \mathrm{W}_{p+q}\,\mathrm{H}' + \sum_{j\geqslant 1}\overline{\mathrm{F}}^{q-i}\,\mathrm{H}'\cap \mathrm{W}_{p+q-j-1}\,\mathrm{H}'),$$

on a la décomposition suivante : (cf. [6])

$$\mathrm{H}' = \oplus\, \mathrm{I}^{p,q} \quad \mathrm{W}_\ell\,\mathrm{H}' = \bigoplus_{p+q\leqslant \ell} \mathrm{I}^{p,q} \quad \mathrm{F}^p\,\mathrm{H}' = \bigoplus_{r\geqslant p} \mathrm{I}^{r,s}.$$

De plus $\mathrm{I}^{p,q} = \bigoplus_{j\geqslant 0} \mathrm{N}'^j\,(\mathrm{I}_0^{p+j,q+j})$ avec $\mathrm{I}_0^{r,s} = \mathrm{I}^{r,s}\cap \operatorname{Ker} \mathrm{N}^{r+s-n+1}$ et d'après [15] (6.16. p. 255 voir aussi [5] p. 107) on a : (1.5) : pour $p+q\geqslant n$, si $u\in \mathrm{I}_0^{p,q}$,

$$(-1)^{n\frac{(n-1)}{2}}\, i^{p-q}\, \mathrm{Q}'(u\,,\, \mathrm{N}_s'^{p+q-n}\,\overline{u}) > 0\,,\ \text{avec } \mathrm{N}_s' = \frac{2\pi}{i}\,\mathrm{N}.$$

D'après [16] la filtration de Hodge sur H' et H est compatible avec la décomposition en sous espaces propres :

$$\mathrm{F}^p\,\mathrm{H}' = \oplus\, \mathrm{F}^p\,\mathrm{H}'\cap \mathrm{H}'_\lambda\,.$$

Comme les H'_λ sont stables par N', W est également compatible avec la décomposition en sous espaces propres, et si on pose

$$\mathrm{I}_\lambda^{p,q} = \mathrm{F}^p\,\mathrm{H}'_\lambda\cap \mathrm{W}_{p+q}\,\mathrm{H}'_\lambda\cap(\overline{\mathrm{F}}^q\,\mathrm{H}'_\lambda\cap \mathrm{W}_{p+q}\,\mathrm{H}'_\lambda + \sum_{j\geqslant 1}\overline{\mathrm{F}}^{q-j}\,\mathrm{H}'_\lambda\cap \mathrm{W}_{p+q-j-1}\,\mathrm{H}'_\lambda),$$

on a
$$\mathrm{I}^{p,q} = \bigoplus_\lambda \mathrm{I}_\lambda^{p,q}$$

et
$$\mathrm{I}_\lambda^{p,q} = \bigoplus_{j\geqslant 0} \mathrm{N}'^j\,(\mathrm{I}_{0,\lambda}^{p+j,q+j})$$

avec
$$\mathrm{I}_{0,\lambda}^{r,s} = \mathrm{I}_\lambda^{r,s}\cap \operatorname{Ker} \mathrm{N}^{r+s-n+1}\,.$$

Si $\alpha(\omega)\notin \mathbf{N}$: Comme r induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}'_{\lambda(\omega)}$ et $\mathrm{H}_{\lambda(\omega)}$, on les identifiera via cet isomorphisme.

Considérons $v_{\alpha(\omega)}^\omega$ tel que $v_{\alpha(\omega)}^\omega = u_{\alpha(\omega)}^\omega + \sum_{j\geqslant 1} \alpha_i\,\mathrm{N}^i\,u_{\alpha(\omega)}^\omega$ et $v_{\alpha(\omega)}^\omega \in \mathrm{F}^{n-j}\,\mathrm{H}_{\lambda(\omega)}$.

