Pierre De La Harpe
Georges Skandalis

Produits finis de commutateurs dans les C^*-algèbres

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 4 (1984), p. 169-202
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 4 (1984), 169-202.

PRODUITS FINIS DE COMMUTATEURS DANS LES C*-ALGÈBRES

par P. de la HARPE et G. SKANDALIS

Soient A une C*-algèbre, $GL_1(A)$ le groupe des éléments inversibles (ou quasi-inversibles s'il n'y a pas d'unité) de A et $GL_1^0(A)$ sa composante connexe. Ce travail fait suite à [8], où nous avons défini un homomorphisme

$$\Delta_T: \quad GL_1^0(A) \to E_u/\underline{T}(K_0(A))$$

appelé *déterminant universel* de A. Rappelons que E_u est le quotient de A par $\overline{[A,A]}$, que $T: A \to E_u$ est la projection canonique, que $\underline{T}: K_0(A) \to E_u$ est l'application naturelle induite par T, et que $\Delta_T(\exp(i2\pi y))$ est la classe de $T(y)$ pour tout $y \in A$. (En fait Δ_T est la restriction d'un homomorphisme de source $GL_\infty^0(A)$ désigné par le même symbole.) Nous examinons ici des cas d'algèbres A, déjà considérées dans [4], pour lesquelles le noyau de Δ_T est égal au groupe dérivé $DGL_1^0(A)$; elles se comportent donc en ceci comme les algèbres semi-simples complexes de dimension finie. Nous montrons aussi pour ces algèbres que le noyau de la restriction de Δ_T au groupe $U_1^0(A)$ des unitaires de $GL_1^0(A)$ est égal à $DU_1^0(A)$.

Nous poursuivons la numérotation de [8]. Les preuves qui suivent étant très calculatoires, nous avons regroupé au paragraphe 5 divers résultats techniques sur les C*-algèbres. Beaucoup sont sans doute connus, mais nous ignorons les références adéquates. Le paragraphe 6 traite le cas des algèbres AF avec unité en développant des procédés de calcul dont certains remontent au moins à M. Broise (voir aussi la proposition 2.5 de [5]). Le résultat principal est le

THÉORÈME I. — *Soit* A *une* C*-*algèbre approximativement finie simple avec unité et soit* $x \in GL_1(A)$ *avec* $\Delta_T(x) = 0$. *Alors* x *est produit de* 4 *commutateurs multiplicatifs dans* $GL_1(A)$.

Rappelons qu'une C*-algèbre est *stable* si elle est isomorphe à son produit tensoriel par une C*-algèbre élémentaire séparable, et convenons ici qu'une C*-algèbre avec unité est *infinie* si elle contient un élément x tel que $x^*x = 1$ et $xx^* \neq 1$. Le but du paragraphe 7 est de montrer les résultats suivants :

THÉORÈME II. — *Soit* A *une* C**-algèbre stable et soit* $x \in GL_1^0(A)$. *Alors* x *est produit de* 6 *commutateurs multiplicatifs dans* $GL_1^0(A)$.

THÉORÈME III. — *Soit* A *une* C**-algèbre infinie simple avec unité. Alors* $GL_1^0(A)$ *est un groupe parfait.*

COROLLAIRE. — *Si* A *est comme au théorème I, l'application* δ_T *du* § 2 *est un isomorphisme entre*

$$\mathrm{Ker}\,(K_1(A) \rightarrow K_1^{top}(A))$$

et le but $E_u/\underline{T}(K_0(A))$ *de l'application déterminant universel. Si* A *est comme au théorème II ou au théorème III, la projection canonique* $K_1(A) \rightarrow K_1^{top}(A)$ *est un isomorphisme.*

Les analogues des théorèmes I à III pour les *groupes unitaires* n'offrent pas de difficulté essentielle : voir les propositions 6.7, 7.6 et 7.7.

Dans la situation du théorème I et de son analogue unitaire, il se trouve que les groupes $DGL_1(A)$ et $DU_1(A)$ sont parfaits. Ils sont mêmes *simples* modulo leurs centres, comme nous le montrerons dans une troisième (et sans doute dernière) partie de ce travail.

5. Quelques résultats techniques sur les C*-algèbres.

Dans ce travail, nous considérons toujours une C*-algèbre A comme un idéal (banal si A possède une unité) de l'algèbre M_A de ses multiplicateurs. Par suite

$$GL_1(A) = \{x \in GL_1(M_A) \mid x-1 \in A\}.$$

Rappelons que $[a,b]$ désigne le commutateur additif ab-ba de deux éléments $a, b \in A$ et que (x,y) désigne le commutateur multiplicatif $xyx^{-1}y^{-1}$ de deux éléments x, y d'un groupe.

5.1. *C*-algèbres de dimensions finie.*

Si n est un entier positif et si $A = M_n(\mathbf{C})$, nous écrivons selon l'usage $SL(n,\mathbf{C})$ au lieu de $DGL_1(A)$. Citons d'abord pour mémoire un résultat classique :

PROPOSITION 5.1. — *Soit* $x \in M_n(\mathbf{C})$. *Alors* $\det(x) = 1$ *si et seulement s'il existe* $y,z \in SL(n,\mathbf{C})$ *avec* $x = (y,z)$.

Preuve. — [12] ou [9]. □

Avant d'établir une version quantitative de ce fait (proposition 5.5), examinons le cas $n = 2$.

LEMME 5.2. — *Soit* $x \in SL(2,\mathbf{C})$ *une matrice diagonale avec* $\|x-1\| < 1$. *Il existe* $y, z \in SL(2,\mathbf{C})$ *avec* $x = (y,z)$ *et*

$$\|y-1\| \leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2}, \qquad \|z-1\| \leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2}.$$

Preuve. — On peut écrire $x = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ et $|\lambda| \geqslant 1$, donc avec $\|x-1\| = |\lambda^2-1|$.

Choisissons $t \in \mathbf{C}$ avec $1 + t^2 = \lambda^2$ et posons

$$y = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ t & \lambda \end{pmatrix}$$

de sorte que $x = (y,z)$. On a

$$\|y-1\| \leqslant |\lambda-1| + |t| \quad \text{et} \quad |\lambda-1| \leqslant |(\lambda-1)(\lambda+1)|^{1/2} = (\|x-1\|)^{1/2},$$

donc $\|y-1\| \leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2}$; de même pour z.

Notons $\tau\colon M_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ la trace usuelle, avec $\tau(1) = n$.

LEMME 5.3. — *Soit* $x \in SL(n,\mathbf{C})$ *une matrice unitaire ou positive avec* $\|x-1\| < 1$ *et* $\tau(\mathrm{Log}(x)) = 0$. *Il existe* y_1, z_1, y_2, z_2 *dans* $SL(n,\mathbf{C})$ *avec*

$$x = (y_1,z_1)(y_2,z_2)$$
$$\left.\begin{aligned} \|y_j-1\| &\leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2} \\ \|z_j-1\| &\leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,2).$$

Preuve. — Supposons x unitaire. Quitte à remplacer x par une matrice unitairement conjuguée, on peut supposer x diagonale de la forme

$$x = \mathrm{Diag}\,(\exp(it_1), \ldots, \exp(it_n))$$

où $t_1, \ldots, t_n$ sont des nombres réels de somme nulle ordonnés de telle sorte que

$$\left|\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} t_j\right| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |t_j| \qquad \text{pour tout} \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Posons

$$\mu_k = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \exp(it_j), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Alors

$$x = \mathrm{Diag}\,(\mu_1, \mu_1^{-1}, \mu_3, \mu_3^{-1}, \mu_5, \ldots)\,\mathrm{Diag}\,(1, \mu_2, \mu_2^{-1}, \mu_4, \mu_4^{-1}, \ldots)$$

la dernière valeur de la première [respectivement seconde] matrice diagonale valant 1 si n est impair [resp. pair]. Le problème est ainsi réduit au cas $n = 2$, déjà résolu par le lemme précédent.

Le cas d'une matrice positive est analogue. □

LEMME 5.4. — *Soient* A *une* C*-*algèbre avec unité,* $x \in A$ *et* p *la racine carrée positive de* x^*x. *Alors* $\|p-1\| \leqslant \|x-1\|$. *De plus, si* x *possède une décomposition polaire* $x = up$ *dans* A *(par exemple si* x *est inversible), alors* $\|u-1\| \leqslant 2\|x-1\|$.

Preuve (Pour un résultat plus fin sur $\|u-1\|$, voir le lemme 2.7 de [2]). — Si x n'est pas inversible, alors $\|x-1\| \geqslant 1$. On a $0 \leqslant p \leqslant \|x\|$, donc

$$-1 \leqslant p-1 \leqslant \|x\|-1 \leqslant \|x-1\| \quad \text{et} \quad \|p-1\| \leqslant \max(1, \|x-1\|) = \|x-1\|.$$

Supposons x inversible, donc p aussi. On a évidemment

$$p \leqslant \|p\| = \|x\| \leqslant \|x-1\| + 1, \qquad \text{donc} \qquad p - 1 \leqslant \|x-1\|.$$

La décomposition polaire $x^{-1} = u^{-1}(up^{-1}u^{-1})$ montre que $\|x^{-1}\| = \|p^{-1}\|$. Par suite $p^{-1} \leqslant \|p^{-1}\|$ implique $p - 1 \geqslant \|x^{-1}\|^{-1} - 1$; or $\|x^{-1}\| \leqslant \|x^{-1}\|\,\|x-1\| + 1$, donc $1 \leqslant \|x-1\| + \|x^{-1}\|^{-1}$ et $p - 1 \geqslant -\|x-1\|$. Il en résulte que $\|p-1\| \leqslant \|x-1\|$.