Comme
$$\mathrm{F}^p\,\mathrm{H}_{\lambda(\omega)} = 0 \text{ pour } p > n-j,$$

on a
$$\mathrm{F}^{n-j}\,\mathrm{H}_{\lambda(\omega)} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{I}_{0,\lambda(\omega)}^{n-j,\,w(\omega)-n+j-k}\,.$$

Si on appelle x la composante de $v_{\alpha(\omega)}^\omega$ sur $\mathrm{I}_{0,\lambda(\omega)}^{n-j,\,w(\omega)-n+j}$, on a $N^r(v^{\omega}_{\alpha(\omega)} - x) = 0$ avec $r = w(\omega) - n$, donc, comme Q est invariante par la monodromie, on a

$$Q(v^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N^r \overline{v^{\omega}_{\alpha(\omega)}}) = Q(x, N^r \overline{x}),$$

donc, d'après (1.5), on a $Q(v^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N^r \overline{v^{\omega}_{\alpha(\omega)}}) \neq 0$, (car x est non nul).

De plus, on a $N^k v^{\omega}_{\alpha(\omega)} = 0$ si $k > r$, d'où $N^k u^{\omega}_{\alpha(\omega)} = 0$ pour $k > r$.

Si $\alpha(\omega) \in \mathbf{N}$: On considère $v^{\omega}_{\alpha(\omega)}$ comme dans le cas précédent.

Comme la restriction de $r : (H'_1, F, W) \longrightarrow (H_1, F, W)$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes, $F^p H'_1$ n'est constitué que de cycles invariants si $p > n - j$.

On peut donc trouver $V^{\omega}_{\alpha(\omega)} \in \bigoplus_{k \geq 0} I_{0,1}^{n-j, w(\omega)-n+j-k}$ tel que $r(V^{\omega}_{\alpha(\omega)}) = v^{\omega}_{\alpha(\omega)}$.

Si x est la composante de $V^{\omega}_{\alpha(\omega)}$ sur $I_{0,1}^{n-j, r+j}$ on s'assure comme précédemment que $Q'(V^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N'^r V^{\omega}_{\alpha(\omega)}) = Q'(x, N'^r x)$ avec $r = w(\omega) - n$.

De plus $N'^k V^{\omega}_{\alpha(\omega)} = 0$ si $k > r$.

On écrit $V^{\omega}_{\alpha(\omega)} = U^{\omega}_{\alpha(\omega)} + \sum_{i \geq 1} \alpha_i N'^i U^{\omega}_{\alpha(\omega)} + y$ avec y invariant.

Comme $r \geq 1$ et que $N'^k V^{\omega}_{\alpha(\omega)} = N'^k U^{\omega}_{\alpha(\omega)} = 0$ si $k > r$, on a $Q'(U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N'^r \overline{U^{\omega}_{\alpha(\omega)}}) = Q(V^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N'^r \overline{V^{\omega}_{\alpha(\omega)}}) \neq 0$

c.q.f.d.

Pour conclure, au vu du théorème de [3] il suffit de savoir que si h désigne la forme hermitienne canonique de loc. cit., on a :

a) Si $\alpha(\omega) \in \mathbf{N}$:

$$h(u^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N^{k-1} u^{\omega}_{\alpha(\omega)}) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n Q'(U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, \overline{N'^k U^{\omega}_{\alpha(\omega)}})$$

b) Si $\alpha(\omega) \notin \mathbf{N}$

$$h(u^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N^k u^{\omega}_{\alpha(\omega)}) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n Q(u^{\omega}_{\alpha(\omega)}, \overline{N^k u^{\omega}_{\alpha(\omega)}}).$$

b) est démontré dans loc. cit., il nous suffit donc de démontrer a). Une variante de ce qui suit permettrait également de retrouver b).

Supposons donc $\alpha(\omega) \in \mathbf{N}$:

on a $\displaystyle\int_{Y(t)} R_t(\tilde{\eta}_t) \wedge \overline{R_t(\tilde{\eta}_t)} = Q'([R_t(\tilde{\eta}_t)], [\overline{R_t(\tilde{\eta}_t)}])$

$$= P(|t|^2) + |t|^{2\alpha(\omega)} \sum_{k=0}^{r} Q'\Big(\frac{(\log t)^k}{k!} N'^k U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, \frac{(\overline{\log t})^{r-k}}{(r-k)!} \overline{N'^{r-k} U^{\omega}_{\alpha(\omega)}}\Big)$$
$$+ o(|t|^{2\alpha(\omega)} (\log |t|)^r).$$

Comme $\overline{N' U^{\omega}_{\alpha(\omega)}} = - N' \overline{U^{\omega}_{\alpha(\omega)}}$ et que $Q'(x, N'y) = - Q'(N'x, y)$ on a

$$\sum_{k=0}^{r} Q'\Big(\frac{(\log t)^k}{k!} N'^k U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, \frac{(\overline{\log t})^{r-k}}{(r-k)!} \overline{N'^{r-k} U^{\omega}_{\alpha(\omega)}}\Big)$$
$$= (-1)^r \sum_{k=0}^{r} \frac{(\log t)^k (\overline{\log t})^{r-k}}{k!(r-k)!} Q'(U^{\omega}_{\alpha(\omega)}, N'^r \overline{U^{\omega}_{\alpha(\omega)}}),$$

donc la partie principale de l'image de $\displaystyle\int_{Y(t)} R_t(\tilde{\eta}_t) \wedge \overline{R_t(\tilde{\eta}_t)}$ dans $\mathcal{N}$ est $K|t|^{2\alpha(\omega)} \log |t|^r$ avec $K \neq 0$.

Pour terminer la démonstration du théorème il nous suffit de remarquer que $\displaystyle\int_{Y(t)\setminus X(t)} R_t(\tilde{\eta}_t) \wedge \overline{R_t(\tilde{\eta}_t)}$ est C^∞ car $Y(0)\setminus X(0)$ est lisse et que d'autre part on peut choisir un jet η tel que $\displaystyle\int_{X(t)} \frac{\eta}{df} \wedge \frac{\overline{\eta}}{df} - \int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df}$ soit un $o(|t|^{2\alpha(\omega)})$ d'après le théorème des zéros de Hilbert.

COROLLAIRE 1.6. – *On a l'estimation suivante du volume du tube* $T_\eta = f^{-1}(D_\eta) \cap B_{\epsilon_0 | 2}$ *dans un système général de coordonnées : la partie principale de l'image de* $\mathrm{vol}(T_\eta)$ *dans* $\mathcal{N}$ *est de la forme* $K|\eta|^{2\sigma(f)} \log|\eta|^k$ *avec* $K \neq 0$ *et* $k \leqslant n$. *Si* $\sigma(f) \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 1$.

Démonstration. – Il suffit de remarquer que dans un système général de coordonnées on a $\sigma(f) - 1 = \alpha(\omega_0)$ si ω_0 est la forme $dx_0 \wedge - \wedge dx_n$ et d'appliquer 1.1 et le théorème de Fubini.

Remarque 1.7. – Quand $\alpha(\omega) > 0$, pour ne pas être embarrassé par le courant d'intégration sur $X(0)$ il faut travailler dans

$\mathcal{N}$. Par contre dans le cas où $\alpha(\omega) \leqslant 0$, le théorème 1.1 prend la forme plus précise suivante :

$$\int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} = K\,|t|^{2\alpha(\omega)} (\log |t|)^{w(\omega)-n} + o(|t|^{2\alpha(\omega)} (\log |t|)^{w(\omega)-n})$$

avec $K \neq 0$.

De même si

$$\sigma(f) \leqslant 1\,, \mathrm{vol}(T_\eta) = K\,|\eta|^{2\sigma(f)} \log |\eta|^k + o(|\eta|^{2\sigma(f)} \log |\eta|^k)$$

avec $K \neq 0$ et de plus $k \geqslant 1$ si $\sigma(f) = 1$.

Pour ce dernier résultat il faut remarquer que $\alpha(\omega_0) = \sigma(f) - 1$ pour $\omega_0 = dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n$ dans tout système de coordonnées. En effet, avec les notations de la 2ᵉ partie, on a $g(\omega_0) = \sigma(f)$ d'après [8] et $\alpha(\omega_0) = g(\omega_0) - 1$ d'après 2.2.