Si $x = up$, alors $\|u-1\| \leqslant \|u(1-p)\| + \|x-1\| \leqslant 2\|x-1\|$. □

PROPOSITION 5.5. — *Soit* $x \in M_n(\mathbf{C})$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{4}$ *et* $\tau(\mathrm{Log}\,(x)) = 0$. *Il existe* $y_j, z_j \in SL(n,\mathbf{C})$ $(j=1,2,3,4)$ *avec*

$$x = (y_1, z_1)(y_2, z_2)(y_3, z_3)(y_4, z_4)$$
$$\left.\begin{aligned} \|y_j-1\| &\leqslant 2^{3/2}(\|x-1\|)^{1/2} \\ \|z_j-1\| &\leqslant 2^{3/2}(\|x-1\|)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,2,3,4).$$

Preuve. — Si $x = up$ est la décomposition polaire de x, on vérifie que $(1-\|x-1\|)(1-\|p^{-1}-1\|)$ majore $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, d'où par le lemme 3 (*b*)

$$\tau(\mathrm{Log}\,(u)) = \tau(\mathrm{Log}\,(x)) + \tau(\mathrm{Log}\,(p^{-1})).$$

Le membre de gauche étant imaginaire pur et celui de droite réel :

$$\tau(\mathrm{Log}\,(u)) = \tau(\mathrm{Log}\,(p)) = 0.$$

La proposition résulte alors des deux lemmes précédents. □

5.2. C*-*algèbres approximativement finies avec unité.*

Soit A une C*-algèbre approximativement finie avec unité. Le groupe topologique $GL_1(A)$ est connexe. Apportons d'abord la précision suivante au lemme 3(*a*).

LEMME 5.6. — *Soient* E *un espace de Banach et* $\tau : A \to E$ *une application traciale. Soient* $x \in GL_1(A)$ *avec* $\Delta_\tau(x) = 0$ *et* $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *avec* $\varepsilon > 0$. *Il existe une sous-algèbre de dimension finie* B *de* A *et* $a_1, a_2 \in B$, $a_3 \in A$ *tels que*

$$x = \exp(a_1)\exp(a_2)\exp(a_3)$$
$$\tau(a_1+a_2+a_3) = 0 \quad \|a_3\| < \varepsilon.$$

Preuve. — Il existe une sous-algèbre de dimension finie B′ de A et $y \in GL_1(B')$ avec $\|y^{-1}x-1\|$ assez petit pour que, en posant $a_3 = \mathrm{Log}\,(y^{-1}x)$, on ait $\|a_3\| < \varepsilon$. Le groupe $GL_1(B')$ étant exponentiel, il existe $a_2 \in B'$ avec $x = \exp(a_2)\exp(a_3)$.

On a par hypothèse $\frac{1}{i2\pi}\tau(a_2+a_3) \in \underline{\tau}(K_0(A))$. Il existe donc une sous-algèbre de dimension finie B de A contenant B′, un entier $n \geqslant 1$ et des projecteurs $e, f \in M_n(B)$ avec $\frac{1}{i2\pi}\tau(a_2+a_3) = \tau(e) - \tau(f)$. Soit $B = \oplus B_j$ la décomposition de B en somme d'idéaux bilatères simples, et choisissons un projecteur minimal e_j dans chaque B_j. Il existe des entiers $k_j \in Z$ tels que

$$[e] - [f] = \Sigma\, k_j[e_j] \in K_0(B).$$

Posons $a_1 = -\, i2\pi\, \Sigma\, k_j e_j$. Alors $\exp(a_1) = 1$ et les conditions du lemme sont satisfaites. □

Rappelons que $T : A \to E_u = A/\overline{[A,A]}$ désigne l'application traciale universelle de A.

Proposition 5.7. — (*a*) *Soient* $x \in GL_1(A)$ *avec* $\Delta_T(x) = 0$ *et* $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *avec* $0 < \varepsilon < 1$. *Il existe* $x_1, y, z \in GL_1(A)$ *avec*

$$x = (y,z)x_1, \qquad \|x_1 - 1\| < \varepsilon, \qquad T(\operatorname{Log}(x_1)) = 0.$$

(*b*) *Supposons de plus* $\|x-1\| < \frac{1}{4}$ *et* $T(\operatorname{Log}(x)) = 0$. *Il existe* x_1 *et* y_j, z_j *dans* $GL_1(A)$ $(j=1,2,3,4)$ *avec*

$$x = \left(\prod_{1\leqslant j\leqslant 4} (y_j,z_j)\right)x_1$$
$$\|x_1 - 1\| < \varepsilon, \qquad T(\operatorname{Log}(x_1)) = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} \|y_j - 1\| \leqslant 4(\|x-1))^{1/2} \\ \|z_j - 1\| \leqslant 4(\|x-1\|)^{1/2} \end{array}\right\} \quad (j=1,2,3,4).$$

Preuve de (*a*). — Soit $\varepsilon_1 > 0$ une constante à préciser plus bas. Soient B et a_1, a_2, a_3 comme au lemme 5.6, avec

$$T(a_1+a_2+a_3) = 0 \qquad \text{et} \qquad \|a_3\| < \varepsilon_1.$$

Il existe une sous-algèbre de dimension finie C de A contenant B et $u_1, v_1, \ldots, u_q, v_q \in C$ tels que

$$\left\| a_1 + a_2 + a_3 - \sum_{1\leqslant j\leqslant q} [u_j, v_j] \right\| < \varepsilon_1.$$

Posons $b_3 = -\, a_1 - a_2 + \Sigma\,[u_j,v_j]$, qui vérifie $\|b_3\| < 2\varepsilon_1$.

Soit $r = \exp(a_1)\exp(a_2)\exp(b_3) \in GL_1(C)$. Comme $a_1+a_2+b_3 \in [C,C]$ on a $\Delta_{T_C}(r) = 0$ et il résulte de la proposition 5.1 qu'il existe $y, z \in GL_1(C)$ avec $r = (y,z)$. Posons $x_1 = \exp(-b_3)\exp(a_3)$; pour ε_1 bien choisi, on obtient $\|x_1 - 1\| < \varepsilon$. Enfin, si ε_1 est assez petit, on a en vertu du lemme 3 (*b*)

$$T(\mathrm{Log}(x_1)) = T(-b_3) + T(a_3) = -T(a_1+a_2+b_3) + T(a_1+a_2+a_3) = 0. \quad \square$$

Preuve de (*b*). — Soit à nouveau ε_2 avec $0 < \varepsilon_2 < 1$ une constante à préciser plus bas. Comme $T(\mathrm{Log}(x)) = 0$, il existe une sous-algèbre de dimension finie B de A et $u_1, v_1, \ldots, u_q, v_q \in B$ tels que, si $r = \exp(\Sigma[u_j, v_j])$, alors

$$\|\mathrm{Log}(x) - \Sigma[u_j, v_j]\| < \frac{1}{2}\varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\|r^{-1}x - 1\| < \varepsilon, \qquad \|r-1\| \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\|x-r\| \leqslant \|x-1\|.$$

On a $T_B(\mathrm{Log}(r)) = 0$; la proposition 5.5 montre qu'il existe $y_j, z_j \in GL_1(B)$ $(j=1,2,3,4)$ avec $r = \prod_{1\leqslant j\leqslant 4}(y_j, z_j)$ et $\|y_j - 1\|$, $\|z_j - 1\|$ majorés par $2^{3/2}(\|r-1\|)^{1/2} \leqslant 4(\|x-1\|)^{1/2}$. On pose $x_1 = r^{-1}x$ et il reste à vérifier que $T(\mathrm{Log}(x_1)) = 0$.

Pour ε_2 bien choisi, $(1-\|r^{-1}-1\|)(1-\|x-1\|) > 1/2$ et on a en vertu du lemme 3 (*b*)

$$\begin{aligned} T(\mathrm{Log}(x_1)) &= T(\mathrm{Log}(r^{-1})) + T(\mathrm{Log}(x)) \\ &= -T(\mathrm{Log}(r)) + T(\mathrm{Log}(x)) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

5.3. *Commutateurs multiplicatifs et partition de l'unité en somme de deux projecteurs.*

Les résultats ci-dessous constituent une variation sur le thème suivant : toute matrice de GL(2,C) est congrue modulo le groupe des commutateurs à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. On se donne une fois pour toutes une C*-algèbre A et deux projecteurs orthogonaux p, q dans l'algèbre des multiplicateurs M_A avec $p + q = 1$. Pour tout $x \in M_A$, nous écrivons

$$x = \begin{pmatrix} pxp & pxq \\ qxp & qxq \end{pmatrix}$$

au lieu de

$$x = pxp + pxq + qxp + qxq.$$

Si pxp possède un inverse dans pM_Ap, nous le notons $(x)_p^{-1}$.