Rappelons la définition du polynôme de Bernstein-Sato d'une fonction analytique $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$:

D'après un théorème désormais classique dû à Bernstein si f est un polynôme et étendu au cas général par Björk, il existe un polynôme complexe B non nul et un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en s, $P(s)$ tels que :

$$P(s) f^s = B(s) f^{s-1}. \qquad (*)$$

Le générateur unitaire de l'idéal des polynômes B tels qu'il existe un P vérifiant (*) est appelé le polynôme de Bernstein-Sato de f et est noté b. Comme $b(0) = 0$ (faire $s = 0$ dans (*)) on peut poser $b = s\widetilde{b}$.

Soit φ une forme C^∞ à support compact de type $(n+1, n+1)$, la fonction $\int_X |f|^{2\lambda} \varphi$ est analytique pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Dans [1] Barlet montre que (*) permet de prolonger cette fonction de λ en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont l'ensemble des pôles est contenu dans $\{s - m - 1 \mid m \in \mathbf{N}$ et $b(s) = 0\}$.

On dira que s est un pôle d'ordre au moins k de $|f|^{2Z}$ si s est un pôle de $\int_X |f|^{2\lambda} \varphi$ d'ordre au moins k, pour le choix d'au moins une telle φ.

Dans [2] il est montré (sans hypothèses sur les singularités de f), que si $b(s) = 0$, alors il existe un entier m tel que $s - m - 1$ soit un pôle de $|f|^{2Z}$ (on y donne également une majoration du plus petit m possible ; de plus si s est entier l'ordre du pôle est au moins deux ([4]).

Sous l'hypothèse que f est à singularité isolée en zéro, nous montrons le résultat suivant :

THEOREME 1.8. – *L'ensemble des pôles de* $|f|^{2Z}$ *contient* $-\mathbf{N}^* \cup \mathrm{E}$ *où* $\mathrm{E} = \{-(\alpha(\omega) + 1) \mid \omega \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})\}$. *De plus les points entiers de* E *sont des pôles d'ordre au moins deux.*

Démonstration. – Soit ω une forme initiale : d'après le théorème de Fubini on a :

$$\int_{\mathrm{X}} |f|^{2\mathrm{Z}} \, \omega \wedge \overline{\omega} = \int_{|t| \leqslant \eta} |t|^{2\mathrm{Z}} \left(\int_{\mathrm{X}(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \overline{\frac{\omega}{df}}\right) dt \wedge d\bar{t}.$$

La fonction $\int_{\mathrm{X}} |f|^{2\mathrm{Z}} \, \omega \wedge \overline{\omega}$ a donc un pôle d'ordre $w(\omega) - n$ en $-(\alpha(\omega) + 1)$ (passer en coordonnées polaires, appliquer le théorème 1.1. et remarquer que la fonction $\mathrm{Z} \longrightarrow \int_0^{\eta} t^{2(\mathrm{Z}+\alpha)} \, t(\log t)^k \, dt$ a un pôle d'ordre $k + 1$ en $-(\alpha + 1)$).

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\int_{\mathrm{X}} |f|^{2\mathrm{Z}} f^p \, \omega \wedge \overline{f^p \, \omega}$

a donc un pôle d'ordre $w(\omega) - n$ en $-(\alpha(\omega) + 1 + p)$.

Enfin si ρ est une fonction positive C^{∞} dans $\mathrm{B}_{\epsilon_0/2}$ telle que : $\rho(x) = 1$ si $\epsilon_0/3 \leqslant |x| \leqslant \epsilon_0/2$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \leqslant \epsilon_0/4$, la fonction de Z $\int_{\mathrm{X}} |f|^{2\mathrm{Z}} \, |f|^{2p} \, \rho \, \omega_0 \wedge \overline{\omega_0}$ a un pôle simple en $-(p + 1)$ pour tout entier p.

Dans le cas des courbes ($n = 1$) et des fonctions quasi homogènes nous déterminons l'ensemble des pôles de $|f|^{2\mathrm{Z}}$:

THEOREME 1.9. – *Soit* $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$ *une fonction analytique à singularité isolée en zéro ; l'ensemble des pôles de* $|f|^{2\mathrm{Z}}$

coïncide avec $-\mathbf{N}^* \cup \mathrm{F}$ *où* $\mathrm{F} = \{s - m \mid m \in \mathbf{N}^*$ *et* $\widetilde{b}(s) = 0\}$ *si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

a) $n = 1$.

b) f *est quasi homogène.*

De plus les points entiers de F *sont alors des pôles d'ordre au moins deux.*

Démonstration. – Comme dans [1] il est montré que l'ensemble des pôles de $|f|^{2\mathrm{Z}}$ est contenu dans $-\mathbf{N}^* \cup \mathrm{F}$ il nous suffit de vérifier l'inclusion réciproque pour montrer l'égalité.

a) : Soit $-\beta$ une racine de $\widetilde{b}$, on veut montrer que $-(\beta + 1)$ est un pôle de $|f|^{2z}$. Posons

$$\lambda = \exp(2 i \pi \beta), \ \alpha = \inf\{\alpha(\omega) \mid \exp(2 i \pi \alpha(\omega)) = \lambda\}.$$

On a $\alpha \in]-1, +1[$ (cf [17],) donc si $\beta \geqslant 0$, β est de la forme $\alpha + k$ avec $k \in \mathbf{N}$, et on peut appliquer le théorème 1.8. pour conclure. D'autre part si $\mathrm{F}^1 \mathrm{H}_\lambda \neq 0$, il existe $\omega \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^2_{\mathbf{C}^2})$ telle que $\alpha(\omega) = \beta$ et 1.8. s'applique également. Il reste donc à traiter le cas où $\beta \in]-1, 0[$ et $\mathrm{F}^1 \mathrm{H}_\lambda = 0$.

Dans ce cas $\mathrm{H}'_\lambda = \mathrm{I}^{0,1}_{0,\lambda}$: comme $\mathrm{F}^1 \mathrm{H}'_\lambda = 0$ on a $\mathrm{I}^{1,0}_\lambda = \mathrm{I}^{1,1}_\lambda = 0$, d'où $\mathrm{W}_2 \mathrm{H}'_\lambda = \mathrm{W}_1 \mathrm{H}'_\lambda$ et $\mathrm{W}_0 \mathrm{H}'_\lambda = 0$, ce qui donne $\mathrm{H}'_\lambda = \mathrm{I}^{0,1}_\lambda$ qui est alors nécessairement égal à $\mathrm{I}^{0,1}_{0,\lambda}$.

D'autre part d'après le théorème 13 de [19] il existe $\omega \in \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0}, \Omega^2_{\mathbf{C}^2})$ telle que

$$s(\omega) = \sum_{\alpha < \beta} t^\alpha t^{\mathrm{N}} u_\alpha + t^\beta t^{\mathrm{N}} u_\beta + \sum_{\alpha' > \beta} t^{\alpha'} t^{\mathrm{N}} u_{\alpha'}$$

avec $u_\beta \neq 0$.

Comme $\lambda \neq 1$, on peut identifier H_λ et H'_λ, et comme $u_\beta \in \mathrm{I}^{0,1}_{0,\lambda}$ on a $\mathrm{Q}(u_\beta, \overline{u}_\beta) \neq 0$ d'après 1.5 et donc

$$\Psi(\omega) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant 1 \\ \alpha < \beta}} \mathrm{K}_{\alpha, i} |t|^{2\alpha} (\log |t|)^i + \mathrm{K}_\beta |t|^{2\beta} + \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant 1 \\ \alpha' > \beta}} \mathrm{K}_{\alpha', i} |t|^{2\alpha'} (\log |t|)^i$$

avec $\mathrm{K}_\beta \neq 0$. On en déduit que $-(\beta + 1)$ est un pôle de $|f|^{2\mathrm{Z}}$ par le raisonnement utilisé dans la démonstration de 1.8.

b) Dans ce cas F = E car le réseau de Gauss-Manin est saturé (ou par comparaison des formules classiques pour le polynôme de Bernstein et les exposants) (cf. [21]) et il suffit d'appliquer le théorème 1.8.

Question : la conclusion du théorème 1.9 est-elle vérifiée pour f quelconque à singularité isolée ou non isolée ?