LEMME 5.8. — *Soit* $x \in GL_1(A)$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{4}$. *Alors il existe*

$$s = \begin{pmatrix} p & 0 \\ qsp & q \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} p & ptq \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} pdp & 0 \\ 0 & qdq \end{pmatrix}$$

dans $GL_1(A)$ *avec* $x = std$ *et*

$$\|s-1\| \leqslant \frac{3}{2}\|x-1\|, \qquad \|d-1\| \leqslant \frac{4}{3}\|x-1\|$$

$$\|t-1\| \leqslant \frac{3}{2}\|x-1\|, \qquad \|pdp-1\| \leqslant \|x-1\|.$$

Preuve. — Les équations à résoudre s'écrivent

$$\begin{pmatrix} pdp & ptqqdq \\ qsppdp & (qspptq+q)qdq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pxp & pxq \\ qxp & qxq \end{pmatrix}.$$

On est donc amené à poser

$$pdp = pxp \qquad qsp = qxp(d)_p^{-1}$$
$$qdq = qxq - qsppxq \qquad ptq = pxq(d)_q^{-1}.$$

On obtient successivement

$$\|pdp-p\| < \frac{1}{4}, \qquad \|(d)_p^{-1}\| < \frac{4}{3}$$

$$\|qsp\| \leqslant \frac{4}{3}\|x-1\|$$

$$\|qdq-q\| \leqslant \|x-1\| + \frac{4}{3}\|x-1\|^2 < \frac{1}{3}, \qquad \|(d)_q^{-1}\| < \frac{3}{2}$$

$$\|ptq\| \leqslant \frac{3}{2}\|x-1\|$$

ce qui achève la preuve. □

LEMME 5.9. — *On reprend les notations du lemme* 5.8. *Il existe* $u, v, w \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$ *avec*

$$s = (v,u), \quad t = (u,w)$$
$$\|u-1\| \leqslant \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2}, \quad \|v-1\| \leqslant \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2}$$
$$\|w-1\| \leqslant \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2}.$$

Preuve. — Si on cherche u, v, w sous la forme

$$\begin{array}{lll} u = 1 + a & \text{avec} & a = pap \\ v = 1 + b & \text{avec} & b = qbp \\ w = 1 + c & \text{avec} & c = pcq \end{array}$$

il vient

$$\begin{aligned} (v,u) &= 1 + b(1+a)^{-1}a \\ (u,w) &= 1 + ac \end{aligned}$$

et les équations à résoudre sont

$$\begin{aligned} b(1+a)^{-1}\, a &= qsp \\ ac &= ptq\,. \end{aligned}$$

Posons $r = (qsp)^*qsp + ptq(ptq)^* \in pAp$. On a par le lemme 5.8

$$\|r\| \leqslant 2 \max(\|qsp\|^2, \|ptq\|^2) \leqslant \frac{9}{2}\|x-1\|^2.$$

Un résultat classique de factorisation (proposition 1.4.5 de [11]) montre qu'il existe $y, z \in \mathrm{A}$ avec

$$\begin{array}{ll} qsp = yr^{1/4}, & \|y\| \leqslant \|r\|^{1/4} \\ (ptq)^* = zr^{1/4}, & \|z\| \leqslant \|r\|^{1/4}. \end{array}$$

On observe que $r \in p\mathrm{A}p$ implique $qypr^{1/4} = qsp$; on peut donc supposer $y \in q\mathrm{A}p$, et de même $z \in q\mathrm{A}p$. On pose alors

$$a = -r^{1/4}, \qquad b = -y(1-r^{1/4}), \qquad c = -z^*$$

et on vérifie que les équations à résoudre sont satisfaites (en particulier que $\|a\|^4 \leqslant \frac{9}{2}\|x-1\|^2 < 1$, donc que $1 + a$ est inversible). Pour les majorations, il faut noter que $1 - r^{1/4} \leqslant 1$ implique $\|b\| \leqslant \|y\|$. □

LEMME 5.10. — *Soit* $x \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{4}\cdot$ *Alors il existe* $y, z, d \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *avec*

$$
\begin{array}{cc}
x = (y,z)\,d\,, & d - 1 \in p\mathrm{A}p + q\mathrm{A}q \\
\|y-1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}, & \|z-1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2} \\
\|d-1\| \leqslant 2\|x-1\|, & \|pdp-1\| \leqslant \|x-1\|.
\end{array}
$$

Si de plus $\|x-1\| < \frac{1}{10}$, *alors* $\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x))$.

Preuve. — Avec les notations des lemmes précédents, on pose

$$y = vuv^{-1}, \qquad z = wv^{-1}$$

de sorte que

$$(v,u)(u,w) = (y,z).$$

Nous avons déjà remarqué que $u \leqslant 1$ et $\|u\| \leqslant 1$. On a $y = su$, donc

$$
\begin{aligned}
\|y-1\| &\leqslant \|s-1\|\,\|u\| + \|u-1\| \leqslant \frac{3}{2}\|x-1\| + \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2} \\
&\leqslant 4(\|x-1\|)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

On a aussi $v = 1 + qbp$, donc $v^{-1} = 1 - qbp$ et

$$
\begin{aligned}
\|z-1\| &\leqslant \|w-1\|\,\|v^{-1}\| + \|v^{-1}-1\| \\
&\leqslant \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2}\left(1+\left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2}\right) + \left(\frac{5}{2}\|x-1\|\right)^{1/2} \\
&\leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Considérons à nouveau l'équation $x = std$. On a par un calcul direct $\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(s)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(t)) = 0$. D'autre part, si $|x-1\| < \frac{1}{10}$, alors

$$2(1-\|s-1\|)(1-\|t-1\|)(1-\|d-1\|) \geqslant 2\left(1-\frac{3}{2}\|x-1\|\right)^3 \geqslant 2\left(\frac{17}{20}\right)^3 > 1$$

et il résulte du lemme 3 (*b*) que $\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x))$. □

On suppose désormais que $p \lll q$, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie partielle $u \in \mathrm{M}_\mathrm{A}$ avec $u^*u = p$ et $uu^* \leqslant q$.

LEMME 5.11. — *Soit* $x \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{2}$ *et* $x - 1 \in p\mathrm{A}p$. *Alors il existe* $y, z, f \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$ *avec*

$$\begin{gathered} x = (y,z)f, \qquad f - 1 \in q\mathrm{A}q \\ \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(f)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)), \qquad \|f - 1\| \leqslant \|x-1\| \\ \|y-1\| \leqslant 3(\|x-1\|)^{1/2}, \qquad \|z-1\| \leqslant 3(\|x-1\|)^{1/2}. \end{gathered}$$

Preuve. — En vertu d'un résultat de factorisation déjà utilisé (proposition 1.4.5 de [11]), il existe $a, b \in p\mathrm{A}p$ avec

$$pxp - p = ab, \qquad \|a\| = \|b\| = (\|pxp-p\|)^{1/2} \leqslant (\|x-1\|)^{1/2}.$$

Posons $s = au^*$ et $t = ub$, de sorte que

$$st = apb = ab, \qquad \|s\| = \|t\| \leqslant (\|x-1\|)^{1/2}.$$

(Les éléments u, s, t de cette preuve ne doivent pas être confondus avec ceux du lemme 5.9).

Vu que $pxp - p$ et ts sont majorés par $\|x-1\| < \frac{1}{2}$, on peut définir par calcul fonctionnel

$$\begin{aligned} \lambda &= (pxp)^{1/2} = p(1-(p-pxp))^{1/2}, \quad \lambda - p \in p\mathrm{A}p \\ \mu &= (q+ts)^{1/2} = q(1-(-ts))^{1/2}, \quad \mu - q \in q\mathrm{A}q. \end{aligned}$$

Les coefficients k_j de la série $(1-\alpha)^{1/2} = 1 + \Sigma\, k_j \alpha^j$ étant tous réels négatifs, on a

$$\|\lambda-p\| \leqslant \Sigma\, |k_j|\, \|pxp-p\|^j = 1 - (1-\|pxp-p\|)^{1/2}$$

c'est-à-dire, puisque $\|pxp-p\| < \frac{1}{2}$

$$\|\lambda-p\| \leqslant \|pxp-p\| \leqslant \|x-1\|.$$

Par suite

$$\|(\lambda)_p^{-1}-p\| \leqslant \|(\lambda)_p^{-1}\|\,\|\lambda-p\| \leqslant 2\|x-1\|.$$

De même

$$\|\mu-q\| \leqslant \|x-1\|, \qquad \|(\mu)_q^{-1}-q\| \leqslant 2\|x-1\|.$$

On a $pu^* = u^*q$, donc $ps = apu^* = sq$. Il en résulte d'abord que $(p+st)^n s = s(q+ts)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, ensuite que $F(p+st)s = sF(q+ts)$ pour toute série entière F absolument convergente en $p + st$ et $q + ts$, enfin que $\lambda s = s\mu$ puisque $\lambda = (p+st)^{1/2}$ et $\mu = (q+ts)^{1/2}$. D'où aussi $s(\mu)_q^{-1} = (\lambda)_p^{-1}s$. De même, $t\lambda = \mu t$ et $(\mu)_q^{-1}t = t(\lambda)_p^{-1}$. Enfin

$$q - t(\lambda)_p^{-2}s = q - (\mu)_q^{-2}(\mu^2 - q) = (\mu)_q^{-2}.$$

Posons

$$y = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & (\mu)_q^{-1} \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} (\lambda)_p^{-1} & 0 \\ t & \mu \end{pmatrix}.$$

Comme $\|\lambda - p\|$ et $\|\mu - q\|$ sont majorés par $\frac{1}{2}$, on a $y, z \in GL_1^0(A)$. Grâce aux calculs préliminaires ci-dessus, on vérifie sans peine que

$$(y,z) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & (\mu)_q^{-2} \end{pmatrix}.$$

Posons enfin $f = (y,z)^{-1}x \in 1 + qAq$. On obtient les majorations

$$\begin{aligned} \|y-1\| &\leqslant \|\lambda - p + (\mu)_q^{-1} - q\| + \|s\| \\ &\leqslant 2\|x-1\| + (\|x-1\|)^{1/2} \\ \|z-1\| &\leqslant 2\|x-1\| + (\|x-1\|)^{1/2} \\ \|f-1\| &= \|\mu^2 - q\| = \|ts\| \leqslant \|x-1\|. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} T(\mathrm{Log}\,(f)) &= T(\mathrm{Log}\,(1+ts)) = T(\mathrm{Log}\,(1+st)) \\ &= T(\mathrm{Log}\,(x)) \end{aligned}$$

car T est traciale. □

Nous retenons pour la suite de ce travail l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5.12. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* p *et* q *deux projecteurs orthogonaux dans l'algèbre des multiplicateurs* M_A *de* A *avec* $p + q = 1$, *et* $u \in M_A$ *une isométrie partielle avec* $u^*u = p$ *et* $uu^* \leqslant q$. *Soit* $x \in GL_1(A)$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{10}$.

Alors il existe $y_1, z_1, y_2, z_2, e \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *avec*

$$x = (y_1, z_1)(y_2, z_2)e, \qquad e - 1 \in q\mathrm{A}q$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(e)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)), \qquad \|e-1\| \leqslant 4\|x-1\|.$$
$$\left.\begin{array}{l}\|y_j - 1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}\\ \|z_j - 1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}\end{array}\right\} \quad (j=1,2).$$

Preuve. — On peut écrire grâce au lemme 5.10

$$x = (y_1, z_1)\, d'd''$$

avec

$$d' - 1 \in p\mathrm{A}p, \qquad d'' - 1 \in q\mathrm{A}q$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d')) + \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d'')) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x))$$
$$\|d'-1\| \leqslant \|x-1\|, \qquad \|d''-1\| \leqslant 2\|x-1\|$$
$$\|y_1 - 1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}, \qquad \|z_1 - 1\| \leqslant 5(\|x-1\|)^{1/2}.$$

Puis grâce au lemme 5.11

$$d' = (y_2, z_2)f$$

avec

$$f - 1 \in q\mathrm{A}q, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(f)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d'))$$
$$\|y_2 - 1\| \leqslant 3(\|d'-1\|)^{1/2} \leqslant 3(\|x-1\|)^{1/2}$$
$$\|z_2 - 1\| \leqslant 3(\|x-1\|^{1/2}$$
$$\|f-1\| \leqslant \|x-1\|.$$

En posant $e = fd''$, on a

$$\|e-1\| \leqslant \|f-1\|\,\|d''\| + \|d''-1\| \leqslant 4\|x-1\|.$$

Enfin

$$(1-\|f-1\|)(1-\|d''-1\|) \geqslant (1-\|x-1\|)(1-2\|x-1\|) > \frac{1}{2}$$

d'où par le lemme 3(*b*)

$$\mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(e)) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(f)) + \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(d'')) = \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)). \qquad \square$$

5.4. *Variation unitaire.*

Soit A une C*-algèbre. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\mathrm{U}_n(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{A}) \mid x^*x = 1\}$$

qui est un groupe topologique de composante connexe $U_n^0(A)$. Si $A = \mathbf{C}$, on écrit $U(n)$ au lieu de $U_n(\mathbf{C})$, et $SU(n)$ au lieu de $DU(n)$ le groupe dérivé. Les trois premiers numéros de ce paragraphe suggèrent les variations suivantes :

***

L'analogue de la proposition 5.1 est facile à montrer, et classique [7]. Avant d'énoncer celui de la proposition 5.5, nous montrons un lemme.

Lemme 5.13. — *Il existe deux fonctions continues* v_1, v_2 *de* $]-\pi/2, \pi/2[$ *dans* $SU(2)$ *telles que*

$$(v_1(\varphi), v_2(\varphi)) = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\|v_j(\varphi) - 1\| \leqslant |\exp(i\varphi) - 1|^{1/2} \quad (j = 1,2)$$

pour tout $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Preuve. — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, le commutateur unitaire

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exp(-i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \exp(i2\theta)\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\,(-1+\exp(-i2\theta)) \\ \sin\theta\cos\theta\,(1-\exp(i2\theta)) & \cos^2\theta + \exp(-i2\theta)\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

est de trace $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta \sin^2\theta = 2 - 4\sin^4\theta$. Posons

$$\theta(\varphi) = \operatorname{Arc\,sin}\left\{\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)^{1/4}\right\}$$

et notons ce commutateur $w(\varphi)$. Si $0 < |\varphi| < \pi/2$, les 4 coefficients de $w(\varphi)$ sont non nuls; il existe donc une unique matrice $v(\varphi)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ -\overline{b(\varphi)} & a(\varphi) \end{pmatrix} \in SU(2), \qquad a(\varphi) \text{ réel positif}$$

telle que

$$v(\varphi)w(\varphi)v(\varphi)^* = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi) \end{pmatrix},$$

et il résulte du théorème des fonctions implicites que v dépend continûment de φ dans $]-\pi/2,0[\cup]0,\pi/2[$. Posons

$$v_1(\varphi) = v(\varphi)\begin{pmatrix} \cos\theta(\varphi) & \sin\theta(\varphi) \\ -\sin\theta(\varphi) & \cos\theta(\varphi)\end{pmatrix}v(\varphi)^*$$
$$v_2(\varphi) = v(\varphi)\begin{pmatrix} \exp(-i\theta(\varphi)) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta(\varphi))\end{pmatrix}v(\varphi)^*$$

si $0 < |\varphi| < \pi/2$. Alors

$$\begin{aligned}\|v_1(\varphi)-1\| = \|v_2(\varphi)-1\| &= |\exp(i\theta(\varphi))-1| \\ &= 2\left|\sin\frac{\theta(\varphi)}{2}\right| = |\sin\theta(\varphi)|\left|\cos\frac{\theta(\varphi)}{2}\right|^{-1} \\ &< 2^{1/2}\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)^{1/4} = |\exp(i\varphi)-1|^{1/2}\end{aligned}$$

où l'inégalité résulte de ce que, si $0 < |\varphi| < \pi/2$, alors

$$0 < |\theta(\varphi)| < \pi/2 \qquad \text{et} \qquad \left|\cos\frac{\theta(\varphi)}{2}\right|^{-1} < 2^{1/2}.$$

En posant $v_1(0) = v_2(0) = 1$, on obtient donc bien deux fonctions v_1 et v_2 avec les propriétés désirées. □

PROPOSITION 5.14. — *Soit* $x \in \mathrm{U}(n)$ *avec* $\|x-1\| < 2^{1/2}$ *et* $\tau(\mathrm{Log}(x)) = 0$. *Il existe* $y_j, z_j \in \mathrm{SU}(n)$ $(j = 1,2)$ *avec*

$$x = (y_1, z_1)(y_2, z_2)$$
$$\left.\begin{aligned}\|y_j-1\| &< (\|x-1\|)^{1/2} \\ \|z_j-1\| &< (\|x-1\|)^{1/2}\end{aligned}\right\} \quad (j=1,2).$$

Preuve. — On montre comme au lemme 5.3 que x est produit de deux matrices diagonales avec lesquelles on peut argumenter comme dans $\mathrm{SU}(2)$, et on conclut grâce au lemme 5.13. □

*
* *

La proposition 5.7 et sa preuve restent vraies si on remplace partout $\mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ par $\mathrm{U}_1(\mathrm{A})$. On peut même remplacer $j = 1,2,3,4$ par $j = 1,2$.

*
* *

Soient A une C*-algèbre et p, q deux projecteurs orthogonaux dans l'algèbre des multiplicateurs $\mathrm{M_A}$ avec $p + q = 1$.

LEMME 5.15. — *Soit* $c \in qAp$ *avec* $\|c\| \leqslant 2(3)^{-3/2}$. *Il existe* $y, z \in U_1^0(A)$ *avec*

$$(y,z) = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}, \qquad \|(y,z)-1\| \leqslant 3\|c\|$$
$$\|y-1\| \leqslant 2\|c\|^{1/2}, \qquad \|z-1\| \leqslant 2\|c\|^{1/2}.$$

Preuve. — Rappelons d'abord le fait suivant : soient α un nombre réel positif, $g : [0,\alpha] \to \mathbf{C}$ une fonction continue nulle à l'origine, $x \in A$ et $x = u|x|$ la décomposition polaire de x dans l'algèbre de von Neumann enveloppante A'' de A; alors $ug(|x|) \in A$. C'est en effet banal si g est un polynôme, et le cas général en résulte.

Soit désormais g: $[0,2(3)^{-3/2}] \to \mathbf{C}$ la fonction continue nulle à l'origine satisfaisant

$$|1+g(t)| = 1, \qquad \operatorname{Im}(g(t)) \geqslant 0$$
$$|g(t)|^2(1-|g(t)|^2)^{1/2} = t$$

pour tout $t \in [0,2(3)^{-3/2}]$. On vérifie que $|g(t)|^2 \leqslant 3^{1/2}t$. Considérons la décomposition $c = u|c|$ dans A'' et posons

$$\gamma = ug(|c|) \in qAp$$
$$y = g(|c|) + 1 = \begin{pmatrix} y-q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in U(A)$$
$$z = \begin{pmatrix} (p-\gamma^*\gamma)^{1/2} & -\gamma^* \\ \gamma & (q-\gamma\gamma^*)^{1/2} \end{pmatrix} \in U(A).$$

On vérifie les relations

$$\gamma^*\gamma = |g(|c|)|^2, \qquad \gamma(y^*-1)(p-\gamma^*\gamma)^{1/2} = c$$

de sorte que

$$(y,z) = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}.$$

On a

$$|\gamma| \leqslant 3^{1/4}\|c\|^{1/2} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|y-1\| \leqslant 3^{1/4}\|c\|^{1/2}.$$

On calcule

$$|z-1|^2 = 2\begin{pmatrix} p-(p-\gamma^*\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & q-(q-\gamma\gamma^*)^{1/2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\|z-1\|^2 \leqslant 2(1-(1-\|\gamma\|^2)^{1/2}) \leqslant 2\|\gamma\|^2$$

et

$$\|z-1\| \leqslant 2^{1/2}3^{1/4}\|c\|^{1/2} \leqslant 2\|c\|^{1/2}.$$

On vérifie encore les relations

$$\begin{aligned} &y(p-\gamma^*\gamma)^{1/2}y^*(p-\gamma^*\gamma)^{1/2} + y\gamma^*\gamma = p + g(|c|)|g(|c|)|^2 \\ &y(p-\gamma^*\gamma)^{1/2}(y^*-1)\gamma^* = (g(|c|)+1)c^* \\ &\gamma y^*\gamma^* + q - \gamma\gamma^* = q + ug(|c|)|g(|c|)|^2u^* \end{aligned}$$

de sorte que

$$(y,z) - 1 = \begin{pmatrix} g(|c|)|g(|c|)|^2 & (g(|c|)+1)|c|u^* \\ c & ug(|c|)|g(|c|)|^2u^* \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \|(y,z)-1\| \leqslant &\left\|\begin{pmatrix} g(|c|)|g(|c|)|^2 & 0 \\ 0 & ug(|c|)|g(|c|)|^2u^* \end{pmatrix}\right\| \\ &+ \left\|\begin{pmatrix} 0 & |c|u^* \\ c & 0 \end{pmatrix}\right\| \leqslant 3^{1/4}\|c\|^{1/2}3^{1/2}\|c\| + \|c\| \\ &\leqslant (2^{1/2}+1)\|c\| \leqslant 3\|c\|. \end{aligned}$$