2. Une propriété des formes résidus.

THEOREME 2.1. – *Soit* ω *une* $n+1$ *forme holomorphe sur* B_{ϵ_0} , *les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\int_{X(0)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} < +\infty \left(\text{i.e. } \frac{\omega}{df} \text{ est } L^2 \text{ sur } X(0)\right)$

2) $\int_{X(0)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} < +\infty$ et $\lim_{t\to 0} \int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} = \int_{X(0)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df}$

3) $\limsup_{\substack{|t|\to 0 \\ t\neq 0}} \left| \int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} \right| < +\infty$

4) $\alpha(\omega) > 0$.

Démonstration :

. 2) $\Longrightarrow$ 1) et 3) : trivial.

. 3) $\Longrightarrow$ 4) d'après la remarque 1.7.

. 4) $\Longrightarrow$ 2) : pour cela il nous faut rappeler des résultats de Varchenko ([17]).

On considère $\rho : Y \longrightarrow B_{\epsilon_0/2}$ une résolution des singularités de $B_{\epsilon_0/2}$ telle que $(f\circ\rho)^{-1}(0) = E_0 + \sum_{i=1}^{m} m_i E_i$ soit un diviseur à croisements normaux ; E_0 est la transformée stricte de V et les E_i sont réduits.

On pose $g_i(\omega) = \dfrac{1+v_{E_i}(\rho^*\omega)}{m_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, v_{E_i} désignant la valuation sur le diviseur E_i et on pose $g(\omega) = \inf_{i\geqslant 1} g_i(\omega)$.

PROPOSITION 2.2 ([17]). – *Si* $g(\omega) \leqslant 1$, *alors*

$$\alpha(\omega) = g(\omega) - 1 .\text{(1)}$$

(1) Signalons à ce propos que le lemme 4.6. de [17] ne paraît démontré que si $g(\omega) \leqslant 1$.

COROLLAIRE 2.3. – *Si* $\alpha(\omega) > 0$, *alors* $g(\omega) > 1$.

On note ρ' la restriction de ρ à E_0. Soit ω telle que $\alpha(\omega) > 0$. Pour montrer que $\int_{X(0)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\overline{\omega}}{df} < +\infty$ on va vérifier que $\rho'^*\left(\frac{\omega}{df}\right)$ n'a pas de singularité sur E_0.

Soit p un point de $(f \circ \rho)^{-1}$ (0) qui appartient à E_0 et à exactement k autres composantes irréductibles distinctes : $E_{p(1)}, \ldots, E_{p(k)}$ $(p(i) \neq 0)$. Il existe alors un système de coordonnées $Z_0, \ldots, Z_n$ centré en p tel que sur un ouvert relativement compact U_p contenant p on ait :

$$f \circ \rho = Z_0 \, Z_1^{m_{p(1)}} \ldots Z_k^{m_{p(k)}} .$$

Comme $g(\omega) > 1$ on a $v_{E_i}(\rho^* \omega) \geqslant n_i$ donc sur U_p $\rho^* \omega$ est donnée par

$$\rho^* \omega = Z_1^{m_{p(1)}} \ldots Z_k^{m_{p(k)}} \varphi(Z_0, \ldots, Z_n) \, dZ_0 \wedge \ldots \wedge dZ_n$$

avec φ holomorphe.

On a donc $\rho^* \omega = \varphi \, d(f \circ \rho) \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_n$, ce qui prouve que $\rho^*\left(\frac{\omega}{df}\right)$ est holomorphe sur E_0. D'autre part

$$\lim_{t \to 0} \int_{U_p \cap (f \circ \rho)^{-1}(t)} \rho^*\left(\frac{\omega}{df}\right) \wedge \overline{\rho^*\left(\frac{\omega}{df}\right)}$$

$$= \int_{U_p \cap (f \circ \rho)^{-1}(0)} |\varphi|^2 \, dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_n \wedge d\overline{Z}_1 \ldots d\overline{Z}_n$$

$$= \int_{U_p \cap E_0} |\varphi|^2 \, dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_n \wedge d\overline{Z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{Z}_n .$$

Soit maintenant p un point de $(f \circ \rho)^{-1}$ (0) qui n'appartient pas à E_0 mais appartient à exactement k composantes irréductibles distinctes : $E_{p(1)}, \ldots, E_{p(k)}, (p(i) \neq 0)$.