□

LEMME 5.16. — *Soit* $x \in U_1(A)$ *avec* $\|qxp\| < \frac{1}{3}$ et $\|x-1\| < 1$. *Il existe* $s \in U_1(pAp)$, $t \in U_1(qAq)$ *et* $v, w \in U_1^0(A)$ *avec*

$$x = (v,w)\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\|v-1\| \leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2}, \qquad &\|w-1\| \leqslant 2(\|x-1\|)^{1/2} \\ &\|s-p\| \leqslant 4\|x-1\|, &\|t-q\| \leqslant 4\|x-1\|. \end{aligned}$$

De plus, pour $\|x-1\|$ *assez petit, on a*

$$T(\operatorname{Log}(x)) = T(\operatorname{Log}(s)) + T(\operatorname{Log}(t)).$$

Preuve. — Écrivons $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, soient y, z comme au lemme 5.15, et notons $(y,z) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c & \delta \end{pmatrix}$. Comme x et (y,z) sont unitaires

$$\begin{aligned} &a^*a + c^*c = \alpha^*\alpha + c^*c = 1 \\ &cc^* + dd^* = cc^* + \delta\delta^* = 1. \end{aligned}$$

Les éléments a, α, d, δ sont inversibles et

$$s = a(\alpha)_p^{-1}, \qquad t = (\delta)_q^{-1}\, d$$

sont unitaires. Les éléments x et

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

étant unitaires avec a, d inversibles, on a $b' = b$. On définit v [respectivement w] comme le conjugué de y [resp. z] par $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$.

Les estimations résultent du lemme précédent. □

Considérons pour terminer les analogues du lemme 5.11 et de la proposition 5.12. On suppose qu'il existe une isométrie partielle $u \in \mathrm{M_A}$ avec $u^*u = p$ et $uu^* \leqslant q$.

LEMME 5.17. — *Soit* $x \in \mathrm{U}_1(p\mathrm{A}p)$ *avec* $\|x-1\| \leqslant 1$. *Alors il existe* $v, w \in \mathrm{U}_1^0(\mathrm{A})$ *avec*

$$(v,w) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & ux^*u^* + q - uu^* \end{pmatrix}$$
$$\|v-1\| \leqslant (\|x-1\|)^{1/2}, \qquad \|w-1\| \leqslant (\|x-1\|)^{1/2}.$$

Preuve. — Soit $x \in \mathrm{U}_1(p\mathrm{A}p)$ avec $\|x-1\| \leqslant 1$. Soient Ω l'arc de cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \text{ et } |z-1| \leqslant 1\}$ et B la C*-algèbre des fonctions continues de Ω dans $\mathbf{C}$ nulles en 1. Le calcul fonctionnel montre qu'il existe un homomorphisme

$$\Phi : \mathrm{U}_2(\mathrm{B}) \to \mathrm{U}((p+uu^*)\mathrm{A}(p+uu^*))$$

avec

$$\Phi\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & ux^*u^* \end{pmatrix}$$

où $z : \Omega \to \mathbf{C}$ est l'inclusion naturelle. L'existence d'éléments v, w avec les propriétés indiquées résulte du lemme 5.13. □

PROPOSITION 5.18. — *Soient* A *une* C**-algèbre,* p *et* q *deux projecteurs orthogonaux de l'algèbre des multiplicateurs* $\mathrm{M_A}$ *avec*

$p+q=1$, *et* $u \in M_A$ *une isométrie partielle avec* $u^*u = p$ *et* $uu^* \leqslant q$. *Soit* $x \in U_1(A)$ *avec* $\|x-1\| \leqslant \frac{1}{4}\cdot$

Alors il existe $y_1, z_1, y_2, z_2, e \in U_1(A)$ *avec*

$$x = (y_1,z_1)(y_2,z_2)e, \qquad e - 1 \in qAq$$
$$\|e-1\| \text{ majoré par } 8\|x-1\|$$
$$\|y_j - 1\| \text{ et } \|z_j-1\| \text{ majorés par } 2(\|x-1\|)^{1/2} \quad (j=1,2).$$

De plus, si $\|x-1\|$ *est suffisamment petit, alors*

$$T(\mathrm{Log}(e)) = T(\mathrm{Log}(x)).$$

Preuve. — Cela résulte des lemmes 5.16 et 5.17. □

6. Noyau du déterminant universel pour une C*-algèbre approximativement finie simple.

Nous désignons dans ce paragraphe par A une C*-algèbre approximativement finie simple avec unité; on sait alors que $GL_1(A)$ est connexe. Soit $T: A \to E_u$ l'application traciale universelle de A; il résulte du § 1 que

$$DGL_1(A) \subset \mathrm{Ker}\,(\Delta_T : GL_1(A) \to E_u/\underline{T}(K_0(A))).$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'inclusion est une égalité (ainsi que l'inclusion analogue pour $U_1(A)$), puis d'estimer le nombre de commutateurs nécessaires pour écrire un élément de $DGL_1(A)$.

Proposition 6.1. — *Avec les notations ci-dessus :*

$$\mathrm{Ker}\,(\Delta_T) \subset DGL_1(A).$$

Première réduction.

On sait qu'il existe trois suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$, $(q_n)_{n\geqslant 1}$, $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de projecteurs de A telles que

(i) $p_1 + q_1 + r_1 = 1$,

(ii) $p_n \ll q_n \ll r_n \quad (n \geqslant 1)$,

(iii) r_m et r_n sont orthogonaux $(m,n \geqslant 1$ et $m \neq n)$,

(iv) $r_n = p_{n+1} + q_{n+1} \quad (n \geqslant 1)$.

Voir le lemme 3.6 de [4].

Soit $x \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ avec $\Delta_{\mathrm{T}}(x) = 0$; il s'agit de montrer que $x \in \mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$. Sans restreindre la généralité de ce qui suit, on peut d'abord supposer que

$$\|x-1\| < \frac{1}{64} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)) = 0$$

vu la proposition 5.7 (*a*), puis que

$$x-1 \in (q_1+r_1)\mathrm{A}(q_1+r_1), \quad \|x-1\| < \frac{1}{16}, \quad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)) = 0$$

vu la proposition 5.12, et enfin que

$$x-1 \in r_1 \mathrm{A} r_1, \qquad \|x-1\| < \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x)) = 0$$

pour la même raison.

Construction de suites.

Montrons par induction sur n qu'on peut construire des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $(y_n^j)_{n \geqslant 1}$, $(z_n^j)_{n \geqslant 1}$ $(j=1,\ldots,7)$ dans A avec $x_1 = x$, avec

$$\|x_n - 1\| < \frac{1}{4n^2}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x_n)) = 0, \qquad x_n - 1 \in r_n \mathrm{A} r_n$$

$$\|y_n^j - 1\| < \frac{2}{n} \quad \begin{cases} y_n^j - 1 \in r_n \mathrm{A} r_n & (j=1,\ldots,6) \\ y_n^7 - 1 \in (r_n + r_{n+1})\mathrm{A}(r_n + r_{n+1}) \end{cases}$$

$$\|z_n^j - 1\| < \frac{2}{n} \quad \begin{cases} z_n^j - 1 \in r_n \mathrm{A} r_n & (j=1,\ldots,6) \\ z_n^7 - 1 \in (r_n + r_{n+1})\mathrm{A}(r_n + r_{n+1}) \end{cases}$$

et avec

$$x_n = \left\{ \prod_{1 \leqslant j \leqslant 7} (y_n^j, z_n^j) \right\} x_{n+1}.$$

Supposons pour cela les suites $(x_m)_{1 \leqslant m \leqslant n}$, $(y_m^j)_{1 \leqslant m < n}$, $(z_m^j)_{1 \leqslant m < n}$ $(j=1,\ldots,7)$ déjà construites, avec $x_1 = x$.

Appliquons la proposition 5.7 (*b*) à $x_n + r_n - 1 \in \mathrm{GL}_1(r_n \mathrm{A} r_n)$. Il existe $x_n^{(4)}$ et y_n^j, z_n^j $(j=1,2,3,4)$ dans $\mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ avec

$$x_n^{(4)} = \left\{\prod_{1\leqslant j\leqslant 4} (y_n^j, z_n^j)\right\}^{-1} x_n$$

$$\|x_n^{(4)}-1\| < \frac{1}{16(n+1)^2}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x_n^{(4)})) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_n^j - 1 \in r_n\mathrm{A}r_n, \qquad \|y_n^j-1\| < \frac{2}{n} \\ z_n^j - 1 \in r_n\mathrm{A}r_n, \qquad \|z_n^j-1\| < \frac{2}{n} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,2,3,4).$$

Appliquons la proposition 5.12 à p_{n+1}, q_{n+1} et

$$x_n^{(4)} + r_n - 1 \in \mathrm{GL}_1(r_n\mathrm{A}r_n).$$

Il existe $x_n^{(6)}$ et y_n^j, z_n^j $(j=5,6)$ dans $\mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ avec

$$x_n^{(6)} = \left\{\prod_{1\leqslant j\leqslant 6} (y_n^j, z_n^j)\right\}^{-1} x_n$$

$$\|x_n^{(6)}-1\| < \frac{1}{4(n+1)^2}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x_n^{(6)})) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_n^j - 1 \in r_n\mathrm{A}r_n, \quad \|y_n^j-1\| < \frac{2}{n} \\ z_n^j - 1 \in r_n\mathrm{A}r_n, \quad \|z_n^j-1\| < \frac{2}{n} \end{aligned}\right\} \quad (j=5,6).$$

Appliquons enfin le lemme 5.11 à q_{n+1}, r_{n+1} et $x_n^{(6)}$. Il existe x_{n+1} et y_n^7, z_n^7 dans $\mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ avec

$$x_{n+1} = \left\{\prod_{1\leqslant j\leqslant 7} (y_n^j, z_n^j)\right\}^{-1} x_n \in 1 + r_{n+1}\mathrm{A}r_{n+1}$$

$$\|x_{n+1}-1\| < \frac{1}{4(n+1)^2}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Log}\,(x_{n+1})) = 0$$

$$y_n^7 - 1 \in (q_{n+1}+r_{n+1})\mathrm{A}(q_{n+1}+r_{n+1}), \qquad \|y_n^7-1\| < \frac{2}{n}$$

$$z_n^7 - 1 \in (q_{n+1}+r_{n+1})\mathrm{A}(q_{n+1}+r_{n+1}), \qquad \|z_n^7-1\| < \frac{2}{n}.$$

Remarquons que

$$(y_n^7, z_n^7) - 1 \in r_n A r_n + r_{n+1} A r_{n+1}$$

car $x_n^{(6)} \in q_{n+1} A q_{n+1}$ et $x_{n+1} \in r_{n+1} A r_{n+1}$.