Considérons de même un système de coordonnées locales centré en p tel que l'on ait :

$$f \circ \rho = Z_1^{m_{p(1)}} \ldots Z_k^{m_{p(k)}} .$$

On a de même $\rho^*(\omega) = Z_1 \, \varphi \, d(f \circ \rho) \, dZ_0 \wedge dZ_2 \wedge \ldots \wedge dZ_n$ avec φ holomorphe, donc

$$\lim_{t\to 0}\int_{U_p\cap(f\circ\rho)^{-1}(t)} \rho^*\left(\frac{\omega}{df}\right)\wedge\overline{\rho^*\ \frac{\omega}{df}}$$

$$= \int_{U_p\cap(Z_1\dots Z_k=0)} |Z_1|^2\ |\varphi|^2\ dZ_0\wedge dZ_2$$

$$\wedge\dots\wedge dZ_n\wedge\overline{dZ_0}\wedge\overline{dZ_2}\dots\overline{dZ_n} = 0.$$

On a donc montré que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{X(t)}\frac{\omega}{df}\wedge\frac{\overline{\omega}}{df} = \int_{X(0)}\frac{\omega}{df}\wedge\frac{\overline{\omega}}{df}$.

1) $\Longrightarrow$ 4) : Rappelons le résultat suivant dû à M. Saito :

THEOREME 2.4 [13]. – *Soit* p_g *le genre géométrique de* V, *alors* $p_g = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^n_{\mathrm{F}}\ \mathrm{H}$.

Rappelons que F est la filtration de Hodge définie par Steenbrink sur la cohomologie de la fibre de Milnor dans [16], tandis que p_g est défini par :

$$p_g = \dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{R}^{n-1}\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{V}}})_0 \quad \text{si } n \geqslant 2$$
$$= \dim_{\mathbf{C}}(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{V}}}/\mathcal{O}_{\mathrm{V}})_0 \quad \text{si } n = 1$$

pour $\pi : \widetilde{\mathrm{V}} \longrightarrow \mathrm{V}$ une résolution des singularités de V.
On a une autre interprétation de p_g due à Laufer et Yau :

THEOREME 2.5 [7] [20]. – $p_g = \dim_{\mathbf{C}} \dfrac{\Gamma(\mathrm{V}-\{0\},\Omega^n)}{\mathrm{L}^2(\mathrm{V}-\{0\},\Omega^n)}$

où $\mathrm{L}^2(\mathrm{V}-\{0\},\Omega^n)$ *désigne l'espace des* n *formes holomorphes* α *sur* $\mathrm{V}-\{0\}$ *telles que* $\displaystyle\int_{\mathrm{V}-\{0\}}\alpha\wedge\overline{\alpha} < +\infty$.

D'autre part comme d'après ([17], [18]) on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^n_{\mathrm{F}_a}\ \mathrm{H} = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^n_{\mathrm{F}}\ \mathrm{H},$$

on a la traduction suivante du théorème de M. Saito :

$$(*)\qquad \dim_{\mathbf{C}} \frac{\Gamma(\mathrm{V}-\{0\},\Omega^n)}{\mathrm{L}^2(\mathrm{V}-\{0\},\Omega^n)} = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^n_{\mathrm{F}_a}\ \mathrm{H}.$$

Soit $\omega\in\Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0},\Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})$, si $s(\omega) = \Sigma\ t^\alpha\ t^{\mathrm{N}}\ u^\omega_\alpha$ on pose $\gamma(\omega) = \displaystyle\sum_{\alpha\leqslant 0} u^\omega_\alpha$ et on a ainsi défini une application linéaire :

$\gamma : \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0},\Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}}) \longrightarrow \mathrm{H}$ et on considère le morphisme quotient :

$$\widetilde{\gamma} : \Gamma(\mathrm{B}_{\epsilon_0},\Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^n_{\mathrm{F}_a}\ \mathrm{H}.$$