Modification des suites.

Posons $y_0^7 = z_0^7 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_n^j &= (y_{n-1}^7, z_{n-1}^7) y_n^j (y_{n-1}^7, z_{n-1}^7)^{-1} \\ \tilde{z}_n^j &= (y_{n-1}^7, z_{n-1}^7) z_n^j (y_{n-1}^7, z_{n-1}^7)^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,\dots,7).$$

Il résulte de la remarque ci-dessus que

$$\begin{aligned} &\tilde{y}_n^j - 1, \quad \tilde{z}_n^j - 1 \in r_n A r_n, \quad j = 1, \dots, 6 \\ &\tilde{y}_n^7 - 1, \quad \tilde{z}_n^7 - 1 \in (r_n + r_{n+1}) A (r_n + r_{n+1}). \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $j \in \{1,\dots,6\}$, les éléments y_n^j, z_n^j, $\tilde{y}_n^j$, $\tilde{z}_n^j$ commutent avec y_m^k, z_m^k, $\tilde{y}_m^k$, $\tilde{z}_m^k$ pour $k \in \{1,\dots,6\}$ et $m \neq n$, ainsi que pour $k = 7$ et $m \notin \{n-1, n, n+1\}$. On en déduit par induction les deux relations suivantes :

$$x = \{(\Pi \tilde{y}_k^1, \Pi \tilde{z}_k^1) \dots (\Pi \tilde{y}_k^6, \Pi \tilde{z}_k^6) \Pi (y_k^7, z_k^7)\} x_{n+1}$$

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant 2n} (y_k^7, z_k^7) = (\Pi \tilde{y}_{2k-1}^7, \Pi \tilde{z}_{2k-1}^7)(\Pi y_{2k}^7, \Pi z_{2k}^7)$$

pour tout $n \geqslant 1$ (produits non spécifiés sur k de 1 à n).

Fin de la preuve de la proposition 6.1.

Posons pour tout $n \geqslant 1$

$$\bar{y}_n^j = \prod_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \tilde{y}_k^j, \qquad \bar{z}_n^j = \prod_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \tilde{z}_k^j \quad (j=1,\dots,6)$$

$$\bar{y}_n^7 = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \tilde{y}_{2k-1}^7, \qquad \bar{z}_n^7 = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \tilde{z}_{2k-1}^7$$

$$\bar{y}_n^8 = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} y_{2k}^7, \qquad \bar{z}_n^8 = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} z_{2k}^7.$$

Les normes

$$\|\tilde{y}_n^j - 1\|, \qquad \|y_n^j - 1\|, \qquad \|\tilde{z}_n^j - 1\|, \qquad \|z_n^j - 1\|$$

tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini ($j=1,\ldots.7$), et chacun des produits ci-dessus est formé de termes dans des sous-algèbres de A réduites par des projecteurs deux à deux orthogonaux. Ces expressions ont donc un sens pour $n = \infty$. Des relations déjà établies, il résulte que

$$x = \left\{ \prod_{1 \leqslant j \leqslant 8} (\bar{y}_n^j, \bar{z}_n^j) \right\} x_{2n+1}$$

pour tout $n \geqslant 1$, et par suite

$$x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 8} (\bar{y}_\infty^j, \bar{z}_\infty^j).$$

Nous avons montré la proposition 6.1 avec la précision suivante : tout $x \in \operatorname{Ker}(\Delta_T)$ est produit de 13 commutateurs dans $GL_1(A)$. Dans la suite du paragraphe, nous montrons qu'on peut remplacer 13 par 4.

LEMME 6.2. — *Soient k, n des entiers avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et soit $y \in GL_n(\mathbf{C})$. Il existe un projecteur p de dimension k dans $\mathbf{C}^n$ avec pyp inversible sur l'image de p et avec $\|(y)_p^{-1}\| \leqslant \|y^{-1}\|$.*

Preuve. — On choisit pour p la projection orthogonale de $\mathbf{C}^n$ sur l'espace engendré par les k premiers vecteurs d'une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$ relativement à laquelle y est une matrice triangulaire supérieure. □

Dans les trois lemmes suivants, A désigne une C*-algèbre approximativement finie de dimension infinie avec unité, supposée simple (au moins dès le n° 6.4).

LEMME 6.3. — *Soient $\pi \in K_0(A)$ avec $0 \leqslant \pi \leqslant 1$ et $x \in GL_1(A)$. Il existe un projecteur $p \in A$ de classe π et des éléments*

$$s = \begin{pmatrix} p & 0 \\ (1-p)sp & 1-p \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} p & pt(1-p) \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$$
$$d = \begin{pmatrix} pdp & 0 \\ 0 & (1-p)\,d(1-p) \end{pmatrix}$$

dans $GL_1(A)$ avec $x = std$.

Preuve. — Soit B une sous-algèbre de dimension finie de A avec $\pi \in K_0(B)$ et $0 \leqslant \pi \leqslant 1$ dans $K_0(B)$, telle qu'il existe $y \in GL_1(B)$ avec

$\|y-x\| < \|y^{-1}\|^{-1}$. Le lemme 6.2 montre qu'il existe un projecteur $p \in B$ de classe π avec pyp inversible dans pBp et $\|(y)_p^{-1}\| \leqslant \|y^{-1}\|$. Par suite $\|pxp-pyp\| < \|(y)_p^{-1}\|^{-1}$ et pxp est inversible dans pBp. Le lemme en résulte, car l'existence d'une décomposition $x = std$ comme indiqué équivaut au fait que pxp est inversible dans pAp. □

LEMME 6.4. — *Soit $x \in GL_1(A)$. Il existe une suite $p_1, \ldots, p_{27}$ de projecteurs orthogonaux deux à deux dans A de somme 1 avec $p_j \sim p_k$ pour $1 \leqslant j,k \leqslant 14$ ou $15 \leqslant j,k \leqslant 27$, et des éléments s, t, $d \in GL_1(A)$ avec $x = std$ tels que*

(1) *s soit triangulaire inférieur :* $s = 1 + \sum_{j>k} p_j s p_k$.

(2) *t soit triangulaire supérieur :* $t = 1 + \sum_{j<k} p_j t p_k$.

(3) *d soit diagonal :* $d = \sum_j p_j d p_j$.

Preuve. — Par simplicité de A, il existe $\pi \in K_0(A)$ avec $0 \leqslant \pi$ et $13\pi \leqslant 1 \leqslant 14\pi$. On pose $\pi_1 = 1 - 13\pi$ et $\pi_2 = 14\pi - 1$, de telle sorte que $\pi_1 \geqslant 0$, $\pi_2 \geqslant 0$, $14\pi_1 + 13\pi_2 = 1$. On détermine d'abord un projecteur que l'on note $1 - p_{27}$ en appliquant le lemme 6.3 à $x \in A$ et $14\pi_1 + 12\pi_2$, puis un projecteur $1 - (p_{27}+p_{26}) \in A$ en appliquant le lemme à $(1-p_{27})x(1-p_{27}) \in (1-p_{27})A(1-p_{27})$ et $14\pi_1 + 11\pi_2$, et ainsi de suite 26 fois. □

LEMME 6.5. — *Soit $x \in GL_1(A)$. Il existe une suite $q_1, \ldots, q_{13}$ de projecteurs orthogonaux équivalents deux à deux dans A et des éléments $y', z', y'', z'', x' \in GL_1(A)$ avec*

$$x = (y',z')(y'',z'')x', \qquad x' - 1 \in q_1 A q_1 .$$

Preuve. — Soient $p_1, \ldots, p_{27}, s, t, d$ comme dans le lemme 6.4. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{27}$ des nombres complexes distincts deux à deux et $u = \Sigma \lambda_j p_j$. On vérifie facilement qu'il existe

$$v = 1 + \sum_{j>k} p_j v p_k, \qquad w = 1 + \sum_{j<k} p_j w p_k$$

avec $s = (v,u)$ et $t = (u,w)$. Comme au lemme 5.10, on pose alors $y' = vuv^{-1}$ et $z' = wv^{-1}$ de telle sorte que $x = (y',z')\,d$.

Soit σ_1 [respectivement $\sigma_2, \ldots, \sigma_{14}$] une isométrie partielle de projecteur initial p_1 [resp. $p_2, \ldots, p_{14}$] et de projecteur final p_2 [resp. $p_3, \ldots, p_1$], et soit $\sigma = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 14} \sigma_j$. Posons

$$\begin{aligned} d_j &= p_j d p_j, \qquad j = 1, \ldots, 14 \\ \mu_1 &= p_1, \qquad \mu_2 = d_2, \qquad \mu_j = \sigma_{j-1}\mu_{j-1}\sigma_{j-1}^* d_j \quad (j=3,\ldots,14) \\ \mu &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant 14} \mu_j . \end{aligned}$$

En calculant dans l'algèbre réduite de A par $p_1 + \cdots + p_{14}$, on trouve

$$(\sigma,\mu^{-1}) = \mathrm{Diag}\,(e_1, d_2, d_3, \ldots, d_{14})$$

avec $e_1 \in p_1 A p_1$; si on identifie cette algèbre à $M_{14}(p_1 A p_1)$, alors $e_1 = (d_2 d_3, \ldots, d_{14})^{-1}$. De même, il existe deux éléments inversibles τ, ν dans l'algèbre réduite de A par $p_{15} + \cdots + p_{27}$ avec

$$(\tau, \nu^{-1}) = \mathrm{Diag}\,(e_2, d_{16}, \ldots, d_{27})$$

et $e_2 \in p_{15} A p_{15}$. On pose enfin

$$\begin{gathered} q_1 = p_1 + p_{15}, \ldots, q_{13} = p_{13} + p_{27} \\ y'' = \sigma + \tau, \qquad z'' = \mu + \nu \\ x' = (y'', z'')^{-1} d \end{gathered}$$

et tout va bien. □

THÉORÈME 6.6. — *Soient* A *une* C*-*algèbre approximativement finie simple avec unité,* $\Delta_T : GL_1(A) \to E_u/\underline{T}(K_0(A))$ *son déterminant universel et* $x \in \mathrm{Ker}\,(\Delta_T)$. *Alors* x *est produit de* 4 *commutateurs multiplicatifs dans* $GL_1(A)$.

Preuve. — Soient $q_1, \ldots, q_{13}$ et $x = (y',z')(y'',z'')x'$ comme au lemme 6.5. Alors $q_1 x' q_1 \in GL_1(q_1 A q_1)$ et $q_1 x' q_1$ est dans le noyau du déterminant universel de $q_1 A q_1$. La proposition 6.1 montre qu'il existe $y_1, z_1, \ldots, y_{13}, z_{13}$ dans $GL_1(q_1 A q_1)$ avec $q_1 x' q_1 = (y_1, z_1) \ldots (y_{13}, z_{13})$.

Identifions la réduite de A par $q_1 + \cdots + q_{13}$ à $M_{13}(q_1 A q_1)$ et posons $d_j = (y_j, z_j)$ $(j=1,\ldots,13)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Diag}\,(q_1 x' q_1, q_2, \ldots, q_{13}) = {} & (\mathrm{Diag}\,(y_1, \ldots, y_{13}), \mathrm{Diag}\,(z_1, \ldots, z_{13})) \\ & \mathrm{Diag}\,(d_2 \ldots d_{13}, d_2^{-1}, \ldots, d_{13}^{-1}). \end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre étant un commutateur (voir la preuve 6.5), x' est un produit de deux commutateurs dans $GL_1(A)$ et le théorème en résulte. □

Variation unitaire.

Le résultat suivant se démontre comme la proposition 6.1, en utilisant les résultats techniques du numéro 5.4.

PROPOSITION 6.7. — *Soit* A *une* C*-*algèbre approximativement finie simple avec unité. Alors le noyau de la restriction* $U_1(A) \to E_u/\underline{T}(K_0(A))$ *du déterminant universel* Δ_T *coïncide avec le groupe dérivé* $DU_1(A)$.

Exemples.

Soit A une C*-algèbre approximativement finie simple avec unité. Supposons que $K_0(A)$ avec sa structure ordonnée pointée soit isomorphe à un sous-groupe (dénombrable) D de **R** contenant Z avec l'ordre naturel et le point 1 ; ceci revient à supposer que deux projecteurs quelconques de A sont toujours comparables au sens de Murray et von Neumann (§ 5.4 de [3]). Alors A possède une unique trace positive normalisée τ, donc $E_u = A/\overline{[A,A]}$ est isomorphe à **C**. Les propositions 6.1. et 6.7 affirment qu'on peut identifier via le déterminant Δ_τ

$$
\begin{array}{ccc}
GL_1(A)/DGL_1(A) & \text{avec} & \mathbf{C}/D \\
U_1(A)/DU_1(A) & \text{avec} & \mathbf{R}/D .
\end{array}
$$

Ces remarques s'appliquent en particulier aux algèbres de Glimm (prop. 6.4.3 de [11]) pour lesquelles D est un sous-groupe des rationnels, ou aux algèbres B_θ introduites par Pimsner et Voiculescu comme suralgèbres des algèbres associées aux rotations irrationnelles (voir prop. 13 de [8]).

7. Perfection de $GL_1^0(A)$ pour une C*-algèbre stable, ou infinie simple avec unité.

On se donne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie H_1, la C*-algèbre $B(H_1)$ des opérateurs sur H_1 et son idéal K des opérateurs compacts. Rappelons qu'une C*-algèbre A est stable si elle est isomorphe à $A \otimes K$. Le premier résultat de ce paragraphe est l'analogue multiplicatif du théorème 1.1 de [4].

PROPOSITION 7.1. — *Soit* A *une* C*-*algèbre stable. Alors* $GL_1^0(A)$ *est un groupe parfait.*

Preuve. — Montrons que $GL_1^0(A \otimes K)$ est parfait. Soient H_0 un espace de Hilbert et $A \to B(H_0)$ une représentation fidèle non dégénérée. L'algèbre des multiplicateurs $M = M_{A \otimes K}$ s'identifie à une sous-algèbre de $B(H_0 \otimes H_1)$ qui contient $(\mathbf{C}id_{H_0}) \otimes B(H_1)$; voir le n° 3.12.3 de [11]. Il existe donc deux projecteurs orthogonaux équivalents $p, q \in \mathbf{C} \otimes B(H_1) \subset M$ avec $p + q = 1$, tels qu'on puisse écrire q comme somme orthogonale infinie de projecteurs équivalents à p. Soit $x \in GL_1^0(A \otimes K)$; il s'agit de montrer que $x \in DGL_1^0(A \otimes K)$. Vu la connexité du groupe, il suffit de s'en assurer pour $\|x-1\|$ petit. La proposition 5.12 nous autorise alors à supposer $x - 1 \in p(A \otimes K)p$ et $\|x-1\| < c \leqslant 1$, où c est une constante *ad hoc* permettant en fin de preuve d'appliquer le lemme 7.2.

Nous reprenons un argument de Pearcy et Topping, à qui nous nous référons pour un exposé moins formel [10]. Soit

$$I = \{(j,k) \in \mathbf{Z}^2 \mid j \geqslant 0 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant 2^j\}.$$

Soit $(p_{j,k})_{(j,k) \in I}$ une famille de projecteurs orthogonaux équivalents deux à deux de somme 1 dans M, avec $p_{(0,1)} = p$. Pour chaque $(j,k) \in I$, soit $u_{j,k}$ une isométrie partielle de M de projecteur initial p et de projecteur final $p_{j,k}$. Définissons

$$\alpha_{j,k} = (-1)^j 2^{-j}, \qquad \beta_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } (j,k) = (0,1) \\ -\alpha_{j,k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons

$$\tilde{y} = \exp\left\{\sum_{(j,k) \in I} \alpha_{j,k} u_{j,k} \operatorname{Log}(x) u_{j,k}^*\right\}$$
$$\tilde{z} = \exp\left\{\sum_{(j,k) \in I} \beta_{j,k} u_{j,k} \operatorname{Log}(x) u_{j,k}^*\right\}$$

de sorte que $x = \tilde{y}\tilde{z}$. (Penser à $\tilde{y}$ comme à une matrice diagonale avec une fois le bloc x, deux fois $x^{-1/2}$, quatre fois $x^{1/4}$, ...) Nous allons vérifier que $\tilde{y}$ est un produit de commutateurs; le cas de $\tilde{z}$ est semblable.

Notons p' la somme des $p_{j,k}$ sur tous les (j,k) avec j pair; notons q' [respectivement q''] la somme des $p_{j,k}$ sur les (j,k) avec j impair et k

impair [resp. k pair]. Soient

$$\left.\begin{aligned} u' &= \Sigma\, u_{j+1,2k-1} u_{j,k}^{*} \\ u'' &= \Sigma\, u_{j+1,2k} u_{j,k}^{*} \end{aligned}\right\} \quad \text{sommes sur } (j,k) \text{ avec } j \text{ pair, fortement convergentes dans } \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)$$

qui sont des isométries partielles de projecteur initial p' et de projecteurs finaux q', q''. On identifie de la manière usuelle les algèbres $\mathrm{A} \otimes \mathrm{K}$ et $\mathrm{M}_3(p'(\mathrm{A} \otimes \mathrm{K})p')$.

Posons alors

$$y = u'^{*}\tilde{y}u' \in p'(\mathrm{A} \otimes \mathrm{K})p'$$

de sorte que $\tilde{y}$ s'identifie à la matrice

$$\begin{pmatrix} y^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{\mathrm{B}} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{M}_3(p'(\mathrm{A} \otimes \mathrm{K})p').$$

On achève la preuve à l'aide du lemme 7.2. □

LEMME 7.2. — *Soient* B *une* C*-*algèbre et* $x \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{B})$ *avec* $\|x-1\| < \frac{1}{2}\cdot$ *Alors* $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est un produit de deux commutateurs dans* $\mathrm{GL}_3^0(\mathrm{B})$.

Preuve. — Le lemme 5.11 montre qu'il existe $f \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{B})$ tel que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ est commutateur dans $\mathrm{GL}_2^0(\mathrm{B})$. Par suite

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1} \end{pmatrix}$$

sont des commutateurs dans $\mathrm{GL}_3^0(\mathrm{B})$.

Pour préciser la proposition 7.1, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 7.3. — *Soient* A *une* C*-*algèbre complexe et*

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A}) \qquad \textit{avec} \qquad x_n x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1 = 1.$$

Alors

$$x = \mathrm{Diag}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{A})$$

est produit de trois commutateurs dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{A})$.