Soit $\beta \in \Gamma(V - \{0\}, \Omega^n)$, d'après Picard (cf. [11]) il existe $\omega \in \Gamma(B_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})$ dont le résidu est β. Comme V est réduite si le résidu de $\omega - \omega'$ est nul, alors $\omega - \omega' = f\omega''$ avec $\omega'' \in \Gamma(B_{\epsilon_0}, \Omega^{n+1}_{\mathbf{C}^{n+1}})$ d'où $\tilde{\gamma}(\omega) = \tilde{\gamma}(\omega')$ car

$$\alpha(f\omega'') = 1 + \alpha(\omega'') > 1 - 1 = 0$$

d'après [9]. On peut donc poser $\bar{\gamma}(\beta) = \gamma(\omega)$ et on a ainsi défini une application linéaire :

$$\bar{\gamma} : \Gamma(V - \{0\}, \Omega^n) \longrightarrow \mathrm{Gr}^n_{F_a} H.$$

Comme $\tilde{\gamma}$ est surjectif, $\bar{\gamma}$ l'est aussi, et comme 4) implique 1), le noyau de $\bar{\gamma}$ est contenu dans $L^2(V - \{0\}, \Omega^n)$. Mais d'après (*) ce noyau est donc égal à $L^2(V - \{0\}, \Omega^n)$. Si ω vérifie 1) on a donc $\tilde{\gamma}(\omega) = 0$, autrement dit $\alpha(\omega) > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Barlet, Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres, *Inventiones Math.*, 68 (1982), 129-174.

[2] D. Barlet, Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques, *Annales Sc. E.N.S.*, 4è série, t. 17 (1984), 293-315.

[3] D. Barlet, Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée, Institut Elie Cartan, Septembre 1983 (Nouvelle version Septembre 1984).

[4] D. Barlet, Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2z}$. Preprint Institut Elie Cartan. (Sept. 83) à paraître *aux Annales Institut Fourier* (1984).

[5] E. Cattani et A. Kaplan, Polarized Mixed Hodge Structures and the local monodromy of a variation of Hodge Structure, *Inventiones Math.*, 67 (1982), 101-115.

[6] P. GRIFFITHS et W. SCHMID, Recent developments in Hodge Theory, a discussion of techniques and results in Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to moduli p. 31-124, Oxford Univers. Press 1975.

[7] H. LAUFER, On rational singularities, *Am. J. Math.*, 94 (1972), 597-608.

[8] K.C. LO, Exposants de Gauss-Manin. Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, *Progress in Math.*, 2 (1979), 171-212.

[9] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. Sci. E.N.S.* (4) 7 (1974), 405-430.

[10] B. MALGRANGE, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Springer Lecture Notes,* 459 (1975), 98-115.

[11] M. MERLE et B. TEISSIER, Conditions d'adjonction. Lecture Notes 777 p. 229-246.

[12] F. PHAM, Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé, *Astérisque,* 101-102 (1983), 268-285.

[13] M. SAITO, Exponents and the geometric genus of a isolated hypersurface singularity. Proceedings of Symposia in Pure Maths Volume 40 (1983), Part 2. p. 465-472.

[14] J. SCHERK, On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities, *Inventiones Math.*, 58 (1980), 289-301.

[15] W. SCHMID, Variation of Hodge structure : The singularities of the period mapping, *Inventiones Math.*, 22 (1973), 211-319.

[16] J. STEENBRINK, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. Real and complex singularities, Oslo 1976, p. 525-563.

[17] A. VARCHENKO, Asymptotic mixed Hodge structure on vanishing cohomology, *Izv. Akad. Nauk,* 45, 3 (1981), 540-591.

[18] A. VARCHENKO, Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure, *Dokl. Akad. Nauk,* 255, 5 (1980), 1035-1038.

[19] A. VARCHENKO, Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial, *Bull. Soc. Math.*, 104 (1980), 205-223.

[20] S.S.T. YAU. Two theorems on higher dimensional singularities, *Math. Annalen,* 231 (1977), 55-59.

[21] T. YANO, B-Functions and Exponents of hypersurface isolated singularities, *Proceedings of Symposia in Pure Maths,* Volume 40 (1983), Part. 2 p. 641-652.

Manuscrit reçu le 16 décembre 1983
révisé le 4 septembre 1984.

François LOESER,
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France).