Preuve. — Pour tout $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, posons $y_k = \prod_{1 \leq j \leq k} x_j^{-1}$ et choisissons $s_k,\ t_k \in A$ avec $y_k = 1 + s_k t_k$. Considérons les matrices

$$\alpha = \mathrm{Diag}\,(s_1,\ldots,s_{n-1},0)$$
$$\beta = \mathrm{Diag}\,(t_1,\ldots,t_{n-1},0)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ s_1 & 0 & & & \\ & s_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & & & \\ & 0 & t_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & t_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dans $M_n(A)$. Comme $1 + \alpha\beta$ est inversible, $1 + \beta\alpha$ l'est aussi, d'inverse $1 - \beta(1+\alpha\beta)^{-1}\alpha$; de même $1 + \gamma\delta$ et $1 + \delta\gamma$ sont inversibles. On a

$$\beta\alpha = \delta\gamma$$
$$(1+\alpha\beta)^{-1}(1+\gamma\delta) = \mathrm{Diag}\,(x_1,\ldots,x_n).$$

En écrivant par $(n \times n)$-blocs, on a aussi

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha\beta & 0 \\ 0 & (1+\beta\alpha)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta(1+\alpha\beta)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(1+\alpha\beta)^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de même en remplaçant α, β par γ, δ, donc

$$x = \begin{pmatrix} (1+\alpha\beta)^{-1} & 0 \\ 0 & 1+\beta\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\gamma\delta & 0 \\ 0 & (1+\delta\gamma)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} x$$

où la quantité $\{\ldots\}$ est la matrice unité. Or le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc x est un produit de trois termes de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{A})$$

et il suffit de vérifier que chacun de ceux-ci est un commutateur.

On procède alors comme pour la preuve du lemme 5.9, mais en posant en fin de preuve (avec r, y, z comme en 5.9)

$$a = r^{1/4}, \qquad b = y(1+r^{1/4}), \qquad c = z^*$$

de sorte que $1 + a$ soit inversible (car $a \geqslant 0$). On obtient donc une écriture de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (v,u)(u,w)$$

et on achève comme au début de la preuve du lemme 5.10. □

Théorème 7.4. — *Soit* A *une* C*-*algèbre stable et soit* $x \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$. *Alors* x *est un produit de* 6 *commutateurs dans* $\mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$.

Preuve. — Pour tout élément de A et en particulier pour $y = x - 1$, il existe un projecteur p dans l'algèbre des multiplicateurs $\mathrm{M_A}$ avec p et $1 - p$ équivalents à 1 et avec $\|(1-p)y(1-p)\| < 1$, donc avec $(1-p)x(1-p)$ inversible. En identifiant $\mathrm{M_A}$ avec $\mathrm{M}_2(p\mathrm{M_A}p)$, on peut donc écrire x sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit $s, t \in pAp$ avec $e = 1 + st$ et on a comme au lemme précédent

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+ts)^{-1} & 0 \\ 0 & 1+st \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc $y', z', y'', z'' \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$ et $x_1 \in \mathrm{GL}_1^0(p\mathrm{A}p)$ avec

$$x = (y',z')(y'',z'')\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La proposition 7.1 montre qu'il existe $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$ dans $\mathrm{GL}_1^0(p\mathrm{A}p)$ avec $x_1 = (y_1, z_1) \ldots (y_n, z_n)$. On décompose $1 - p$ en somme orthogonale de n projecteurs équivalents à p et on identifie $\mathrm{M_A}$ à $\mathrm{M}_{n+1}(p\mathrm{M_A}p)$. L'élément qui s'écrivait $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ci-dessus s'écrit maintenant

$$\mathrm{Diag}\,(x_1, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_{n+1}^0(p\mathrm{A}p).$$

En posant

$$u_1 = \prod_{2 \leqslant j \leqslant n} (y_j, z_j), \qquad u_2 = (y_2, z_2)^{-1}, \ldots,$$
$$u_n = (y_n, z_n)^{-1}$$

on obtient

$$\mathrm{Diag}\,(x_1, 1, \ldots, 1) = (\mathrm{Diag}\,(y_1, \ldots, y_n, 1), \mathrm{Diag}\,(z_1, \ldots, z_n, 1))\;\mathrm{Diag}\,(u_1, \ldots, u_n, 1).$$

Il résulte du lemme 7.3 que $\mathrm{Diag}\,(x_1, 1, \ldots, 1)$ est un produit de 4 commutateurs. □

THÉORÈME 7.5. — *Soit* A *une* C*-*algèbre telle qu'il existe deux projecteurs orthogonaux* $p, q \in \mathrm{A}$ *avec* p *et* q *équivalents à* 1 *dans* $\mathrm{M_A}$. *Alors* $\mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$ *est un groupe parfait.*

Preuve. — Soit $x \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{A})$, et montrons que x est un produit de commutateurs. Comme $p \sim q \leqslant 1 - p$, il résulte de la proposition 5.12 qu'on peut supposer $\|x - 1\| < 1$ et $x - 1 \in (1-p)\mathrm{A}(1-p)$.

Soient K comme au début du paragraphe et e un projecteur minimal de K. Le lemme 2.3 de [4] montre qu'il existe un morphisme $\varphi : A \otimes K \to A$ avec

$$\varphi((x-1)\otimes e) = x - 1 .$$

Notons encore φ le prolongement unital de ce morphisme à la C*-algèbre $\widetilde{A \otimes K}$ obtenue par adjonction d'une unité à $A \otimes K$. Alors

$$x = \varphi(1+(x-1)\otimes e) \in \varphi(GL_1^0(\widetilde{A\otimes K})) = \varphi(DGL_1^0(\widetilde{A\otimes K}))$$

en vertu de la proposition 7.1, donc $x \in DGL_1^0(A)$. □

Soit en particulier A une C*-algèbre infinie simple avec unité. Alors $GL_1^0(A)$ est un groupe parfait [4]. Nous montrerons que, modulo son centre, c'est même un groupe simple.

Variation unitaire.

En modifiant à peine la preuve des propositions 7.1 et 7.5, et en utilisant les numéros 5.17 et 5.18, on montre aussi :

PROPOSITION 7.6. — *Soit* A *une* C**-algèbre stable. Alors* $U_1^0(A)$ *est un groupe parfait.*

PROPOSITION 7.7. — *Soit* A *une* C**-algèbre infinie simple avec unité. Alors* $U_1^0(A)$ *est un groupe parfait.*

Appendice.

Dans le théorème III (=7.5), nous ne savons pas estimer le nombre des commutateurs multiplicatifs nécessaires comme dans les théorèmes I et II. En revanche, les estimations ci-dessous pour le problème additif sont faciles à obtenir; elles améliorent celles que nous avons pu trouver dans la littérature.

PROPOSITION. — *Dans une* C**-algèbre stable ou infinie simple avec unité, tout élément est somme de deux commutateurs additifs.*

Preuve. — Considérons d'abord le cas stable. Soient A une C*-algèbre, $A \subset B(H_0)$, et K l'idéal fermé de $B(H_1)$, comme au § 7.

Vérifions que tout $x \in A \otimes K$ est une somme de deux commutateurs additifs. Soit S' une isométrie de H_1 telle que les projecteurs 1 et $1 - S'S'^*$ soient équivalents dans $B(H_1)$, et soit $S = 1 \otimes S' \subset \mathbf{C} \otimes B(H_1) \subset M$ où M est l'algèbre des multiplicateurs de $A \otimes K$. Soient $y, z \in A \otimes K$ avec $x = yz$. Alors

$$x - [yS^*, Sz] = SzyS^*$$

est un commutateur additif en vertu du théorème 1 de [1], ou plus précisément de la généralisation immédiate suivante :

Soient $p' \in B(H_1)$ un projecteur tel que 1 et $1 - p'$ soient équivalents, $p = 1 \otimes p' \in M$, et $t \in A \otimes K$ avec $ptp = t$; alors t est un commutateur additif dans $A \otimes K$.

Le cas d'une algèbre infinie simple avec unité se ramène au premier cas par l'argument usuel (lemme 2.3 de [4]). □

En particulier, tout opérateur compact sur un espace de Hilbert de dimension infinie est somme de deux commutateurs d'opérateurs compacts, ce qui précise la remarque 5 de [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Anderson, Commutators of compact operators, *J. Reine Angew. Math.*, 291 (1977), 128-132.

[2] E. Christensen, Perturbations of type I von Neumann algebras, *J. London Math. Soc.*, 9 (1975), 395-405.

[3] G. A. Elliott, On totally ordered groups, and K_0, In « Ring theory, Waterloo 1978 », *Lecture Notes in Math.*, 734 (Springer, 1979), 1-49.

[4] T. Fack, Finite sums of commutators in C*-algebras, *Ann. Inst. Fourier*, 32-1 (1982), 129-137.

[5] T. Fack et P. de la Harpe, Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues, *Ann. Inst. Fourier*, 30-3 (1980), 49-73.

[6] P. Fan et C. K. Fong, Which operators are the self-commutators of compact operators? *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80 (1980), 58-60.

[7] M. Gotô, A theorem on compact semi-simple groups, *J. of Math. Soc. Japan*, 1 (1949), 270-272. Voir aussi H. Tôyama, On commutators of matrices, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 5-6 (1949), 1-2.

[8] P. de la Harpe et G. Skandalis, Déterminant associé à une trace sur une algèbre de Banach, *Ann. Inst. Fourier*, 34-1 (1984), 241-260.

[9] S. Pasiencier et H. C. Wang, Commutators in a semi-simple Lie group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 907-913.

[10] C. Pearcy et D. Topping, On commutators in ideals of compact operators, *Mich. Math. J.*, 18 (1971), 247-252.
[11] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, 1979.
[12] K. Soda, Einige Sätze über Matrizen, *Japan J. Math.*, 13 (1937), 361-365.

Manuscrit reçu le 21 juillet 1983.

P. de la Harpe,
Section de mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24.

G. Skandalis,
Laboratoire de mathématiques fondamentales
Université P. et M. Curie
Tour 45.46, 3e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.